

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski sveučilišni specijalistički studij
aktuarske matematike

ISPIT

VJEROJATNOST I MATEMATIČKA STATISTIKA

5. 5. 2008.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta

Ukupan broj bodova: 100

Broj zadataka: 6

Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.

Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.

Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica, vlastitih formula ili *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

1. Neka je X normalno distribuirana slučajna varijabla s parametrima matematičkog očekivanja μ i varijance σ^2 . Pomoću funkcije izvodnice momenta izračunajte drugi, treći i četvrti moment (oko nule) od X . (15 bodova)

2. Uzet je slučajni uzorak od 20 iznosa šteta iz grupe istovrsnih polica osiguranja. Poznato je da je točno 5 šteta iz tog opaženog uzorka veće od 200 kn. Neka je θ vjerojatnost da iznos štete po jednoj polici bude veća od 200 kn.
 - (a) Metodom maksimalne vjerodostojnosti procijenite parametar θ . (6 bodova)

 - (b) Pretpostavimo da se iznosi šteta navedenih polica mogu modelirati kao normalne slučajne varijable nepoznatog očekivanja μ i poznate standardne devijacije od 20 kn. Prikažite θ kao funkciju od μ i procijenite μ metodom maksimalne vjerodostojnosti. (9 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Sto osiguranika na slučajan način odabranih iz grupe osiguranika od autoodgovornosti klasificirano je obzirom na dva klasifikacijska kriterija (nominalnih obilježja): dobnu grupu (grupe I i II), te grupu automobila po klasi (klase A i B). Podaci se nalaze u tablici:

klasa \ dob	I	II	Σ
A	22	28	50
B	28	22	50
Σ	50	50	100

Sprovedite test nezavisnosti navedenih obilježja. Procijenite p -vrijednost i izvedite odgovarajući zaključak. (15 bodova)

4. U svrhu usporedbe iznosa premija istovrsnih osiguranja koje naplaćuju dva osiguravajuća društva, koristi se t -test uz pretpostavku da su iznosi premija u oba društva normalno distribuirani s jednakim populacijskim varijancama. Duljine uzetih uzoraka s pripadajućim uzoračkim varijancama su:

$$n_1 = 25, \quad s_1^2 = 139.7 \quad \text{i} \quad n_2 = 30, \quad s_2^2 = 76.6.$$

Sprovedite dvostrani test hipoteze o jednakim populacijskim varijancama (uz pretpostavku normalnosti iznosa premija u obje populacije) na razioni značajnosti od 10%. (15 bodova)

5. Za neprekidne slučajne varijable X i Y definirane na istom vjerojatnosnom prostoru poznate su uvjetna gustoća od X uz dano $Y = y$ i marginalna gustoća od Y :

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{1-y}, & \text{za } 0 < x < 1-y \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{za } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Izračunajte: $\mathbb{E}[X|Y = y]$, $\text{Var}[X|Y = y]$ i $\text{Var}[X]$. (15 bodova)

6. Za svaku od zadanih 4 vrijednosti osiguranih svota x_i (varijabla poticaja x), nezavisno se mjere iznosi šteta y_{ij} (varijabla odziva Y) po 4 nezavisne police ($i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$). Rezultati su navedeni u tablici. Svi iznosi su izraženi u jedinicama od 10000 kn.

x_i	y_{ij}	$\sum_{j=1}^4 y_{ij}$	$\sum_{j=1}^4 y_{ij}^2$
1	0.11, 0.46, 0.71, 1.45	2.73	2.8303
2	0.52, 1.43, 1.84, 2.47	6.26	11.8018
3	1.48, 2.05, 2.38, 3.31	9.22	23.0134
4	1.52, 2.36, 2.95, 4.08	10.91	33.2289

- (a) Uz pretpostavku da je model za vezu varijabli poticaja x i odziva Y jednostavni linearni regresijski model:

$$Y_{ij} = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4,$$

procijenite pravac regresije.

(7 bodova)

- (b) Konstruirajte i procijenite 95%-pouzdan interval za koeficijent smjera regresijskog pravca. (7 bodova)
- (c) Testirajte nulhipotezu da je koeficijent smjera jednak nuli u odnosu na alternativu da to nije tako, uz razinu značajnosti od 5%. Izvedite odgovarajući zaključak o značajnosti linearne veze između x i Y . (3 boda)
- (d) Konstruirajte i procijenite 95%-pouzdan interval za iznos novonastale štete po polici kojoj je osigurana svota 2. (4 boda)
- (e) Navedite koje ste sve pretpostavke na linearni regresijski model koristili u zadacima (a – d). (4 boda)

(ukupno 25 bodova)