Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski sveučilišni specijalistički studij
aktuarske matematike

ISPIT

VJEROJATNOST I MATEMATIČKA STATISTIKA

26. 3. 2007.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 100
Broj zadataka: 6
Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.
Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica, vlastitih formula ili *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

---

1. Neko je osiguravajuće društvo (OD) za neživotna osiguranja prodalo 1000 istovrsnih polica osiguranja. Po svakoj polici tog osiguranja, šteta u iznosu od 100 kn nastupa s vjerojatnošću 0.05, a šteta od 500 kn s vjerojatnošću 0.01. Ostali iznosi šteta nisu mogući (osim da nema štete po toj polici).

(a) Kolika je vjerojatnost da po jednoj polici osiguranja neće biti štete? (2 boda)

(b) Premija osiguranja jednaka je matematičkom očekivanju iznosa šteta po polici tog osiguranja. Koliko iznosi premija za navedeno osiguranje? (2 boda)

(c) Kažemo da će OD poslovati nesolventno po navedenom portfelju od 1000 polica ako će ukupni iznos šteta po tom portfelju (po isteku razdoblja osiguranja) biti veći od zbroja ukupnog prihoda od premija i iznosa pričuve. Kolika je vjerojatnost nesolventnosti OD-a po tom portfelju ako je OD osiguralo pričuvu u iznosu od 5000 kn? (11 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. Neka su X i Y nezavisne Γ-distribuirane slučajne varijable, $X \sim \Gamma(\alpha, 1/\lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta, 1/\lambda)$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$). Pomoću funkcije izvodnice momenata:

(a) izračunajte prvi, drugi i treći moment od X, te pomoću njih koeficijent asimetrije $\alpha_3(X)$ od X,

$$\alpha_3(X) = \mathbb{E}[\left(\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}\right)^3];$$

(10 bodova)

(b) pokažite da i $X+Y$ ima Γ-razdiobu i odredite joj parametre. (5 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Broj šteta N po portfelju istovrsnih nezavisnih polica osiguranja ima Poissonovu razdiobu s parametrom očekivanja μ. Kada se šteta dogodi, njezin iznos X_i ($i = 1, 2, \ldots$) ima gama razdiobu $\Gamma(\alpha, 1/\lambda)$. Varijable X_i, $i = 1, 2, \ldots$, su nezavisne od N. Neka je

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

ukupan iznos šteta po tom portfelju. Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu od S kao funkciju parametara μ, α i λ. (15 bodova)

4. U svrhu usporedbe iznosa premija osiguranja kućanstava koje naplaćuju dva osiguravajuća društva A i B, na slučajan način i nezavisno jedan od drugoga, odabrana su dva uzorka od po pet polica tog tipa iz svakog od navedenih društva. Opaženi iznosi premija su:

društvo A:	175	155	162	186	148
društvo B:	152	141	129	120	115

Pretpostavljamo da su iznosi premija normalno distribuirani s istim varijancama: $N(\mu_A, \sigma^2)$ za društvo A i $N(\mu_B, \sigma^2)$ za društvo B.

(a) Izračunajte uzoračke sredine i varijance svakog od navedenih uzoraka posebno, te, na osnovi oba uzorka zajedno, procijenite zajedničku varijancu σ^2. (3 boda)

(b) Konstruirajte i izračunajte opaženi 95% pouzdani interval za razliku parametara očekivanja $\mu_A - \mu_B$. Izrazite ga u formi granica. (5 bodova)

(c) Koliko iznosi p-vrijednost za jednostrani test

$$H_0 : \ \mu_A = \mu_B, \quad H_1 : \ \mu_A > \mu_B?$$

Zaključite je li opažena uzoračka sredina iznosa premija osiguranja kućanstava društva A značajno veća od odgovarajuće uzoračke sredine za društvo B, uz razinu značajnosti od 5%. (7 bodova)

(ukupno 15 bodova)

5. Jednostavan model za kretanje cijena dionica je sljedeći. Na kraju svakog proteklog jediničnog vremenskog razdoblja, neovisno o ostalim vremenskim razdobljima, cijena dionice poraste za jednu novčanu jedinicu s vjerojatnosti $\frac{1}{4} - \theta$, ostaje nepromijenjena s vjerojatnosti $\frac{5}{8} + 2\theta$, ili padne za jednu novčanu jedinicu s vjerojatnosti $\frac{1}{8} - \theta$.

(a) Odredite skup dopuštenih vrijednosti za parametar θ. (2 boda)

(b) Promatra se jedna dionica tijekom 80 uzastopnih jediničnih vremenskih razdoblja. Opaženo je sljedeće:

promjena u cijeni za:	1	0	-1
broj vremenskih razdoblja:	24	35	21

Na osnovi tih podataka procijenite nepoznati parametar θ metodom najveće vjerodostojnosti. (7 bodova)

(c) Sprovedite χ^2-test prilagodbe pretpostavljenog modela za kretanje cijena dionica podacima iz (b) dijela zadatka (na osnovi dobivene p-vrijednosti donesite zaključak). (11 bodova)

(ukupno 20 bodova)

6. Za zadanih 12 vrijednosti x_1, x_2,..., x_{12} (nezavisne) varijable poticaja X izmjerene su pripadne vrijednosti y_1, y_2,..., y_{12} (zavisne) varijable odziva Y. Na taj način dobiven je uzorak (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 12$ za koji vrijedi

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 516.4, \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 22741.34$$

$$\sum_{i=1}^{12} y_i = 14821, \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 18695125$$

$$\sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 650264.8.$$

(a) Uz pretpostavku da je model za vezu varijabli poticaja X i odziva Y jednostavni linearni regresijski model, procijenite pravac regresije. (7 bodova)

(b) Konstruirajte i procijenite 95%-pouzdan interval za koeficijent smjera regresijskog pravca. (5 bodova)

(c) Testirajte nulhipotezu da je koeficijent smjera jednak nuli u odnosu na alternativu da to nije tako, uz razinu značajnosti od 5%. (2 boda)

(d) Konstruirajte i procijenite 95%-pouzdan interval za očekivanu (srednju) vrijednost varijable Y ako je $X = 50$. (3 boda)

(e) Opišite linearni regresijski model i navedite koje ste sve pretpostavke na njega koristili u zadacima $(a - d)$. (3 boda)

(ukupno 20 bodova)

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski sveučilišni specijalistički studij
aktuarske matematike

ISPIT

VJEROJATNOST I MATEMATIČKA STATISTIKA

26. 3. 2007.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Neka je X slučajan iznos štete po jednoj polici osiguranja, a $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}$ ukupan iznos šteta po portfelju od 1000 istovrsnih polica osiguranja ($X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ su n.j.d. kao X).

(a) Vjerojatnost da neće biti štete po polici osiguranja:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= 1 - \mathbb{P}(X = 100) - \mathbb{P}(X = 500) = && (1) \\ &= 1 - 0.05 - 0.01 = 0.94. && (1) \end{aligned}$$

(b) Premija za policu osiguranja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 100 \cdot \mathbb{P}(X = 100) + 500 \cdot \mathbb{P}(X = 500) = && (1) \\ &= 0 + 100 \cdot 0.05 + 500 \cdot 0.01 = 10. && (1) \end{aligned}$$

(c) Za ukupan iznos šteta S vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= 1000 \cdot \mathbb{E}[X] = 10000 && (2) \\ \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 3000 - 100 = 2900 && (3) \\ \Rightarrow \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}[S] &= 1000 \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 2900000. && (2) \end{aligned}$$

Vjerojatnost nesolventosti:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > 10000 + 5000) &= \mathbb{P}\left(\tfrac{S-10000}{\sqrt{2900000}} > \tfrac{50}{\sqrt{290}}\right) = && (1) \\ &= \mathbb{P}(S^* > 2.936) \overset{\text{CGT}}{\approx} 1 - \Phi(2.936) = && (2) \\ &= 0.00166. && (1) \end{aligned}$$

(15)

2. (*a*) Momenti:

$$\begin{array}{rclrcll}
M_X(t) &=& \mathbb{E}[e^{tX}] = (1-t/\lambda)^{-\alpha}, & \mathbb{E}[X^k] &=& M_X^{(k)}(0) & (2)\\
M_X'(t) &=& M_X(t)\cdot\frac{\alpha}{\lambda-t} & \Rightarrow\ \mu=\mathbb{E}[X] &=& \frac{\alpha}{\lambda} & (1)\\
M_X''(t) &=& M_X(t)\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\lambda-t)^2} & \Rightarrow\ \mathbb{E}[X^2] &=& \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} & (1)\\
M_X'''(t) &=& M_X(t)\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\lambda-t)^3} & \Rightarrow\ \mathbb{E}[X^3] &=& \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3}. & (1)
\end{array}$$

Standardna devijacija:

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]} = \sqrt{\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}. \qquad (2)$$

Koeficijent asimetrije:

$$\begin{array}{rcll}
\alpha_3(X) &=& \mathbb{E}[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3] = & \\
&=& \frac{1}{\sigma^3}(\mathbb{E}[X^3] - 3\mu\mathbb{E}[X^2] + 3\mu^2\mathbb{E}[X] - \mu^3) = & (1)\\
&=& \frac{2}{\sqrt{\alpha}}. & (2)
\end{array}$$

(*b*) F.i.m. od $X+Y$:

$$\begin{array}{rcll}
M_{X+Y}(t) &=& M_X(t)\cdot M_Y(t) \qquad \text{(zbog nezavisnosti)} & (1)\\
&=& (1-t/\lambda)^{-\alpha}\cdot(1-t/\lambda)^{-\beta} = & (2)\\
&=& (1-t/\lambda)^{-(\alpha+\beta)} & (1)
\end{array}$$

što je f.i.m. $\Gamma(\alpha+\beta, 1/\lambda)$-razdiobe. Dakle, $X+Y$ ima $\Gamma(\alpha+\beta,1/\lambda)$-razdiobu. (1)

(15)

3. Za slučajnu varijablu S, f.i.m. je

$$m_S(t) = G_N(m_X(t)), \qquad (2)$$

gdje su

$$\begin{aligned} G_N(t) &= e^{\mu(t-1)} && (1) \\ m_X(t) &= \left(\tfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha}, \quad t < \lambda, && (1) \end{aligned}$$

f.i.v. Poissonove $P(\mu)$ i f.i.m. $\Gamma(\alpha, 1/\lambda)$ razdiobe. Prema tome,

$$m_S(t) = \exp\left(\mu\left(\left(\tfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha} - 1\right)\right), \quad t < \lambda. \qquad (1)$$

Budući da je

$$\begin{aligned} m'_S(t) &= m_S(t)\alpha\mu\tfrac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda-t)^{\alpha+1}}, \quad t < \lambda && (2) \\ m''_S(t) &= m'_S(t)\left(\tfrac{\alpha+1}{\lambda-t} + \tfrac{m'_S(t)}{m_S(t)}\right), \quad t < \lambda, && (2) \end{aligned}$$

slijedi da je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S &= m'_S(0) = \tfrac{\alpha\mu}{\lambda}, && (2) \\ \mathbb{V}\mathrm{ar}S &= \mathbb{E}[S^2] - (\mathbb{E}S)^2 = && (1) \\ &= m''_S(0) - \left(\tfrac{\alpha\mu}{\lambda}\right)^2 = \tfrac{\alpha+1+\alpha\mu}{\lambda^2}\alpha\mu - \left(\tfrac{\alpha\mu}{\lambda}\right)^2 = && (2) \\ &= \tfrac{\alpha\mu(\alpha+1)}{\lambda^2}. && (1) \end{aligned}$$

Napomena: Zadatak se može riješiti i tako da se matematičko očekivanje i varijanca od S izračunaju pomoću uvjetovanja na N.

4. (*a*) Procjena zajedničke varijance:

$$\begin{aligned} s_p^2 &= \tfrac{(n_A-1)s_A^2+(n_B-1)s_B^2}{n_A+n_B-2} = && (1) \\ &= \tfrac{4\cdot 234.7+4\cdot 230.3}{5+5-2} = 232.5. && (2) \end{aligned}$$

(*b*) 95% pouzdani interval za $\mu_A - \mu_B$: $\overline{X}_A - \overline{X}_B \pm t_{0.025}(8)S_p\sqrt{\frac{2}{5}}$. (2)
Iz tablice za t-razdiobu: $t_{0.025}(8) = 2.306$. (1)
Dakle, opaženi 95% pouzdani interval je:
$165.2 - 131.4 \pm 2.306 \cdot 15.25 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = 33.8 \pm 22.2$. (2)

(*c*) Testna statistika: $T = (\overline{X}_A - \overline{X}_B)/(S_p\sqrt{\frac{2}{5}}) \overset{H_0}{\sim} t(8)$. (2)
Opažena vrijednost: $t = (165.2 - 131.4)/(15.25 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}) = 3.5$. (1)
p-vrijednost: $\mathbb{P}(T > 3.5|H_0) < 0.005$. (2+1)
Budući da je p-vrijednost manja od 0.01, srednja vrijednost od A je značajno veća od srednje vrijednosti od B uz razinu značajnosti od 1%.
(1)
(15)

5. X=cijena dionice na kraju jediničnog razdoblja$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8}-\theta & \frac{5}{8}+2\theta & \frac{1}{4}-\theta \end{pmatrix}$.

(a) Skup dopuštenih vrijednosti za parametar θ:

$$\begin{aligned} & 0<\tfrac{1}{8}-\theta<1 \quad \& \quad 0<\tfrac{5}{8}+2\theta<1 \quad \& \quad 0<\tfrac{1}{4}-\theta<1 && (1)\\ \Leftrightarrow \quad & -\tfrac{14}{16}<\theta<\tfrac{2}{16} \quad \& \quad -\tfrac{5}{16}<\theta<\tfrac{3}{16} \quad \& \quad -\tfrac{12}{16}<\theta<\tfrac{4}{16} && \\ \Leftrightarrow \quad & -\tfrac{5}{16}<\theta<\tfrac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \theta\in\langle -0.3125, 0.125\rangle && (1) \end{aligned}$$

(b) Vjerodostojnost od θ:

$$L(\theta)=(\frac{1}{8}-\theta)^{21}\cdot(\frac{5}{8}+2\theta)^{35}\cdot(\frac{1}{4}-\theta)^{24}. \qquad (1)$$

Im$X=\{-1,0,1\}$ ne ovisi o θ pa MLE tražimo kao rješenje stacionarne jednadžbe $\ell'(\theta)=0$ log-vjerodostojnosti (1)

$$\begin{aligned} & \ell(\theta)=21\log(\tfrac{1}{8}-\theta)+35\log(\tfrac{5}{8}+2\theta)+24\log(\tfrac{1}{4}-\theta). && (1)\\ & \ell'(\theta)=-\tfrac{21\cdot 8}{1-8\theta}+\tfrac{35\cdot 8\cdot 2}{5+16\theta}-\tfrac{24\cdot 4}{1-4\theta}=0 && (1)\\ \Leftrightarrow \quad & 5120\theta^2-468\theta-95=0 && (1)\\ \Leftrightarrow \quad & \theta_1=0.1894, \quad \theta_2=-0.09798. && (1) \end{aligned}$$

Budući da je jedino θ_2 u skupu iz (a), MLE je $\hat{\theta}=-0.09798$. (1)

(c) Tablica:

a_i	p_i	f_i	e_i	$(f_i-e_i)^2/e_i$
-1	0.22298	21	17.84	0.5597
0	0.42905	35	34.32	0.0135
1	0.34798	24	27.84	0.5297
Σ	0.99991	80	80.00	1.1029

(5)

Broj stupnjeva slobode: $3-1-1=1$. (1)
Testna statistika: $H \overset{H_0}{\sim} \chi^2(1)$, opažena vrijednost: $h=1.1$. (2)
p-vrijednost: $\mathbb{P}(H>1.1|H_0)>0.3$. (2)
Nemamo dokaza u korist odbacivanja H_0, dakle, model je vrlo dobro prilagođen. (1)

(20)

6. (*a*) Opažene vrijednosti pomoćnih statistika:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \tfrac{516.4}{12} = 43.3 & \bar{y} &= \tfrac{1481}{12} = 1235.083 & (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})\\
S_{xx} &= \textstyle\sum_{i=1}^{12} x_i^2 - 12\cdot\bar{x}^2 = & S_{yy} &= \textstyle\sum_{i=1}^{12} y_i^2 - 12\cdot\bar{y}^2 = & (\tfrac{1}{2})\\
&= 522.37 & &= 389965 & (\tfrac{1}{2})\\
S_{xy} &= \textstyle\sum_{i=1}^{12} x_i y_i - 12\cdot\bar{x}\bar{y} = & & & (\tfrac{1}{2})\\
&= 12517.35 & & & (\tfrac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Parametri pravca:

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha} &= \tfrac{S_{xy}}{S_{xx}} = & \hat{\beta} &= \bar{y} - \hat{\alpha}\bar{x} = & (1+1)\\
&= 23.962612 & &= 203.9719 & (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Regresijski pravac: $y = 23.963x + 203.97$ (1)

(*b*) 95% pouzdani interval za α: $\hat{\alpha} \pm t_{0.025}(10)\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{S_{xx}}}$. (1)
Iz tablice za t-razdiobu: $t_{0.025}(10) = 2.228$. (1)

$$
\begin{aligned}
\text{SSE} &= S_{yy} - \hat{\alpha}^2 S_{xx} = 90016.61 & (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})\\
\hat{\sigma}^2 &= \tfrac{\text{SSE}}{n-2} = \tfrac{90016.61}{10} = 9001.661 \;\Rightarrow\; \hat{\sigma} = 94.877 & (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Dakle, opaženi 95% pouzdani interval je:
$23.963 \pm 2.228 \cdot 94.88 \cdot \sqrt{\frac{1}{522.37}} = 23.963 \pm 9.249.$ (1)

(*c*) Budući da se nula ne nalazi u 95% poudanom intervalu za α, odbacujemo nulhipotezu $H_0 : \alpha = 0$ u odnosu na dvostranu alternativu uz razinu značajnosti od 5%. (2)

(*d*) Procjena za $\mathbb{E}[Y|50]$: $\hat{\mathbb{E}}[Y|50] = 23.963 \cdot 50 + 203.97 = 1402.10.$ (1)
95% pouzdani interval: $\hat{\mathbb{E}}[Y|50] \pm t_{0.025}(10)\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{(50-\bar{x})^2}{S_{xx}}}$. (1)
Opaženi 95% pouzdani interval: 1402.10 ± 88.77. (1)

(e) Model je

$$Y_i = \alpha x_i + \beta + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdje su α, β parametri modela, a ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, su slučajne varijable (slučajne greške) (1)
za koje smo pretpostavili da su:

(i) centrirane ($\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ za sve i) $(\frac{1}{2})$

(ii) jednake varijance ($\mathbb{V}\mathrm{ar}[\varepsilon_i] = \sigma^2$ za sve i) $(\frac{1}{2})$

(iii) nekorelirane ($\mathrm{cov}[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0$ za sve $i \neq j$) $(\frac{1}{2})$

(iv) normalno distribuirane. $(\frac{1}{2})$

(20)