

29. 6. 2009.

1. Neka su  $X$  i  $Y$  nezavisne eksponencijalno distribuirane slučajne varijable:  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  i  $Y \sim \text{Exp}(\eta)$ , te neka je  $Z := X - Y$ .

(a) Nađite funkciju izvodnicu momenata (fim) slučajne varijable  $Z$ . (8)

(b) Pomoću fim izračunajte matematičko očekivanje i varijancu od  $Z$ . (7)

(ukupno 15 bodova)

2. Uzet je slučajni uzorak od 20 iznosa šteta iz grupe istovrsnih polica osiguranja. Poznato je da je točno 5 šteta iz tog opaženog uzorka veće od 200 kn. Neka je  $\theta$  vjerojatnost da iznos štete po jednoj polici bude veća od 200 kn.

(a) Metodom maksimalne vjerodostojnosti procijenite parametar  $\theta$ . (6)

(b) Pretpostavimo da se iznosi šteta navedenih polica mogu modelirati kao normalne slučajne varijable nepoznatog očekivanja  $\mu$  i poznate standardne devijacije od 20 kn. Prikažite  $\theta$  kao funkciju od  $\mu$  i procijenite  $\mu$  metodom maksimalne vjerodostojnosti. (9)

(ukupno 15 bodova)

3. Štete se mogu klasificirati na *jednostavne*, *standardne* i *složene*. Prošle je godine među svim štetama bilo 18.4% jednostavnih, 70.3% standardnih i 11.3% složenih. U slučajnom uzorku od 120 ovogodišnjih šteta opaženo je 15 jednostavnih, 87 standardnih i 18 složenih šteta. Pomoću  $\chi^2$ -testa testirajte da li se raspodjela ovogodišnjih šteta značajno razlikuje od razdiobe prošlogodišnjih šteta. (15 bodova)

4. Zajednička razdioba diskretnih slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$  zadana je tablično:

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0.01	0.03	0.05	0.02
1	0.10	0.12	0.15	0.08
2	0.05	0.16	0.20	0.03

Izračunajte:  $\mathbb{E}[Y|X = 0]$  i  $\text{Var}[Y|X = 0]$ . (15 bodova)

5. Agencija za istraživanje tržišta sprovela je 2007. g. sljedeće istraživanje. Na slučajan način odabrano je 400 kućanstava iz jednog velikog grada. U tom uzorku opaženo je točno 68 kućanstava u kojima je barem jedan član učlanjen u neki *health/fitness* klub.

(a) Na osnovi opaženog uzorka procijenite 95% pouzdani interval za parametar proporcije onih kućanstava u populaciji kućanstava tog grada za koje vrijedi da je barem jedan njihov član učlanjen u neki *health/fitness* klub. (5)

(b) Ista agencija je 2008. g. sprovela slično istraživanje na slučajnom uzorku iste veličine (400). Tada je opaženo točno 80 kućanstava u kojima je barem jedan član učlanjen u neki *health/fitness* klub. Sprovedite prikladni jednostrani test hipoteze da je proporcija kućanstava sa opažanim svojstvom u populaciji kućanstava istoga (promatranog) grada porasla od 2007. do 2008. g. Procijenite  $p$ -vrijednost i na osnovi nje izvedite zaključak. (10)

(ukupno 15 bodova)

6. U tablici se nalaze sumarni podaci dobiveni mjerenjem mase bezmasnog tkiva (varijabla  $x$  u kg) i metaboličke brzine (varijabla  $Y$ ) dvanaest na slučajan način odabranih žena. Pretpostavlja se da je metabolička brzina ovisna o masi bezmasnog tkiva.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} x_i &= 516.4, & \sum_{i=1}^{12} x_i^2 &= 22741.34, & \sum_{i=1}^{12} x_i y_i &= 650264.8 \\ \sum_{i=1}^{12} y_i &= 14821, & \sum_{i=1}^{12} y_i^2 &= 18695125. \end{aligned}$$

(a) Uz pretpostavku da je model za vezu varijabli poticaja  $x$  i odziva  $Y$  jednostavni linearni regresijski model, procijenite pravac regresije. (7)

(b) Konstruirajte i procijenite 95%-pouzdan interval za koeficijent smjera regresijskog pravca. (7)

(c) Testirajte nulhipotezu da je koeficijent smjera jednak nuli u odnosu na alternativu da to nije tako, uz razinu značajnosti od 5%. Izvedite odgovarajući zaključak o značajnosti linearne veze između  $x$  i  $Y$ . (3)

(d) Konstruirajte i procijenite 95%-pouzdan interval za očekivanu (srednju) vrijednost metaboličke brzine žena kojima je masa bezmasnog tkiva jednaka 50 kg. (4)

(e) Navedite koje ste sve pretpostavke na linearni regresijski model koristili u zadacima (a – d). (4 boda)

(ukupno 25 bodova)