PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

17. 11. 2008.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 60
Broj zadataka: 6
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

1. Osiguratelj motornih vozila radi po sustavu bonusa s četiri nivoa. Popust na osnovnu premiju koju plaća osiguratelj na svakom nivou je kako slijedi:

Nivo	*% popusta*
1	0
2	25
3	40
4	60

Osiguranici se kreću po nivoima ovisno o broju šteta u protekloj godini. Za svakog osiguranika, vjerojatnost da nema štete u godini je 0.8, vjerojatnost jedne štete je 0.15, a vjerojatnost dviju ili više šteta je 0.05.
Za osiguranike na nivoima 1, 2, 3 i 4 na početku protekle godine:

- ako nije bilo štete tokom protekle godine, osiguranik se pomiče na sljedeći viši nivo (osim onih koji su bili na nivou 4 na početku godine i koji ostaju na nivou 4)
- ako je postojala jedna šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče na sljedeći niži nivo (osim onih koji su bili na nivou 1 na početku godine i koji ostaju na nivou 1)
- ako su postojale dvije ili više šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče za dva nivoa nadolje (ili sa nivoa 2 na nivo 1, ili ostaje na nivou 1).

(a) Odredite prijelaznu matricu za ovaj sustav bonusa (uz pretpostavku da svi osiguranici obnavaljaju svoje police), te nacrtajte graf pripadajućeg Markovljevog lanca. [3]

(b) Osiguranik je na nivou 2 u tekućoj godini. Izračunajte vjerojatnost da će osiguranik biti na nivou 2 nakon

(i) jedne godine,

(ii) dvije godine.

[2]

(c) Navedite uvjete uz koje vjerojatnost da se osiguranik nalazi u određenom stanju nakon n godina konvergira kada $n \to \infty$ prema nekoj graničnoj vrijednosti nezavisno od početnog stanja, te provjerite da su ti uvjeti zadovoljeni u gornjem primjeru. [2]

(d) Izračunajte granične (asimptotske) vjerojatnosti da će osiguranik biti u stanju 2. [3]

[Ukupno 10 bodova]

2. Iz uzorka od 50 uzastopnih opažanja stacionarnog vremenskog niza izračunata je uzoračka autokorelacijska funkcija $\widehat{\rho}(k)$ i uzoračka parcijalna autokorelacijska funkcija $\widehat{\phi}(k)$ koje su dane u donjoj tablici:

k	$\widehat{\rho}$	$\widehat{\phi}$
1	0.703	0.703
2	0.329	-0.326
3	0.107	0.064
4	0.006	-0.030

Uzoračka varijanca opažanja je $\widehat{\gamma}_0 = 2.524$.

(a) Predložite odgovarajući model, te argumentirajete svoj prijedlog. [3]

(b) Promotrite $AR(1)$ model

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + e_t$$

gdje je (e_t) centriran bijeli šum s varijancom σ^2. Metodom momenata procjenite parametre α_1 i σ koristeći podatke iz danih opažanja. [3]

(c) Promotrite $AR(2)$ model

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + e_t$$

gdje je (e_t) centriran bijeli šum s varijancom σ^2. Metodom momenata procjenite parametre α_1, α_2 i σ koristeći podatke iz danih opažanja. [4]

[Ukupno 10 bodova]

3. Pružatelj internet usluga (*internet provider*) modelira kapacitet svoje mreže. Pretpostavlja da ako korisnik nije trenutno (trenutak t) spojen na internet ("offline"), vjerojatnost da se spoji u kratkom vremenskom intervalu $[t, t+dt]$ jednaka je $0.2\,dt + o(dt)$. Ako je korisnik spojen na internet ("online"), tada je vjerojatnost isključenja s mreže u kratkom vremenskom intervalu $[t, t+dt]$ jednaka je $0.8\,dt + o(dt)$.
Vjerojatnosti da je korisnik online, odnosno offline, u trenutku t označene su sa $P_{\mathrm{ON}}(t)$, odnosno $P_{\mathrm{OFF}}(t)$.

(a) Objasnite zašto se status (online, odn. offline) pojedinog korisnika može smatrati Markovljevim lancom s neprekidnim vremenom. [2]

(b) Navedite Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed za $P_{\mathrm{OFF,OFF}}(t)$, vjerojatnost da je korisnik offline u trenutku t, ako je bio offline u trenutku 0. [2]

(c) Rješavanjem jednadžbe iz dijela (b), izračunajte formulu za vjerojatnost da je korisnik offline u trenutku t, ako je bio offline u trenutku 0. [3]

(d) Izračunajte očekivano vrijeme provedeno online kroz razdoblje $[0, t]$, ako je korisnik bio offline u trenutku $t = 0$. [3]

[Ukupno 10 bodova]

4.

(a) Navedite Itôvu lemu. [3]

(b) Vasicekov model za kratkoročnu kamatnu stopu $(r(t) : t \geq 0)$ dan je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dr(t) = a(b - r(t))\, dt + \sigma\, dW(t)\,,$$

gdje su $a, b, \sigma > 0$ parametri modela. Navedite opći izraz $r(t)$ rješenja gornje stohastičke diferencijalne jednadžbe. [2]

(c) Pokažite da vrijedi

$$\int_0^T r(t)\, dt = bT - (r(0) - b)\frac{1 - e^{-aT}}{a} + \frac{\sigma}{a}\int_0^T (1 - e^{-a(T-s)})\, dW(s)\,.$$

[3]

(d) Izračunajte distribuciju slučajne varijable $\int_0^T r(t)\, dt$. [2]

[Ukupno 10 bodova]

5. Neka je $\{N(t) : t \geq 0\}$ Poissonov proces s parametrom $\lambda > 0$, te neka je $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ prirodna filtracija pridružena procesu N.

(a) Nađite uvjetnu distribuciju od $N(t+s)-N(t)$ uz dano $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0, s > 0$, te pomoću toga izračunajte $\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)} \mid \mathcal{F}_t]$, $\theta > 0$. [3]

(b) Pokažite da je proces

$$M(t) = e^{(1-\theta)\lambda t}\theta^{N(t)}$$

martingal. [3]

(c) Navedite teorem o opcionalnom zaustavljanju. [2]

(d) Za prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, neka je $T_n = \inf\{t \geq 0 : \; N(t) = n\}$ prvo vrijeme kada Poissonov proces dođe u n. Upotrijebite teorem o opcionalnom zaustavljanju na martingal $M(t)$ i pokažite da slučajna varijabla T_n ima gama distribuciju s parametrima n i $1/\lambda$. (Uputa: funkcija izvodnica momenata $\Gamma(n, 1/\lambda)$-distribucije jednaka je $(1-u/\lambda)^{-n}$). [2]

[Ukupno 10 bodova]

6.

(a) Opišite tri elementa linearnog kongruentnog generatora, te navedite rekurzivnu relaciju za generiranje niza pseudoslučjanih brojeva. [2]

(b) Prva tri broja dobivena linearnim kongruentim generatorom su 0.550, 0.757 i 0.472. Upotrijebite te brojeve za generiranje tri pseudoslučajna broja iz Pareto distribucije s parametrima $\alpha = 3$ i $\lambda = 1$.
(Gustoća Pareto distribucije je $f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\,, x > 0$.) [4]

(c) Eksponencijalna slučajna varijabla T s parametrom λ može se simulirati pomoću formule

$$T = -\frac{1}{\lambda}\log U\,,$$

gdje je U uniformno distribuirana na $[0, 1]$, Objasnite kako se to može iskoristiti za simuliranje trajektorije Markovljevog procesa skokova $\{X_t : t \geq 0\}$ sa dva stanja, Z (zdrav) i B (bolestan), sa prijelaznim stopama σ iz Z u B, te ρ iz B u Z. Pretpostavite $X_0 = Z$. [4]

[Ukupno 10 bodova]

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

17. 11. 2008.

Rješenja

1.

(a) Matrica prijelaza je (stanja su poredana kao 1,2,3,4)

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.05 & 0.15 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.05 & 0.15 & 0.8 \end{bmatrix}$$

(b) (i) $p_{22}^{(1)} = p_{22} = 0$, (ii) $p_{22}^{(2)} = \sum_{j=1}^{4} p_{2j}p_{j2} = 0.2 \times 0.8 + 0.8 \times 0.15 = 0.28$

(d) Granična distribucija jednaka je stacionarnoj koja je rješenje sustava $\pi = \pi P$. Rješavanjem tog sustava slijedi traženo $\pi_2 = 8/91$.

2.

(a) $\widehat{\phi}(k) \approx 0$ za $k = 3, 4$, što sugerira da bi $AR(2)$ mogao biti prikladan model.

(c) Prvo uočimo da vrijedi $\mathrm{Cov}(Y_{t-1}, e_t) = \mathrm{Cov}(Y_{t-2}, e_t) = 0$ i $\mathrm{Cov}(Y_t, e_t) = \sigma^2$. "Množimo" jednadžbu $Y_t = \alpha_1(Y_{t-1}) + \alpha_2(Y_{t-2}) + e_t$ redom s Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2} i računamo kovarijance. Slijedi:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma^2 \qquad (1) \\ \gamma_1 &= \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_1 \\ \gamma_2 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_0 \end{aligned}$$

Dijeljenjem druge i treće jednadžbe s γ_0, slijedi da autokorelacije $\rho_1 = \mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-1})$ i $\rho_2 = \mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-2})$ zadovoljavaju sustav:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\rho_2 \\ \rho_2 &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi:

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\,, \quad \rho_2 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2\,.$$

Rješavamo sustav:

$$0.703 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\,, \quad 0.329 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2\,.$$

Slijedi: $\widehat{\alpha}_1 \approx 0.932$, $\widehat{\alpha}_2 = -0.326$.

Iz (1) slijedi $\sigma^2 = \gamma_0(1 - \alpha_1\rho_1 - \alpha_2\rho_2)$. Uvrštavanjem već dobivenih procjenitelja i danog $\widehat{\gamma}(0)$ dobivamo $\widehat{\sigma}^2 \approx 1.138$.

(b) Slijedi slično kao (c) (ali jednostavnije). Dobivamo $\widehat{\alpha}_1 \approx 0.703$, $\widehat{\sigma}^2 \approx 1.227$.

3. Označimo zbog jednostavnosti stanje OFF sa 0, a stanje ON sa 1.

(a) Generatorska matrica je

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.8 & -0.8 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} P'_{00}(t) &= -0.2P_{00}(t) + 0.8P_{01}(t) \\ &= -0.2P_{00}(t) + 0.8(1 - P_{00}(t) \\ &= -P_{00}(t) + 0.8\,. \end{aligned}$$

(c) Rješenje gornje jednadžbe je

$$P_{00}(t) = 0.8 + 0.2e^{-t}\,.$$

(d) Označimo sa $T_0(t)$ vrijeme provedeno offline do trenutka t, a sa $T_1(t)$ vrijeme provedeno online, te neka je $(X_s : s \geq 0)$ odgovarajući Markovljev lanac. Očito vrijedi $T_0(t) + T_1(t) = t$. Računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_0(t)] &= \mathbb{E}\int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\,ds = \int_0^t \mathbb{P}(X_s = 0)\,ds = \int_0^t P_{00}(s)\;ds \\ &= \int_0^t (0.8 + 0.2e^{-s})\,ds = 0.8t + 0.2(1 - e^{-t})\,. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\mathbb{E}[T_1(t)] = t - \mathbb{E}[T_0(t)] = 0.2(1 + t - e^{-t})\,.$$

4.

(a) Vidi predavanja, Poglavlje 6, str. 16.

(b) Proces $X(t) := r(t) - b$ zadovoljava SDJ $dX(t) = -aX(t)\,dt + \sigma\,dW(t)$, pa je $X(t)$ Ornstein-Uhlenbeckov proces. Po predavanjima, Poglavlje 6, str. 17,

$$X(t) = X(0)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{a(t-s)}\,dW(s)\,.$$

Slijedi

$$r(t) = b + (r(0) - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{a(t-s)}\,dW(s)\,.$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_0^T r(t)\,dt &= \int_0^T b\,dt + \int_0^T (r(0)-b)e^{-at}\,dt + \int_0^T \sigma \left(\int_0^t e^{a(t-s)}\,dW(s) \right) dt \\
&= bT + \frac{r(0)-b}{a}(1 - e^{-aT}) + \sigma \int_0^T dW(s) \int_s^T e^{a(t-s)}\,dt \\
&= bT + \frac{r(0)-b}{a}(1 - e^{-aT}) + \frac{\sigma}{a} \int_0^T (1 - e^{-a(T-s)})\,dW(s)\,.
\end{aligned}$$

(d) Budući da je stohastički integral (po Brownovom gibanju) determinističke funkcije normalno distribuirana slučajna varijabla, slijedi da je i $\int_0^T r(t)\,dt$ normalno distribuirano.

5.

(a) Budući da Poissonov proces ima nezavisne priraste, uvjetna distribucija od $N(t+s) - N(t)$ uz dano $\mathcal{F}_t$ jednaka je (bezuvjetnoj) distribuciji od $N(t+s) - N(t)$. Zbog stacionarnosti prirasta Poissonovog procesa distribucija od $N(t+s) - N(t)$ jednaka je distribuciji od $N(s)$ koja je Poissonova s parametrom λs.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)} \,|\, \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\theta^{N(t+s)-N(t)}\,\theta^{N(t)} \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= \theta^{N(t)}\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)-N(t)}] \\
&= \theta^{N(t)} e^{(\theta-1)\lambda s}\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M(t+s) \,|\, \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[e^{(1-\theta)\lambda(t+s)}\,\theta^{N(t+s)} \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= e^{(1-\theta)\lambda(t+s)}\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)} \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= e^{(1-\theta)\lambda(t+s)}e^{(\theta-1)\lambda s}\theta^{N(t)} \\
&= e^{(1-\theta)\lambda t}\theta^{N(t)} \\
&= M(t)
\end{aligned}$$

(c) Neka je $X_t, t \geq 0$ martingal. Za vrijeme zaustavljanja T vrijedi $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ u slučaju da je ispunjena jedna od sljedećih pretpostavki:

(i) T je ograničeno, tj. $T \leq K$ za neku konstantu K.

(ii) X je ograničen, tj. $|X_t| \leq K$ za neku konstantu K.

(d) Po teoremu o opcionalnom zaustavljanju vrijedi $\mathbb{E}[M(T_n)] = \mathbb{E}[M(0)]$. Zbog $M(0) = 1$ slijedi

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}[M(T_n)] \\
&= \mathbb{E}[e^{(1-\theta)\lambda T_n}\theta^{N(T_n)}] \\
&= \mathbb{E}[e^{(1-\theta)\lambda T_n}\theta^{n}] \quad (\text{zbog } N(T_n) = n) \\
&= \theta^n\mathbb{E}[e^{(1-\theta)\lambda T_n}]
\end{aligned}$$

Stavimo $u = (1-\theta)\lambda$, i riješimo po θ. Dobivamo $\theta = 1-u/\lambda$. Uvrstimo u gornji račun i dobivamo

$$\mathbb{E}[e^{uT_n}] = (1 - \frac{u}{\lambda})^{-n}$$

što je funkcija izvodnica momenata $\Gamma(n, 1/\lambda)$-distribucije.

6.

(a) Linearni kongruentni generator je specificiran izborom tri pozitivna cijela broja:

a, multiplikator;

c, prirast;

m, modul; $\quad m > a, m > c$

Da bismo dobili željeni niz slučajnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_N$, prvo generiramo niz cijelih brojeva $X_1, X_2, \ldots, X_N$ počevši od početne vrijednosti X_0 (koja se naziva *sjeme*). Niz cijelih brojeva generiran je upotrebom rekurzivnog pravila

$$X_{n+1} = (aX_n + c)(\text{mod } m), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1\,.$$

Nakon toga, x_k se definira kao X_k/m, $k = 1, 2, \ldots, N$.

(b) Koristimo metodu inverzne transfornmacije. Funkcija distribucije Pareto distribucije s parametrima $\alpha = 3$ i $\lambda = 1$ jednaka je

$$F(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^3\,.$$

Inverzna funkcija dobije se rješavanjem jednadžbe $u = F(x)$. Slijedi

$$F^{-1}(u) = (1-u)^{-1/3} - 1\,.$$

Za dane vrijednosti pseudoslučajnih brojeva u_j, $j = 1, 2, 3$, računamo $x_j = F^{-1}(u_j)$. Slijedi $x_1 = 0.304956$, $x_2 = 0.6025$ i $x_3 = 0.237244$.

(c) Vrijeme čekanja u stanju Z je eksponencijalno s parametrom σ, a vrijeme čekanja u stanju B je eksponencijalno s parametrom ρ. Pomoću dane formula simuliramo pseudoslučajan niz $y_0, y_2, y_4, \ldots$ iz eksponencijalne distribucije s parametrom σ, te pseudoslučajan niz $y_1, y_3, y_5, \ldots$ iz eksponencijalne distribucije s parametrom ρ. Neka je $t_j = y_0 + y_1 + \cdots + y_j$, $j = 1, 2, \ldots$. To su (simulirani) trenuci kada proces mijenja stanje. Za dano vrijeme t nađemo j takav da je $t_{j-1} \leq t < t_j$. Definiramo

$$x_t = \begin{cases} Z, & j \text{ paran} \\ B, & j \text{ neparan} \end{cases}$$