

19. 4. 2010.

-
1. Neka su X i Y nezavisne χ^2 - distribuirane slučajne varijable: $X \sim \chi^2(m)$ i $Y \sim \chi^2(n)$, te neka je $Z := X + Y$.
- (a) Pomoću funkcije izvodnice momenata (fim) pokažite: $Z \sim \chi^2(m + n)$. (8)
- (b) Koristeći fim od Z izračunajte treći moment od Z . (7)
2. Pretpostavimo da se za skupinu polica osiguranja broj šteta po svakoj od polica može modelirati kao Poissonov proces s istim intenzitetom od λ šteta godišnje, te da su ti procesi nezavisni. Poznato je da je po 1500 polica iz te skupine ukupan broj šteta tijekom prošle godine bio jednak 183.
- (a) Metodom maksimalne vjerodostojnosti procijenite parametar λ . (5)
- (b) Procijenite vjerojatnost da po 10 (točno određenih) polica iz te skupine tijekom sljedećih šest mjeseci neće biti šteta. (5)
- (c) Procijenite vjerojatnost da će po 250 (točno određenih) polica iz te skupine tijekom sljedeće godine ukupno biti više od 40 šteta. (5)
3. Broj odlazaka aktuara s posla nakon redovnog radnog vremena tijekom radnog tjedna modelira se kao binomna slučajna varijabla X s parametrima (n, θ) gdje je $n = 5$, a $\theta = \frac{4}{5}$. Za uvjetnu razdiobu ukupnog vremena Y koje je aktuar proveo na poslu tijekom tjedna (u satima) ako je taj tjedan morao na poslu ostati dulje x dana, vrijedi: $\mathbb{E}[Y|X = x] = 4(x + 10)$, $\text{Var}[Y|X = x] = x$.
- (a) Koliko iznosi matematičko očekivanje $\mathbb{E}[Y]$ ukupnog vremena koje aktuar provodi na poslu tijekom tjedna? (7)
- (b) Izračunajte bezuvjetnu varijancu od Y (tj. varijancu $\text{Var}[Y]$ marginalne razdiobe od Y). (8)
4. Štete se mogu klasificirati na *jednostavne*, *standardne* i *složene*. Prošle je godine među svim štetama bilo 18.4% jednostavnih, 70.3% standardnih i 11.3% složenih. U slučajnom uzorku od 120 ovogodišnjih šteta opaženo je 15 jednostavnih, 87 standardnih i 18 složenih šteta. Pomoću χ^2 -testa testirajte da li se raspodjela ovogodišnjih šteta značajno razlikuje od razdiobe prošlogodišnjih šteta. (15)

5. U tablici se nalaze podaci dobiveni mjerenjem stupnja zagađenja u 20 na slučajan način odabranih područja oko industrijskih zona. Zagađenje se mjerilo prije ugradnje pročistača (X) i godinu dana nakon ugradnje i puštanja počistača u pogon (Y).

područje	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	76	78	76	78	84	79	79	81	85	76
Y	74	74	76	79	83	76	76	81	84	76
područje	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	78	79	75	83	87	80	78	77	81	77
Y	81	77	74	83	89	78	77	72	79	78

- (a) Izračunajte razliku u stupnju zagađenja $X - Y$ za svako područje, zatim tako dobivene podatke prikažite grafički pomoću dijagrama točaka i (na osnovi dijagrama) komentirajte oblik distribucije podataka. (5)
- (b) Izračunajte 95% pouzdan interval za parametar razlike srednjih vrijednosti (očekivanja) od X i Y . (8)
- (c) Sprovedite odgovarajući test da li se ugradnjom počistača smanjio stupanj zagađenja. (5)
- (b) Uzimajući u obzir zaključak iz (a) dijela zadatka, komentirajte opravdanost primijenjenog testa u (c) i pouzdanog intervala u (b). (2)
6. Za zadanih 12 vrijednosti x_1, x_2, \dots, x_{12} varijable poticaja x izmjerene su pripadne vrijednosti y_1, y_2, \dots, y_{12} varijable odziva Y . Na taj način dobiven je uzorak (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 12$ za koji vrijedi: $\sum_{i=1}^{12} x_i = 516.4$, $\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 22741.34$, $\sum_{i=1}^{12} y_i = 14821$, $\sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 18695125$ i $\sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 650264.8$.
- (a) Uz pretpostavku da je model za vezu između x i Y jednostavni linearni regresijski model, procijenite pravac regresije. (7)
- (b) Konstruirajte i procijenite 95%-pouzdan interval za koeficijent smjera regresijskog pravca. (5)
- (c) Testirajte nulhipotezu da je koeficijent smjera jednak nuli u odnosu na alternativu da to nije tako, uz razinu značajnosti od 5%. (3)
- (d) Konstruirajte i procijenite 95%-pouzdan interval za očekivanu (srednju) vrijednost varijable Y ako je $x = 50$. (2)
- (e) Opišite linearni regresijski model i navedite koje ste sve pretpostavke na njega koristili u zadacima (a – d). (3)