PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

26. 6. 2006.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 60
Broj zadataka: 6
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

1. Pojavljivanje šteta u nekom portfelju modelira se pomoću Poissonovog procesa $\{N(t) : t \geq 0\}$ s intenzitetom $\lambda > 0$. Pretpostavlja se da su sve štete iznosa 1. To znači da je ukupna šteta do trenutka $t \geq 0$ jednaka broju dospjelih šteta $N(t)$. Premije za taj portfelj prikupljaju se po stopi $c > 0$ po jedinici vremena. Početni kapital portfelja jednak je $u \in (0, 1000)$.

(a) Objasnite da slučajni proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ definiran s $X(t) = u + ct - N(t)$ modelira kapital tog portfelja u trenutku $t \geq 0$. [1]

(b) Neka je $\{\mathcal{F}(t) : t \geq 0\}$ prirodna filtracija Poissonovog procesa $\{N(t) : t \geq 0\}$. Pokažite da je

$$\mathbb{E}[X(t+s) \,|\, \mathcal{F}(t)] = X(t) + (c - \lambda)s\,.$$

[3]

(c) Odredite premijsku stopu c tako da $\{X(t) : t \geq 0\}$ bude martingal. [2]

(d) Navedite teorem o opcionalnom zaustavljanju. [2]

(e) Neka je c premijska stopa takva da je $\{X(t) : t \geq 0\}$ martingal. Označimo sa $T_0 = \min\{t \geq 0 : X(t) < 0\}$ vrijeme propasti, to jest, prvo vrijeme kad kapital portfelja postane negativan. Neka je $T_{1000} = \min\{t \geq 0 : X(t) = 1000\}$ prvo vrijeme kad kapital dostigne iznos 1000. Nadalje, neka je $S = \min(T_0, T_{1000})$ manje od ta dva vremena. Upotrebom teorema o opcionalnom zaustavljanju pokažite da je $\mathbb{E}[X(S)] = u$. Pomoću toga zaključite, u slučaju da je početni kapital $u = 250$, da je vjerojatnost da se propast dogodi prije nego što kapital portfelja dostigne iznos 1000 približno jednaka 0.75. [2]

[Ukupno 10 bodova]

2. Osiguratelj motornih vozila radi po sustavu bonusa s pet nivoa. Postotak osnovne premije koju plaća osiguratelj na svakom nivou je kako slijedi:

Nivo	*% naplaćene premije*
1	100
2	90
3	80
4	70
5	60

Osiguranici se kreću po nivoima ovisno o broju šteta u protekloj godini. Za svakog osiguranika, broj godišnjih šteta ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem 0.4.
Pravila kretanja između nivoa su kako slijedi:

- ako nije bilo štete tokom protekle godine, osiguranik se pomiče na nivo sljedećeg višeg popusta (npr., sa nivoa 2 na nivo 3)
- ako je postojala jedna šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče na nivo sljedećeg nižeg popusta (osim onih koji su bili na nivou 1 na početku godine i koji ostaju na nivou 1)
- ako su postojale dvije ili više šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče dva nivoa prema gore (osim onih koji su bili na nivou 1 na početku godine i koji ostaju na nivou 1, i onih koji su bili na nivou 2 i koji se pomiču na nivo 1)

(a) Odredite prijelaznu matricu za ovaj sustav bonusa (na tri decimale), te nacrtajte graf pripadajućeg Markovljevog lanca. [3]

(b) Osiguranik je na nivou 3 tokom prve godine police. Uz pretpostavku da se polica obnavlja, izračunajte vjerojatnost da će na početku treće godine osiguranik biti ponovno na nivou 3. [2]

(c) Navedite uvjete uz koje vjerojatnost da se osiguranik nalazi u određenom stanju nakon n godina konvergira kada $n \to \infty$ prema nekoj graničnoj vrijednosti nezavisno od početnog stanja, te provjerite da su ti uvjeti zadovoljeni u gornjem primjeru. [2]

(d) Izračunajte granične (asimptotske) vjerojatnosti da će osiguranik biti na nivou najvišeg popusta 5. Možete iskoristiti podatak da je granična vjerojatnost da osiguranik bude na nivou popusta 3 jednaka 0.154. [3]

[Ukupno 10 bodova]

3. Članovi sheme naknade za onesposobljenot klasificirani su kao aktivni (A), privremeno onesposobljeni (P), trajno onesposobljeni (T) ili mrtvi (M). Članovi dobivaju naknadu kada se nalaze u stanjima P ili T. Povijest tipičnog člana modelira se pomoću vremenski neprekidnog Markovljevog lanca sa sljedećim prijelaznim intenzitetima:

$$\begin{array}{lll} A \longrightarrow P: \ 0.15 & P \longrightarrow A: \ 0.25 & T \longrightarrow M: \ 0.4 \\ A \longrightarrow T: \ 0.05 & P \longrightarrow T: \ 0.1 & \\ A \longrightarrow M: \ 0.05 & P \longrightarrow M: \ 0.05 & \end{array}$$

(a) Napišite generatorsku matricu procesa. [2]

(b) Navedite Kolmogorovljeve jednadžbe unatrag. [2]

(c) Izračunajte vjerojatnost da će trenutno trajno nesposoban član sheme nakon tri godine još biti živ. [2]

(d) Izračunajte vjerojatnost da trenutno aktivan član sheme neće nikad dobiti bilo kakvu naknadu. [2]

(e) Izračunajte očekivano vrijeme koje će početno aktivan član sheme provesti u stanju aktivan prije smrti. [2]

[Ukupno 10 bodova]

4. Investitor u trentuku $t = 0$ kupuje dionicu po cijeni 100. Pretpostavlja se da je cijena dionice u trenutku t jednaka $S_t = 100 \exp\{0.2B_t\}$ gdje je $(B_t : t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje.

(a) Nađite vjerojatnost da je nakon 1 godine, $t = 1$, cijena dionice veća od 110. [2]

(b) Nađite vjerojatnost da je unutar prve godine cijena dionice dostigla iznos od 110. [3]

(c) Primjenite Itôvu formulu, te na taj način pokažite da $(S_t : t \geq 0)$ zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu $dS_t = 0.02 S_t \, dt + 0.2 S_t \, dB_t$. [3]

(d) Na osnovu dijela (c), odredite srednju stopu prinosa dionice α i volatilnost dionice σ. [1]

(e) Da li je ulaganje u opisanu dionicu dugoročno isplativo i zašto? [1]

[Ukupno 10 bodova]

5.

(a) Neka je U uniformno distribuirana slučajna varijabla na $(0, 1)$. Nađite distribuciju slučajne varijable $X = -\log(1 - U)/10$. [3]

(b) Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne, eksponencijalno distribuirane slučajne varijable s parametrom λ. Poznato je da tada slučajna varijabla $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ima gama distribuciju $\Gamma(n, \lambda)$. Dana su tri pseudoslučajna broja: 0.381539, 0.443531 i 0.910798. Pomoću njih generirajte pseudoslučajni broj iz gama distribucije s očekivanjem 30 i varijancom 300. [4]

(c) Navedite metode za generiranje pseudoslučajnog broja iz standardne normalne distribucije. [3]

[Ukupno 10 bodova]

6.

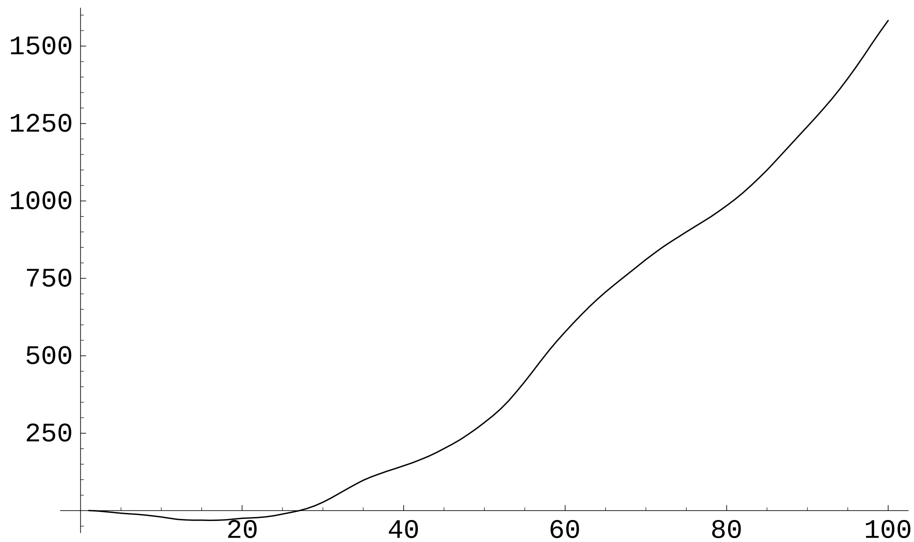
(a) Izvedite autokovarijancu i autokorelacijsku funkciju $AR(1)$ procesa

$$X_t = \alpha X_{t-1} + e_t$$

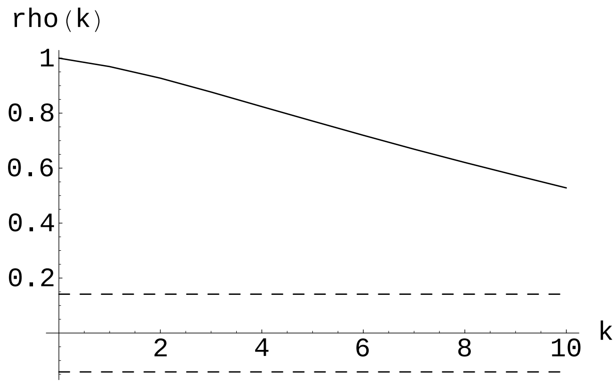
gdje je $|\alpha| < 1$, a (e_t) bijeli šum. [4]

(b) Povijesni podaci vremenskog niza (Z_t) dani su na Slici 1: Pretpostavlja se da je proces (Z_t) koji opisuje taj vremenski niz ARIMA$(1, d, 0)$ proces. Da bi se odredio d vremenski niz (Z_t) diferenciran je j puta, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, i dobiveni nizovi $Z_t^{(j)}$. Grafovi na Slikama 2.-6. pokazuju uzoračke autokorelacijske funkcije nizova $Z_t^{(j)}$. Sugerirajte i objasnite odgovarajuću vrijednost za d i parametar α odgovarajućeg $AR(1)$ procesa. [6]

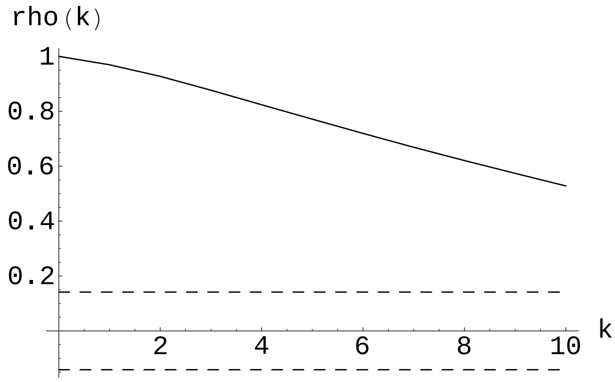
[Ukupno 10 bodova]



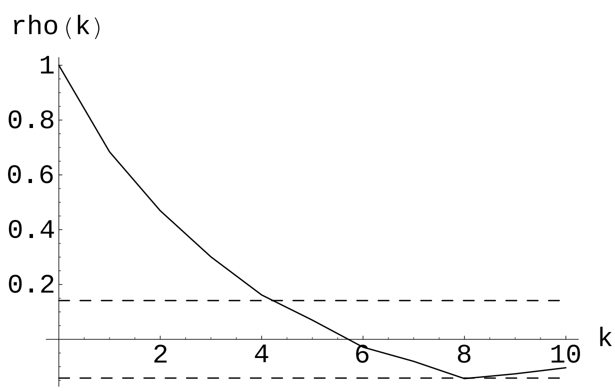
Slika 1: Realizacija niza Z_t



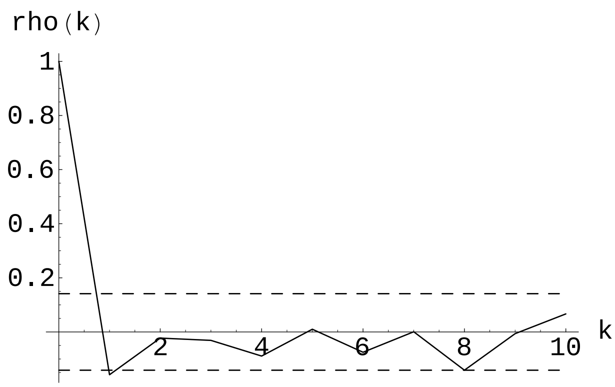
Slika 2: Uzoračka autokorelacijska funkcija niza Z_t



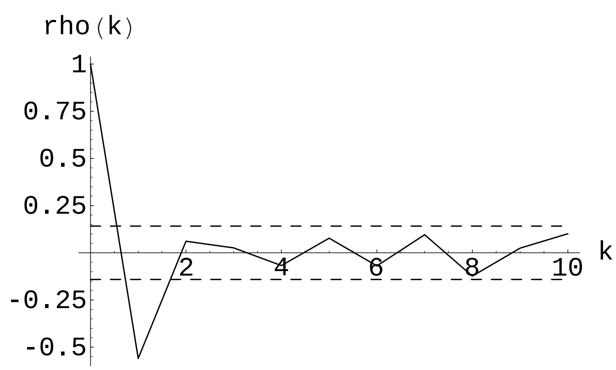
Slika 3: Uzoračka autokorelacijska funkcija niza $Z_t^{(1)}$



Slika 4: Uzoračka autokorelacijska funkcija niza $Z_t^{(2)}$



Slika 5: Uzoračka autokorelacijska funkcija niza $Z_t^{(3)}$



Slika 6: Uzoračka autokorelacijska funkcija niza $Z_t^{(4)}$

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

26. 6. 2006.

Rješenja

1.

(a) Vidi predavanja, Poglavlje 6, str.9.

(b)

$$\mathbb{E}[X(t+s)\,|\,\mathcal{F}(t)] = \mathbb{E}[c(t+s) - N(t+s)\,|\,\mathcal{F}(t)]$$
$$\begin{aligned} &= c(t+s) - \mathbb{E}[N(t+s)\,|\,\mathcal{F}(t)] \\ &= ct + cs - \mathbb{E}[N(t+s) - N(t) + N(t)\,|\,\mathcal{F}(t)] \\ &= ct + cs - \mathbb{E}[N(t+s) - N(t)] - N(t) \\ &= ct - N(t) + cs - \lambda t \\ &= X(t) + (c-\lambda)s \end{aligned}$$

gdje je u trećoj jednakosti korišteno da je $N(t)$ ovisno o $\mathcal{F}(t)$, a $N(t+s) - N(t)$ nezavisno od $\mathcal{F}(t)$.

(c) $\{X(t) : t \geq 0\}$ će biti martingal ako vrijedi $\mathbb{E}[X(t+s)\,|\,\mathcal{F}(t)] = X(t)$. Po (b), to će vrijediti ako je $c = \lambda$.

(d) Vidi predavanja, Poglavlje 2, str.10.

(e) Po teoremu o opcionalnom zaustavljanju $\mathbb{E}[X(S)] = E[X(0)] = u$. Nadalje,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(S)] &= \mathbb{E}[X(T_0), T_0 \leq T_{1000}] + \mathbb{E}[X(T_{1000}), T_{1000} \leq T_0] \\ &= \mathbb{E}[X(T_0), T_0 \leq T_{1000}] + 1000\mathbb{P}(T_{1000} \leq T_0)\,. \end{aligned}$$

Nadalje, budući da su sve štete iznosa 1, vrijedi da je $-1 < X_{T_0} \leq 0$, otkud slijedi

$$-\mathbb{P}(T_0 \leq T_{1000}) \leq \mathbb{E}[X(T_0), T_0 \leq T_{1000}] \leq 0\,.$$

Zbog $\mathbb{E}[X(S)] = 250$, dobivamo nejednakosti

$$-\mathbb{P}(T_0 \leq T_{1000}) + 1000\mathbb{P}(T_{1000} \leq T_0) \leq 250 \leq 1000\mathbb{P}(T_{1000} \leq T_0)\,,$$

te nakon uvrštavanja $\mathbb{P}(T_{1000} \leq T_0) = 1 - \mathbb{P}(T_0 \leq T_{1000})$,

$$-\mathbb{P}(T_0 \leq T_{1000}) + 1000(1 - \mathbb{P}(T_0 \leq T_{1000})) \leq 250 \leq 1000(1 - \mathbb{P}(T_0 \leq T_{1000}))\,.$$

Rješavanjem nejdnadžbe po $\mathbb{P}(T_0 \leq T_{1000})$, slijedi

$$\frac{1000-250}{1000} \leq \mathbb{P}(T_0 \leq T_{1000}) \leq \frac{1000-250}{999}\,,$$

t.j., $0.75 \leq \mathbb{P}(T_0 \leq T_{1000}) \leq 0.75075$

2.

(a) Zbog pretpostavke o Poissonovoj distribuciji, vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 \text{ šteta}) &= e^{-0.4} = 0.670\\ \mathbb{P}(1 \text{ šteta}) &= 0.4e^{-0.4} = 0268\\ \mathbb{P}(\geq 2 \text{ štete}) &= 1 - 0.670 - 0.268 = 0.062\end{aligned}$$

Zato je prijelazna matrica P jednaka

$$\begin{pmatrix} 0.330 & 0.670 & 0 & 0 & 0\\ 0.330 & 0 & 0.670 & 0 & 0\\ 0.062 & 0.268 & 0 & 0.670 & 0\\ 0 & 0.062 & 0.268 & 0 & 0.670\\ 0 & 0 & 0.062 & 0.268 & 0.670 \end{pmatrix}$$

(b) Jedini način da osiguranik na početku treće godine opet bude na nivou tri je da je ili u prvoj ili u drugoj godini imao jednu štetu. Vjerojatnost točno jedne štete unutar dvije godine je $0.670 \times 0.268 + 0.268 \times 0.670 = 0.35912 \approx 0.359$

(c) Dovoljan uvjet za postojanje granične distribucije je da je lanac ireducibilan i periodičan. Ireducibilnost lanca vidi se iz grafa Markovljevog lanca, jer iz svakog stanja postoji niz strelica do svakog drugog stanja. Zbog $p_{11} > 0$, stanje 1 je aperiodičko. Budući da je lanac ireducibilan, sva su stanja aperiodička.

(d) Granične vjerojatnosti su uz gornje pretpostavke jednake stacionarnim vjerojatnostima $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ koje zadovoljavaju sustav $\pi = \pi P$. Taj sustav se zapisuje u obliku:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 0.330\pi_1 + 0.330\pi_2 + 0.062\pi_3\\ \pi_2 &= 0.670\pi_1 + 0.268\pi_3 + 0.062\pi_4\\ \pi_3 &= 0.670\pi_2 + 0.268\pi_4 + 0.062\pi_5\\ \pi_4 &= 0.670\pi_3 + 0.268\pi_5\\ \pi_5 &= 0.670\pi_4 + 0.670\pi_5\end{aligned}$$

Iz zadnje jednadžbe slijedi $\pi_4 = (0.330/0.670)\pi_5$, pa uvrštanjem u predzadnju i korištenjem danog podatke $\pi_3 = 0.154$, dobivamo linearnu jednadžbu za π_5: $0.670 \times 0.154 + 0.268\pi_5 = (0.330/0.670)\pi_5$. Rješavanjem slijedi $\pi_5 = 0.459523 \approx 0.460$.

3.

(a) Generatorska matrica A jednaka je

$$A = \begin{pmatrix} -0.25 & 0.15 & 0.05 & 0.05 \\ 0.25 & -0.4 & 0.10 & 0.05 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Kolmogorovljeve jednadžbe unatrag glase: $P'(t) = AP(t)$.

(c) Budući da je iz stanja T moguć prijelaz samo u stanje M, vjerojatnost da je trajno nesposobna osoba još živa nakon tri godine jednaka je vjerojatnsoti da osoba tokom tri godine nije napustila stanje T. Budući da je vrijeme izlaska iz stanja T eksponencijalno s parametrom 0.4, tražena vjerojatnost jednaka je vjerojatnosti da je $\mathbb{P}(\mathrm{Exp}(0.4) \geq 3) = e^{-0.4\times 3} = 0.301194$.

(d) Trenutno aktivan član neće dobiti naknadu ako nikada ne dođe u stanja P i T. To znači da u trenutku izlaska iz stanja A mora odmah prijeći u stanje M. Vjerojatnost prijelaza iz stanja A u stanje M jednaka je $0.05/0.25 = 0.2$

(e) Označimo sa v to očekivano vrijeme. Ono je jednako očekivanom vremenu do izlaska iz stanja A plus očekivano vrijeme u stanju A nakon povratka u to stanje. Očekivano vrijeme do izlaska iz stanja A jednako je $1/0.25 = 4$ (očekivanje eksponencijalne distribucije s parametrom 0.25). Ako nakon izlaska iz stanja A član prijeđe u jedno od stanja T ili M, više se nikad neće vratiti u A. Jedina mogućnost da se vrati u A je da prijeđe u stanje P. Vjerojatnost tog događaja jednaka je $0.15/0.25 = 3/5$. Član sheme koji se nalazi u stanju P s vjerojatnosti $0.25/0.4 = 5/8$ vratit će se u stanje A. Zbog Markovljevog svojstva, očekivano vrijeme u stanju A nakon povratka jednako je v. Iz ovih razmatranja slijedi jednakost za v:

$$v = 4 + \frac{3}{5}\frac{5}{8}v\,.$$

Rješavanjem dobivmao $v = \frac{32}{5}$.

4.

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_1 > 110] &= \mathbb{P}[\log S_1 > \log 110] = \mathbb{P}[\log 100 + 0.2B_1 > \log 110] \\ &= \mathbb{P}[0.2B_1 > \log \frac{110}{100}] = \mathbb{P}[B_1 > 5\log 1.1] \\ &= \mathbb{P}[N(0,1) > 0.476551] = 0.316841\end{aligned}$$

(b) Traži se $\mathbb{P}[\max_{0\le t\le 1} S_t > 110]$. Uočimo,

$$\max_{0\le t\le 1} S_t = 100\exp\{0.2 \max_{0\le t\le 1} B_t\} = 100\exp\{0.2M_t\}\,,$$

gdje je sa M_t označen maksimum standardnog Brownovog gibanja do trenutka t. Dakle, traži se

$$\mathbb{P}[\max_{0\le t\le 1} S_t > 110] = \mathbb{P}[100\exp\{0.2M_1\} > 110] = \mathbb{P}[M_1 > 5\log 1.1]$$

Po Rezultatu 2, Poglavlje 6, str. 4, zadnja vjerojatnost jednaka je $2\mathbb{P}[B_1 > 5\log 1.1]$ što je po dijelu (a) jednako $2 \times 0.316841 = 0.623682$.

(c) Po Itôvoj formuli

$$df(B_t) = f'(B_t)\,dB(t) + \frac{1}{2}f''(B_t)\,dt\,.$$

Primjenimo formulu za $f(x) = 100e^{0.2x}$. Uz taj odabir funkcije f vrijedi $f(B_t) = S_t$. Očito je $f'(x) = 0.2f(x)$ i $f''(x) = 0.04f(x)$. Slijedi

$$\begin{aligned}dS_t &= df(B_t) = f'(B_t)\,dB(t) + \frac{1}{2}f''(B_t)\,dt \\ &= 0.2f(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}0.04f(B_t)\,dt \\ &= 0.2S_t\,dB(t) + 0.02S_t\,dt\,.\end{aligned}$$

(d) Srednja stopa prinosa jednaka je $\alpha = 0.02$, a volatilnost je $\sigma = 0.2$.

(e) Lagano se može izračunati da je $\mathbb{E}[S_t] = \exp\{0.02t\}$, što znači da očekivana vrijednost dionice ima uzlazni trend. S druge strane, budući da je srednja stopa povrata na dionicu 2% godišnje, uz relativno visoku volatilnost od 20% godišnje, dionica se ne isplati. Drugi argument da se dionica ne isplati je taj da Brownovo gibanje B_t dugoročno oscilira između $-\infty$ i $+\infty$ što ima za posljedicu da S_t oscilira zmeđu 0 i $+\infty$. Specijalno, S_t će dugoročno, s vjerojatnosti 1, doći proizvoljno blizu nule.

5.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X > x] &= \mathbb{P}[-\log(1-U)/10 > x] = \mathbb{P}[\log(1-U) < -10x] \\
&= \mathbb{P}[1-U < \exp(-10x)] = \mathbb{P}[U > 1-\exp(-10x)] \\
&= \exp(-10x)
\end{aligned}$$

Dakle, X ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom 10 (odnosno očekivanjem 1/10).

(b) Gama distribucija $\Gamma(\alpha,\beta)$ ima očekivanje $\alpha\beta$ i varijancu $\alpha\beta^2$. Zato je sustav za α i β dan sa

$$\alpha\beta = 30\,, \quad \alpha\beta^2 = 300\,.$$

Rješavanjem dobivamo $\beta = 10$, te $\alpha = 3$. Budući da je $\Gamma(3,10)$ slučajna varijabla zbroj od tri nezavisne eksponencijalne s parametrom 10, pseudoslučajni broj iz takve distribucije generiramo, korištenjem dijela (a), na sljedeći način:

$$-10(\log(1-0.381539)-\log(1-0.443531)-\log(1-0.910798)) = 34.8352$$

(c) Vidi predavanja, Poglavlje 7, str. 8.

6.

(a) Vrijedi $\gamma(k) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \mathrm{Cov}(\alpha X_{t-1} + e_t, X_{t-k}) = \alpha\gamma(k-1)$. Nadalje, $\gamma(0) = \mathrm{Cov}(X_t, X_t) = \mathrm{Cov}(\alpha X_{t-1} + e_t, \alpha X_{t-1} + e_t) = \alpha^2\mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_{t-1}) + \mathrm{Cov}(e_t, e_t) = \alpha^2\gamma(0) + \sigma^2$. Rješavanjem slijedi

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\,.$$

Iz $\gamma(k) = \alpha\gamma(k-1)$ induktivno slijedi

$$\gamma(k) = \frac{\alpha^k \sigma^2}{1-\alpha^2}\,.$$

Nadalje, budući da je autokorelacijska funkcija $\rho(k)$ definirana s $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$, odmah slijedi $\rho(k) = \alpha^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

(b) ARIMA$(1, d, 0)$ proces nakon diferenciranja d puta postaje $AR(1)$ proces. Po dijelu (a) (ili po rezultatu s predavanja), autokorelacijska funkcija takvog procesa opada geometrijski. Uvidom u grafove uzoračkih autokorelacijskih funkcija, vidljvo je da $(Z_t^{(2)})$ ima autokorelacijsku funkciju koja najviše sliči geometrijski opadajućoj funkciji. Dakle, $d = 2$.

Nadalje, uvidom u graf auotkorelacijske funkcije za $(Z_t^{(2)})$, vidimo da je $\hat{\rho}(1) \approx 0.7$, $\hat{\rho}(1) \approx 0.45$, $\hat{\rho}(1) \approx 0.3$, t.j., $\hat{\rho}(1)/\hat{\rho}(0) \approx 0.7$, $\hat{\rho}(2)/\hat{\rho}(1) \approx 0.45/0.7 = 0.64$, $\hat{\rho}(3)/\hat{\rho}(2) \approx 0.3/0.45 = 0.67$, što sugerira da bi α mogao biti oko 0.65 do 0.7.