Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

VJEROJATNOST I MATEMATIČKA STATISTIKA

8. 9. 2003.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 100
Broj zadataka: 6
Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.
Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica, vlastitih formula ili *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

---

1. Portfelj se sastoji od 2000 istovrsnih polica osiguranja. Poznato je da se šteta po jednoj polici pojavljuje s vjerojatnosti 0.015 neovisno o ostalim policama. Po jednoj polici osiguranja moguća je najviše jedna šteta. Izračunajte (približno) vjerojatnost da će po tom portfelju biti više od 40 šteta.

(15 bodova)

2. Neka je X binomna slučajna varijabla s parametrima (n, θ).

(a) Pokažite da je funkcija izvodnica vjerojatnosti od X jednaka $G_X(t) = (1 - \theta + t\theta)^n$. (7 bodova)

(b) Izvedite pripadnu funkciju izvodnicu momenata. (8 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Iznos šteta po određenoj vrsti polica osiguranja modelira se kao slučajne varijabla s Γ-distribucijom $\Gamma(\alpha = 4, 1/\lambda)$. Dakle, gustoća te varijable

$$f(x|\lambda) = \frac{1}{6}\lambda^4 x^3 e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

ovisi o (jednom) nepoznatom parametru λ ($\lambda > 0$). Na slučajan način odabran je uzorak od $n = 10000$ polica te vrste. Za opažene iznose šteta u tom uzorku vrijedi $\bar{x} = 242$ kn.

(a) Procijenite λ metodom maksimalne vjerodostojnosti. (10 bodova)

(b) Procijenite (aproksimativan) 95% pouzdan interval za λ. (10 bodova)

(ukupno 20 bodova)

4. Broj šteta koje obradi zaposlenik jednog osiguravajućeg društva tijekom radnoga dana modelira se kao Poissonova slučajna varijabla X s očekivanjem 10. Vrijeme (u minutama) koje je zaposleniku potrebno da obradi x šteta je slučajna varijabla Y za čiju uvjetnu distribciju, uz uvjet $X = x$, vrijedi:

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = 15x + 20, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y|X = x] = x + 12.$$

Izračunajte:

(a) očekivano vrijeme koje zaposlenik utroši dnevno na obradu šteta, tj. $\mathbb{E}[Y]$; (7 bodova)

(b) varijancu utrošenog vremena na dnevnu obradu šteta, tj. $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y]$. (8 bodova)

(ukupno 15 bodova)

5. Štete se mogu klasificirati na *jednostavne*, *standardne* i *složene*. Prošle je godine među svim štetama bilo 18.4% jednostavnih, 70.3% standardnih i 11.3% složenih. U slučajnom uzorku od 120 ovogodišnih šteta opaženo je 15 jednostavnih, 87 standardnih i 18 složenih šteta. Pomoću χ^2-testa testirajte da li se raspodjela ovogodišnjih šteta značajno razlikuje od razdiobe prošlogodišnjih šteta. (15 bodova)

6. Na slučajan način odabrano je tridesetoro zaposlenika jednog poduzeća. Zatim su na slučajan način ti zaposlenici raspoređeni u tri jednake grupe. Prva grupa je pohađala tečaj A, druga tečaj B, a treća je bila kontrolna skupina, dakle nije pohađala nikakav tečaj. Oba tečaja su osposobljavala za isti radni proces. Nakon završetka oba tečaja zaposlenici svih skupina podvrgnuti su istovrsnim testovima. Tijekom tog procesa iz raznih razloga troje zaposlenika je odustalo od projekta. Ukupan uspjeh izražen je brojem bodova od 0 do 100 i prikazan je u tablici:

skupina (i)											$\bar{x}_i$	s_i^2
kontrola	55	74	64	62	37	78	50	44	–	–	58.0	202.571
A	63	79	60	75	89	58	75	72	84	69	72.4	103.156
B	64	55	57	73	51	60	62	78	68	–	63.1	75.611

(a) Pomoću usporednih linijskih dijagrama grafički usporedite opažene podatke (po skupinama). (3 boda)

(b) Ispišite ANOVA tablicu i sprovedite test nulhipoteze da nema razlike u distribuciji rezultata testa između tri navedena skupine. Komentirajte. (17 bodova)

(ukupno 20 bodova)

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

VJEROJATNOST I MATEMATIČKA STATISTIKA

8. 9. 2003.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Neka je X ukupanj broj šteta u portfelju. Tada X ima binomnu razdiobu s parametrima $n = 2000$ i $\theta = 0.015$. (4)
Vjerojatnost da će biti više od 40 šteta:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X > 40) = && (3)\\
= \ & \mathbb{P}(X > 40.5) = \quad \text{(korekcija zbog neprekidnosti)} && (2)\\
= \ & \mathbb{P}\left(\tfrac{X-30}{\sqrt{29.55}} > \tfrac{10.5}{\sqrt{29.55}} = 1.93\right) = && (2)\\
\approx \ & 1 - \Phi(1.93) = \quad \text{(CGT)} && (2)\\
= \ & 1 - 0.973 = \quad \text{(tablice)} && (1)\\
= \ & 0.027. && (1)
\end{aligned}
$$

(15)

2. (*a*) Funkcija izvodnica vjerojatnosti od X:

$$
\begin{aligned}
& G_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = && (3)\\
= \ & \textstyle\sum_{k=0}^{n} t^k \cdot \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k} && (2)\\
= \ & \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t\theta)^k (1-\theta)^{n-k} = \text{(binomni teorem)} = (1 - \theta + t\theta)^n. && (2)
\end{aligned}
$$

(*b*) Funkcija izvodnica momenata od X:

$$
\begin{aligned}
& M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = && (3)\\
= \ & G_X(e^t) = && (3)\\
= \ & (1 - \theta + \theta \cdot e^t)^n \quad \text{(prema}(a)\text{)}. && (2)
\end{aligned}
$$

(15)

3. (*a*) Log-vjerodostojnost od λ i račun pripadnog MLE-a:

$$\ell(\lambda) = 4n\log\lambda - \lambda n\bar{x} + 3\sum_{i=1}^{n}\log x_i - n\log 6 \qquad (3)$$
$$\ell'(\lambda) = \tfrac{4n}{\lambda} - n\bar{x} = 0 \qquad (2)$$
$$\Leftrightarrow \quad \hat{\lambda} = \tfrac{4}{\bar{x}} = \tfrac{4}{242} = 0.0165. \qquad (2+2)$$

(*b*) Budući da je za veliki uzorak

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &\overset{\sim}{\cdot} N(\lambda, \tfrac{1}{-\mathbb{E}[\ell''(\lambda|\underline{X})]}) \equiv & (3)\\ &\equiv N(\lambda, \tfrac{\lambda^2}{4n}) \text{ jer je } \ell''(\lambda|\underline{X}) = -\tfrac{4n}{\lambda^2} = \mathbb{E}[\ell''(\lambda|\underline{X})], & (3) \end{aligned}$$

aproksimativni 95% p.i. za λ je

$$\hat{\lambda} \pm 1.96 \cdot \frac{\lambda}{2\sqrt{n}} \equiv 0.01653 \pm 0.00016. \qquad (3+1)$$

(20)

Napomena: (*b*) dio zadatka se može riješiti direktnom primjenom CGT-a. U tom slučaju treba izračunati (direktno ili primjenom formula iz tablica) očekivanje i varijancu iznosa šteta. Dobije se isti aproksimativni p.i.

4. $\mathbb{E}[X] = 10$, $\mathbb{V}\text{ar}[X] = 10$ (2+2)

(*a*) Očekivanje od Y:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = & (2)\\ &= \mathbb{E}[15X + 20] = 15 \cdot \mathbb{E}[X] + 20 = & (2)\\ &= 170. & (1) \end{aligned}$$

(*b*) Varijanca od Y:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[Y] &= \mathbb{E}[\mathbb{V}\text{ar}[Y|X]] + \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}[Y|X]] = & (3)\\ &= \mathbb{E}[X + 12] + \mathbb{V}\text{ar}[15X + 20] = \mathbb{E}[X] + 12 + 15^2\,\mathbb{V}\text{ar}[X] = & (2)\\ &= 22 + 2250 = 2272. & (1) \end{aligned}$$

(15)

5. X = kategorija kojoj pripada (slučajno odabrana) ovogodišnja šteta.
Želimo testirati nulhipotezu da je razdiba od X (dakle, ovogodišnjih šteta) jednaka razdobi prošlogodišnjih šteta:

$$H_0: \quad X \sim \begin{pmatrix} \text{jednostavna} & \text{standardna} & \text{složena} \\ 0.184 & 0.703 & 0.113 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Tablica:

razred	f_i	e_i	$(f_i - e_i)^2/e_i$
jednostavna	15	22.08	2.2702
standardna	87	84.36	0.0826
složena	17	13.56	1.4538
Σ	125	125.00	3.8066

(3)

Broj stupnjeva slobode: $3 - 0 - 1 = 2$ (2)

Testna statistika: $H \overset{H_0}{\sim} \chi^2(2)$ (2)

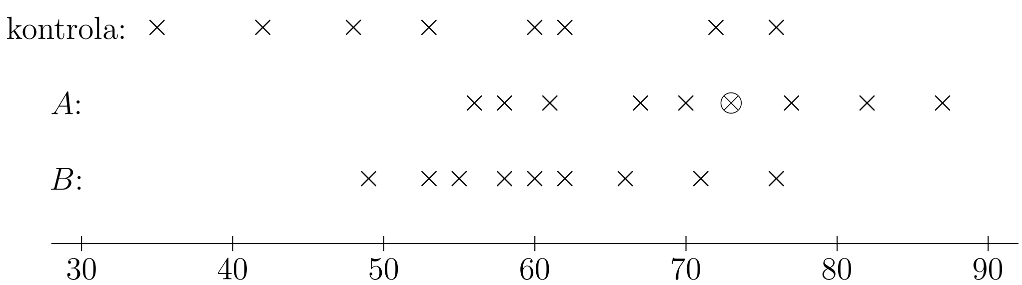
Opažena vrijednost od H: $h = 3.807$. (2)

p-vrijednost: $\mathbb{P}(H > 3.807 | H_0) = 0.149$. (2)

Nemamo dokaza u korist odbacivanja H_0, dakle, razdioba opažanih ovogodišnjih šteta se ne razlikuje značajno od razdiobe prošlogodišnjih šteta. (2)

(15)

6. (*a*) Usporedni linijski dijagrami: (3)



(*b*) Statistike:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \tfrac{n_c\bar{x}_c+n_A\bar{x}_A+n_B\bar{x}_B}{n} = && (1)\\
&= \tfrac{8\cdot 58.0+10\cdot 72.4+9\cdot 63.1}{27} = 65.037 && (1)\\
\text{SSE} &= (n_c-1)s_c^2+(n_A-1)s_A^2+(n_B-1)s_B^2 = && (1)\\
&= 7\cdot 202.571+9\cdot 103.156+8\cdot 75.611 = 2951.29 && (1)\\
\text{MSE} &= \tfrac{\text{SSE}}{n-k} = && (1)\\
&= \tfrac{2951.29}{27-3} = 122.97 && (1)\\
\text{SST} &= n_c(\bar{x}_c-\bar{x})^2+n_A(\bar{x}_A-\bar{x})^2+n_B(\bar{x}_B-\bar{x})^2 = && (1)\\
&= 971.674 && (1)\\
\text{MST} &= \tfrac{\text{SST}}{k-1} = && (1)\\
&= \tfrac{971.674}{2} = 485.837 && (1)\\
f &= \tfrac{\text{MST}}{\text{MSE}} = && (1)\\
&= \tfrac{485.837}{122.97} = 3.95085 && (1)
\end{aligned}
$$

ANOVA-tablica:

izvor varijabilnosti	stupnjevi slobode	sume kvadrata	srednji kvadrati	testna statist.
skupina	2	971.67	485.84	3.95
greške	24	2951.29	122.97	—
ukupno	26	3922.96	—	—

Neka je sa μ_i označena srednja populacijska vrijednost rezultata testa za skupinu i.
Za test nulhipoteze $H_0 : \mu_c = \mu_A = \mu_B$, (1)
testna statistika je: $F = \frac{\text{MST}}{\text{MSE}} \overset{H_0}{\sim} F(2, 24)$. (1)
p-vrijednost: $\mathbb{P}(F > 3.95 | H_0) = 0.033$. (1)
Dakle, ima značajne razlike u distribuciji rezultata testa između tri opažane skupine. (2)

(20)