PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

9. 6. 2008.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 60
Broj zadataka: 6
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

1. Kretanje cijene neke dionice modelira se diskretno vremenskom slučajnim procesom $(S_n : n = 0, 1, 2, \dots)$. Pretpostavlja se da se u svakom trenutku n cijena dionice može promijeniti ili za faktor $\alpha > 1$ s vjerojatnosti $p \in (0, 1)$, ili za faktor $1/\alpha$ s vjerojatnosti $q = 1 - p$ (preciznije, $\mathbb{P}(S_{n+1} = \alpha S_n) = p$ i $\mathbb{P}(S_{n+1} = S_n/\alpha) = 1 - p$).

(a) Neka je $(X_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, Bernoullijevih slučajnih varijabli s distribucijom $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1 - p$, te neka je $(Y_n : n \geq 0)$ pripadajuća slučajna šetnja, $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $Y_0 = 0$. Stavimo $S_n = S_0 \alpha^{Y_n}$ gdje je S_0 početna cijena dionice. Pokažite da ovaj model zadovoljava pretpostavke o kretanju cijene dionice. [2]

(b) Pretpostavimo da je $\alpha = 2$. Odredite p tako da je $(S_n : n \geq 0)$ martingal. [3]

(c) Navedite teorem o opcionalnom zaustavljanju. [2]

(d) Uz pretpostavke $\alpha = 2$ i $S_0 = 256$, nađite vjerojatnost da će cijena dionice narasti do 512 prije nego što padne na vrijednost 64. [3]

[Ukupno 10 bodova]

2.

(a) Opišite tri elementa linearnog kongruentnog generatora, te navedite rekurzivnu relaciju za generiranje niza pseudoslučajnih brojeva. [2]

(b) Prvih nekoliko brojeva dobivenih linearnim kongruentim generatorom su 0.759749, 0.989753, 0.753989, 0.524444. Upotrijebite te brojeve, te polarnom metodom generirajte pseudoslučajne brojeve iz normalne distribucije. [4]

(c) Navedite osnovnu prednost polarnog algoritma u odnosu na Box-Mullerov algoritam. [2]

(d) Uz pomoć niza pseudo-slučajnih brojeva danih u (b), generirajte barem jedan pseudo-slučajni broj iz log-normalne distribucije s parametrima $\mu = -1$, $\sigma = 2$. [2]

[Ukupno 10 bodova]

3. Investitor prati kretanje CROBEX-a, ali nije zainteresiran za točnu vrijednost nego samo da li je CROBEX manji ili veći od 4000. Vrijednost CROBEXA veću od 4000 označimo stanjem $+$, a vrijednost manju od 4000 stanjem $-$. Investitor pretpostavlja da se kretanje CROBEXA po stanjima $+$ i $-$ može modelirati Markovljevim procesom skokova $X = (X_t : t \geq 0)$ s vremensko homogenim intenzitetima $\sigma_{+-} = \sigma$ i $\sigma_{-+} = \rho$.

(a) Napišite generatorsku matricu procesa. [1]

(b) Napišite Kolmogorovljeve jednadžbe unatrag, te nađite $p_{++}(t)$. [3]

(c) Ako je $\rho = 0.2$, navedite distribuciju, te izračunajte očekivano vrijeme boravka CROBEXA ispod vrijednosti od 4000. [3]

(d) Uz pretpostavku da je predloženi model ispravan, te da je u potpunosti poznato kretanje CROBEXA u vremenskom intervalu $[0, T]$, objasnite kako biste procijenili parametre modela σ i ρ. [2]

(e) Da li predloženi model može biti ispravan? Obrazložite! [1]

[Ukupno 10 bodova]

4.

(a) Navedite Itôvu lemu. [2]

(b) Ornstein-Uhlenbeckov proces $X = (X_t : t \geq 0)$ zadan je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom $dX_t = -\gamma X_t \, dt + \sigma \, dB_t$, $\gamma, \sigma > 0$. Stavite $U_t := e^{\gamma t} X_t$, te pomoću Itôve leme nađite stohastičku diferencijalnu jednadžbu za proces $U = (U_t : t \geq 0)$ i riješite je. [2]

(c) Pomoću dijela (b) pokažite da je Ornstein-Uhlenbeckov proces dan formulom

$$X_t = X_0 e^{-\gamma t} + \sigma \int_0^t e^{\gamma(t-s)} \, dB_s \, .$$

[2]

(d) Nađite asimptotsku distribuciju od X_t kada $t \to \infty$. [2]

(e) Navedite barem jedan model u kojem se koristi Ornstein-Uhlenbeckov proces, te razlog zašto. [2]

5. Osiguratelj motornih vozila radi po sustavu bonusa s četiri nivoa. Postotak osnovne premije koju plaća osiguratelj na svakom nivou je kako slijedi:

Nivo	*% naplaćene premije*
4	100
3	90
2	80
1	70

Osiguranici se kreću po nivoima ovisno o broju šteta u protekloj godini. Za svakog osiguranika, vjerojatnost jedne štete u godini je 0.2, a vjerojatnost dvije ili više šteta je 0.1.
Za osiguranike na nivoima 1, 2, 3 i 4 na početku protekle godine:

- ako nije bilo štete tokom protekle godine, osiguranik se pomiče za jedan nivo nadolje (npr., sa nivoa 3 na nivo 2)
- ako je postojala jedna šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče za jedan nivo na gore (osim onih koji su bili na nivou 4 na početku godine i koji ostaju na nivou 4)
- ako su postojale dvije ili više šteta u protekloj godini, osiguranik se vraća na nivo 4 (to jest, plaća punu premiju).

(a) Odredite prijelaznu matricu za ovaj sustav bonusa (uz pretpostavku da svi osiguranici obnavaljaju svoje police), te nacrtajte graf pripadajućeg Markovljevog lanca. [3]

(b) Osiguranik je na nivou 1 u tekućoj godini. Izračunajte vjerojatnost da će nakon dva obnavljanja police osiguranik biti na nivou 3. [2]

(c) Navedite uvjete uz koje vjerojatnost da se osiguranik nalazi u određenom stanju nakon n godina konvergira kada $n \to \infty$ prema nekoj graničnoj vrijednosti nezavisno od početnog stanja, te provjerite da su ti uvjeti zadovoljeni u gornjem primjeru. [2]

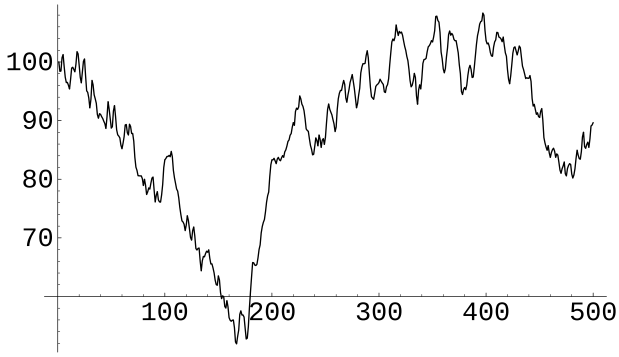
(d) Izračunajte granične (asimptotske) vjerojatnosti da će osiguranik biti u stanju 1. [3]

[Ukupno 10 bodova]

6.

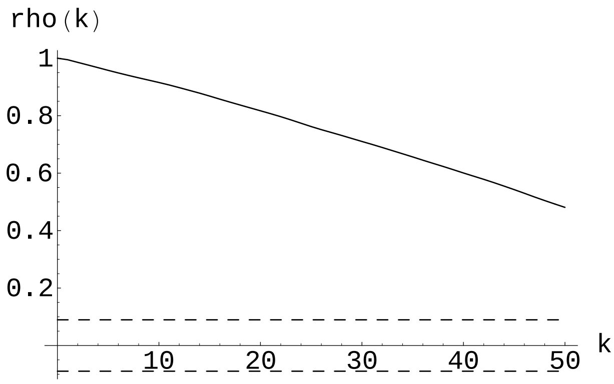
(a) Izračunajte autokorelacijsku funkciju MA(1) niza $X_n = e_n + \alpha e_{n-1}$, gdje je (e_n) bijeli šum s varijancom σ^2. [3]

(b) Za niz od 500 povijesnih podataka $y_1, y_2, \ldots, y_{500}$ vremenskog niza želi se pronaći model koji najbolje opisuje te podatke. Podaci su dani na Slici 1. Izračunata je uzoračka autokorelacijska funkcija danog niza za



Slika 1: Realizacija vremenskog niza (y_n)

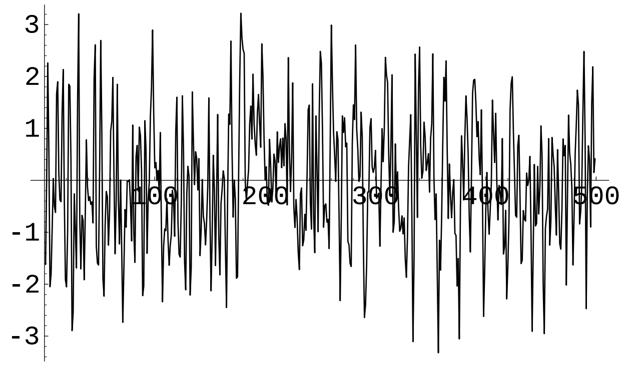
razmake $0, 1, \ldots, 50$ i dobiven je graf na Slici 2. Objasnite zašto se prvi



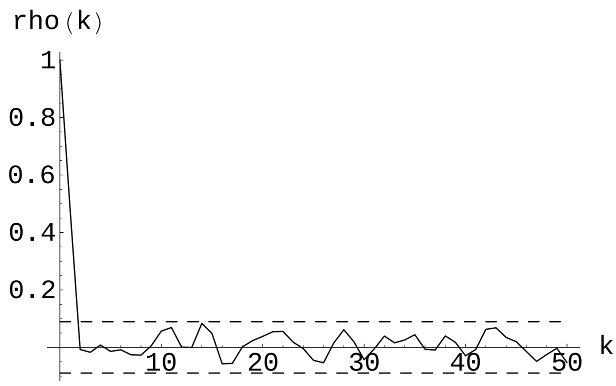
Slika 2: Uzoračka autokorelacijska funkcija niza (y_n)

logičan korak u analizi sastoji od diferenciranja tih podataka. [2]

(c) Nakon diferenciranja niza (y_n) dobiven je niz (x_n), $x_n = \nabla y_n$, čiji je graf pokazan na Slici 3.



Slika 3: Realizacija vremenskog niza (x_n)



Slika 4: Uzoračka autokorelacijska funkcija niza (x_n)

Također je izračunata i uzoračka autokorelacijska funkcija niza (x_n) dana na Slici 4. Prvih pet vrijednosti su $\hat{\rho}_0 = 1, \hat{\rho}_1 = 0.486, \hat{\rho}_2 = -0.007, \hat{\rho}_3 = -0.017, \hat{\rho}_4 = 0.008$. Predložite stacionarni model za niz (x_n), te metodom momenata procijenite parametre tog modela. [3]

(d) Predložite model za niz (y_n). [2]

[Ukupno 10 bodova]

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

9. 6. 2008.

Rješenja

1.

(a) Budući da je po definiciji $S_n = S_0\alpha^{Y_n}$, imamo $S_{n+1} = S_0\alpha^{Y_{n+1}} = S_n\alpha^{X_{n+1}}$, pa vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1} = \alpha S_n) &= \mathbb{P}(S_n\alpha^{X_{n+1}} = \alpha S_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p\,,\\ \mathbb{P}(S_{n+1} = S_n/\alpha) &= \mathbb{P}(S_n\alpha^{X_{n+1}} = S_n/\alpha) = \mathbb{P}(X_{n+1} = -1) = 1-p\,.\end{aligned}$$

Dakle, u svakom trenutku se cijena dionice može promijeniti ili za faktor $\alpha > 1$ s vjerojatnosti $p \in (0,1)$, ili za faktor $1/\alpha$ s vjerojatnosti $1-p$.

(b) Tražimo $p \in (0,1)$ takav da je $\mathbb{E}(S_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = S_n$, gdje smo sa $\mathcal{F}_n$ označili σ-algebru događaja koji ovise samo o $S_0, S_1, \ldots, S_n$. Budući da je

$$\mathbb{E}(S_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n 2^{X_{n+1}}\,|\,\mathcal{F}_n) = S_n\mathbb{E}(2^{X_{n+1}})\,,$$

traženi uvjet je

$$1 = \mathbb{E}(2^{X_{n+1}}) = 2p + 2^{-1}(1-p)\,,$$

otkud rješavanjem po p slijedi $p = 1/5$.

(c) Vidi predavanja, Poglavlje 2, Rezultat 5, str. 10.

(d) Označimo sa π traženu vjerojatnost, a sa ρ vjerojatnost istog događaja uz početnu cijenu $S_0 = 128$. Uvjetujemo na prvi korak slučajne šetnje (Y_n), odnosno na vrijednost od S_1. Slijedi sustav jednadžbi za π i ρ:

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\rho\,,\\ \rho &= \frac{1}{5}\pi\,.\end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi $\pi = 5/21$.

2.

(a) Vidi predavanja, Poglavlje 7, str. 2.

(b) Stavimo $u_1 = 0.759749$, $u_2 = 0.989753$. Po polarnom algoritmu računamo $v_1 = 2u_1 - 1 = 0.519498$, $v_2 = 2u_2 - 1 = 0.979506$ i $s = v_1^2 + v_2^2 = 1.22931$. Budući da je $s > 1$, vraćamo se na prvi korak, te uzimamo novi par pseudoslučajnih brojeva $u_1 = 0.753989$ i $u_2 = 0.524444$. Opet računamo $v_1 = 2u_1 - 1 = 0.507978$, $v_2 = 2u_2 - 1 = 0.048888$ i $s = v_1^2 + v_2^2 = 0.260432$. Budući da je $s < 1$, traženi pseudoslučajni brojevi iz normalne distribucije su

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{\frac{-2\log s}{s}}\, v_1 = 1.63283\,, \\
z_2 &= \sqrt{\frac{-2\log s}{s}}\, v_2 = 0.157144\,.
\end{aligned}
$$

(c) Kod Box-Mullerovog algoritma potrebno je računati trigonometrijske funkcije cos i sin što usporava postupak.

(d) Ako je Y log-normalno distribuirana s parametrima $\mu = -1$ i $\sigma = 2$, tada se Y može prikazati kao $Y = e^{2X-1}$ gdje X ima standardnu normalnu distribuciju. Budući da smo u dijelu (b) generirali slučajne brojeve iz standardne normalne distribucije možemo ih upotrijebiti i dobiti

$$
\begin{aligned}
w_1 &= e^{2z_1-1} = 9.63749\,, \\
w_2 &= e^{2z_2-1} = 0.503732\,.
\end{aligned}
$$

3.

(a)

$$
A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ \rho & -\rho \end{bmatrix}
$$

(b) Kolmogorovljeve jednadžbe unatrag glase $P'(t) = P(t)A$. Nakon množenja, u gornjem lijevom kutu dobivamo

$$
p'_{++}(t) = -\sigma p_{++}(t) + \rho p_{+-}(t)\,.
$$

Iskoristimo da je $p_{++}(t) + p_{+-}(t) = 1$, te slijedi

$$
p'_{++}(t) = -(\sigma + \rho)p_{++}(t) + \rho\,.
$$

Zbog jednostavnosti označimo p_{++} samo kao p. Rješenje homogene jednadžbe $p'(t) = -(\sigma + \rho)p(t)$ dano je s $p(t) = Ce^{-(\sigma+\rho)t}$. Koristimo metodu varijacije konstanti i tražimo rješenje nehomogene jednadžbe u obliku

$$p(t) = C(t)e^{-(\sigma+\rho)t}.$$

deriviranjem slijedi jednadžba za $C(t)$: $C'(t) = \rho e^{-(\sigma+\rho)t}$. Rješenje je

$$C(t) = C(0) - \frac{\rho}{\sigma+\rho}\left(1 - e^{-(\sigma+\rho)t}\right).$$

Nakon uvrštavanja u $p(t)$ dobivamo

$$p(t) = C(0)e^{-(\sigma+\rho)t} + \frac{\rho}{\sigma+\rho} - \frac{\rho}{\sigma+\rho}e^{-(\sigma+\rho)t}.$$

Konstantu $C(0)$ izračunamo iz početnog uvjeta $p_{++}(0) = 1$. Slijedi $C(0) = 1$, pa konačno

$$p_{++}(t) = p(t) = \frac{\rho}{\sigma+\rho} + \frac{\sigma}{\sigma+\rho}e^{-(\sigma+\rho)t}.$$

(c) Vrijeme boravka Markovljevog procesa skkova u nekom stanju ima eksponencijalnu distribuciju. U našem primjeru to je eksponencijalna distribucija s parametrom $\rho = 0.2$. Očekivanje te distribucije je $1/0.2 = 5$.

(d) Srednje vrijeme boravka u stanju $+$ prije prijelaza u stanje $-$ je recipročna vrijednost intenziteta σ. Dakle, ako zbrojimo ukupno vrijeme provedeno u stanju $+$ do trentuka T, i podijelimo s brojem prijelaza iz stanja $+$ u stanje $-$, dobit ćemo srednje (prosječno) vrijeme boravka u stanju $+$. Zato za procjenitelj od σ možemo uzeti

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{broj prijelaza iz } + \text{ u } - \text{ do trenutka } T}{\text{ukupno vrijeme provedeno u } + \text{ do trenutka } T}.$$

Na analogan način procjenimo ρ.

(e) Navedeni model ne uzima u obzir točnu vrijednost CROBEXa što definitivno utječe na intentzitet prijelaza među stanjima $+$ i $-$. U slučaju kada je CROBEX blizu vrijednosti 4000, možemo očekivati intenzivniji prelazak među stanjima (CROBEX može brzo oscilirati oko 4000). U slučaju da je CROBEX znatno ispod vrijednosti 4000, ili znatno iznad, taj intenzitet je manji. Dakle, vremenski homogen Markovljev proces skokova neće biti dobar model (situacija se ne može popraviti niti vremenski nehomogenim Markovljevim procesom skokova).

4.

(a) Vidi predavanja, Poglavlje 6, str. 16.

(b), (c) Vidi predavanja, Poglavlje 6, str. 17.

(d) Vidi predavanja, Poglavlje 6, str. 18.

(e) O-U proces koristi se u Vasicekovom modelu kamatnih stopa: $dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\,dB_t$. Ovdje je $r_t - b$ O-U proces. O-U proces ima svojstvo vraćanja prema nuli, što implikacira da u Vasicekovom modelu kamatna stopa ima svojstvo vraćanja prema srednjem.

5.

(a) Matrica prijelaza je (stanja su poredana kao 1,2,3,4)

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.7 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

(b) Traži se P^2_{13}. Množenjem prvog retka matrice P sa trećim stupcem dobivamo $P^2_{13} = 0.2 \times 0.2 + 0.1 \times 0.7 = 0.11$ (dvije uzastopne godine s jednom štetom ili prva godina s dvije (ili više šteta) i druga bez štete).

(c) Dovoljno je da je lanac ireducibilan (što se vidi iz grafa) i aperiodičan (npr., $p_{11} > 0$ povlači aperiodičnost).

(d) Granična distribucija jednaka je stacionarnoj distribuciji $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ koja je rješenje sustava $\pi = \pi P$. Dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.7\pi_1 + 0.7\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.2\pi_1 + 0.7\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.2\pi_1 + 0.7\pi_4 \\ \pi_4 &= 0.1\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.3\pi_3 + 0.3\pi_4 \end{aligned}$$

Uz dodatnu jednadžbu $1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$, rješavanjem slijedi da je $\pi_1 = \frac{343}{720} = 0.476389$.