

3. 11. 2008.

1. Neka su X i Y nezavisne eksponencijalno distribuirane slučajne varijable: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ i $Y \sim \text{Exp}(\eta)$, te neka je $Z := X - Y$.

(a) Nađite funkciju izvodnicu momenata (fim) slučajne varijable Z . (8)

(b) Pomoću fim izračunajte matematičko očekivanje i varijancu od Z . (7)

(ukupno 15 bodova)

2. Po određenoj polici osiguranja poznato je da je očekivana (srednja) vrijednost iznosa štete 237 kn, a da im je standardna devijacija 202 kn. U portfelju se nalazi 200 nezavisnih takvih polica. Kolika je vjerojatnost da će ukupan iznos šteta po tom portfelju premašiti 50000 kn? (15 bodova)

3. Podaci o opaženim brojevima šteta po 4000 polica osiguranja koje su bile pod rizikom točno godinu dana, prikazani su u frekvencijskoj tablici:

broj šteta i	frekvencija f_i
0	3288
1	642
2	66
≥ 3	4
ukupno	4000

Redak u tablici označen sa " ≥ 3 " odnosi se na police po kojima je bilo 3 i više šteta. Pretpostavlja se da se slučajan broj šteta X po polici osiguranja ponaša po Poissonovom zakonu razdiobe $P(\lambda)$, pri čemu je parametar λ nepoznat.

(a) Odredite vjerodostojnost parametra λ na osnovi navedenog uzorka. (5)

(b) Provjerite da je $\hat{\lambda} = 0.196551$ procjena od λ maksimalne vjerodostojnosti na osnovi navedenog uzorka. (6)

(c) Sprovedite χ^2 -test prilagodbe Poissonovog modela navedenim podacima. Procijenite p -vrijednost i na osnovi nje ocijenite prihvatljivost nul-hipoteze. (9)

(ukupno 20 bodova)

4. Osiguravajuća društva (OD) A i B žele usporediti iznose svojih premija po istovrsnim policama osiguranja. Duljine uzetih slučajnih uzoraka, te pripadajuće opažene vrijednosti aritmetičkih sredina i uzoračkih varijanci su:

$$n_1 = 10, \quad \bar{x}_1 = 32.38, \quad s_1^2 = 143.14 \quad \text{i} \quad n_2 = 8, \quad \bar{x}_2 = 24.46, \quad s_2^2 = 74.48.$$

Testirajte je li parametar srednje vrijednosti iznosa premija OD A veći od istog tog parametra, ali za OD B (uz pretpostavku normalnosti iznosa premija u obje populacije i jednakost populacijskih varijanci). Postavite odgovarajuće nul i alternativnu hipotezu i izračunajte p -vrijednost. (15 bodova)

5. Zajednička razdioba diskretnih slučajnih varijabli X i Y zadana je tablično:

$Y \setminus X$	0	1	2	3
0	0.01	0.03	0.05	0.02
1	0.10	0.12	0.15	0.08
2	0.05	0.16	0.20	0.03

Izračunajte: $\mathbb{E}[Y|X = 0]$ i $\text{Var}[Y|X = 0]$. (15 bodova)

6. Za svako od 4 osiguravajućih društava (OD) nezavisno se mjere iznosi po 4 štete y_{ij} ($i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$). Rezultati su navedeni u tablici. Svi iznosi su izraženi u jedinicama od 10000 kn.

i	y_{ij}	$\sum_{j=1}^4 y_{ij}$	$\sum_{j=1}^4 y_{ij}^2$
1	0.11, 0.46, 0.71, 1.45	2.73	2.8303
2	0.52, 1.43, 1.84, 2.47	6.26	11.8018
3	1.48, 2.05, 2.38, 3.31	9.22	23.0134
4	1.52, 2.36, 2.95, 4.08	10.91	33.2289

- (a) Uz pretpostavku da je model za slučajne varijable Y_{ij} iznosa j -te štete u i -tom OD:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4,$$

gdje su ε_{ij} slučajne greške, a μ_i parametar očekivanja iznosa šteta u OD i , procijenite μ_i i pripadne 95% pouzdane intervale, te ih skicirajte na jednom grafu. (6)

- (b) Odredite pripadajuću ANOVA-tablicu. (6)

- (c) Testirajte nulhipotezu da su sve svi parametri μ_i , $i = 1, \dots, 4$, jednaki. Procijenite p -vrijednost. (6)

- (d) Uz koje pretpostavke na slučajne greške je test u (c) egzaktn? (2)

(ukupno 20 bodova)