STOHASTIČKO MODELIRANJE

SADRŽAJ

Faculty and Institute of Actuaries zahvaljuje sljedećim osobama koje su pomogle u sastavljanju ovog materijala:

Emmanuel Buffet
John Caslin
Anatoly Patrick
Phelim Boyle

Bruce Porteous
Jim Tindale
Howard Waters
David Wilkie

POGLAVLJE 1 - PRINCIPI AKTUARSKOG MODELIRANJA

Nastavni ciljevi: (i) Opisati principe aktuarskog modeliranja.

1. Opisati zašto i kako se koriste modeli.
2. Objasniti prednosti i ograničenja modeliranja.
3. Objasniti relativnu prikladnost determinističkih i stohastičkih modela.
4. Općenito opisati kako odlučiti da li je model prikladan za određenu primjenu.
5. Objasniti razliku između kratkoročnih i dugoročnih svojstava modela, te kako to može biti relevantno u odluci da li je model prikladan za određenu primjenu.
6. Općenito opisati kako analizirati moguće rezultate modela, te objasniti zašto je to relevantno u izboru modela.
7. Opisati proces testiranja osjetljivosti na pretpostavke i objasniti zašto je to važan dio procesa modeliranja.
8. Objasniti čimbenike koje treba uzeti u razmatranje pri priopćavanju rezultata koji slijede primjenom modela.

1 Modeli

1.1 Zašto se koriste modeli

Model je imitacija sustava ili procesa stvarnog svijeta. Mogu se razviti modeli mnogih aktivnosti, kao na primjer, ekonomija zemlje, rad ljudskog srca, budući tok novca brokerskog distributivnog kanala društva za životno osiguranje. Pretpostavimo da želimo "predvidjeti" posljedice koje bi promjene u stvarnom svijetu imale na ova tri modela. U nekim slučajevima moglo bi biti previše rizično, ili preskupo ili presporo ispitati predložene promjene u stvarnom svijetu, čak i na osnovu uzorka. Ispitivanje promjena bez prednosti modela moglo bi imati ozbiljnih posljedica. Ekonomija bi mogla dospjeti u recesiju stajući vladu sljedećih izbora, pacijent bi mogao umrijeti, a osiguratelj za životna osiguranja bi mogao snositi porast posla ali uz izuzetno nepovoljne premije. Model omogućava ispitivanje mogućih posljedica. Rezultati promjene nekih ulaznih parametara mogu se proučavati prije donošenja odluke o izvršenju planova u stvarnom svijetu.

Da bi se izgradio model sustava ili procesa, potrebno je razviti skup matematičkih i logičkih pretpostavki o tome kako sustav radi. Kompleksnost modela određena je kompleksnošću odnosa među raznim parametrima modela. Na primjer, u modeliranju osiguratelja za životna osiguranja, moraju se razmatrati točke kao što su zakonska pravila, oporezivanje i uvjeti otkazivanja. Budući događaji koji utječu na povrate od ulaganja, inflaciju, nove poslove, ništavna osiguranja, smrtnost i troškove također utječu na te odnose.

Da bi se stvorio model i odredili prikladni parametri, potrebno je razmatrati podatke i donijeti sud o relevantnosti opaženih podataka na buduće okruženje. Takvi podaci mogu potjecati od prošlih opažanja, od trenutnih opažanja (kao što je stopa inflacije) ili od očekivanja od budućih promjena.

Kada se smatra da su opaženi podaci prikladni za tvorbu parametara za odabrani model, mogu se upotrebljavati statističke metode za prilagodbu podataka.

Prije okončanja izbora modela i parametara, važno je razmotriti ciljeve stvaranja i upotrebe modela. Na primjer, u mnogim slučajevima nećemo htjeti kreirati najtočniji model, nego umjesto toga kreirati model koji neće umanjiti troškove ili druge rizike koji mogu biti uključeni.

1.2 Kako se upotrebljavaju modeli

Dok u stvarnosti proces modeliranja ne prati krutu shemu propisanih koraka, kod uvođenja predmeta korisno je zamisliti skup ključnih koraka. U praksi se aktuari koji grade i koriste modele kreću naprijed natrag među tim koracima neprekidno poboljšavajući model.

Ključni koraci u procesu modeliranja mogu se opisati kako slijedi:

1. Razviti dobro definiran skup ciljeva koje treba ispuniti procesom modeliranja.

2. Planirati proces modeliranja, te kako će model biti potvrđen.

3. Prikupiti i analizirati podatke potrebne za model.

4. Prvo definirati model uhvativši bit sustava stvarnog svijeta. Profinjenje razine detaljnosti modela može doći u kasnijoj fazi.

 © Faculty and Institute of Actuaries

5. Uključiti stručnjake za sustav stvarnog svijeta kojeg pokušavate imitirati, tako da dobijete povratnu informaciju o vrijednosti konceptualnog modela.

6. Odlučiti o prikladnosti simulacijskog paketa ili općeg jezika za implementaciju modela. Odabrati statistički pouzdan generator slučajnih brojeva koji će biti adekvatan u kontekstu kompleksnosti modela.

7. Napisati računalni program za model.

8. Otkloniti greške u programu tako da je sigurno da izvodi zamišljene operacije iz definicije modela.

9. Testirati da li su rezultati modela razumni.

10. Pregledati i pažljivo razmotriti da li je model odgovarajući u svijetlu malih promjena u ulaznim parametrima.

11. Analizirati rezultate modela.

12. Priopćiti i dokumentirati rezultate modela.

2 Modeliranje - prednosti i ograničenja

Jedna od najvažnijih prednosti modeliranja u aktuarskom poslu je da se sustavi s dugim vremenskim okvirima - kao na primjer djelovanje mirovinskog fonda - mogu proučavati u komprimiranom vremenu.
Druge prednosti uključuju:

- kompleksni sustavi sa stohastičkim elementima, kao što je djelatnost društva za životna osiguranja, ne mogu se dovoljno dobro opisati matematičkim ili logičkim modelom koji je sposoban proizvesti rezultate koji se lako interpretiraju; modeliranje simulacije je jedan način proučavanja djelatnosti društva za životno osiguranje;

- mogu se usporediti različite buduće politike ili moguće akcije tako da se vidi koja najbolje pristaje potrebama ili ograničenjima korisnika;

- u modelu kompleksnog sustava obično možemo bolje kontrolirati eksperimentalne uvjete i na taj način smanjiti varijancu izlaznih rezultata modela bez kvarenja njihovih srednjih vrijednosti.

Međutim, modeli nisu jednostavno rješenje za sve aktuarske probleme - oni imaju nedostatke koje je potrebno razumjeti prilikom interpretiranja izlaza iz modela i priopćavanja rezultata klijentima.
Nedostaci uključuju:

- Razvoj modela zahtijeva značajno ulaganje vremena i stručnosti. Financijski troškovi razvoja mogu biti prilično veliki uzevši u obzir potrebu da se provjeri valjanost pretpostavki modela, računalni kod, razumnost rezultata i način kako običnim jezikom interpretirati rezultate ciljanoj publici.

- U stohastičkom modelu, za dani skup ulaza svaka obrada daje samo procjene izlaznih rezultata modela. Stoga je nekoliko nezavisnih obrada potrebno za proučavanje izlaza za svaki dani skup ulaza. Opće je pravilo da su modeli korisniji za usporedbu rezultata ulaznih varijacija nego za optimiziranje izlaza.

- Modeli mogu izgledati impresivno kada se obrađuju na računalu, te stoga postoji opasnost uspavljivanja u preveliko povjerenje u model. Ako model nije prošao testove valjanosti i provjere, njegovi impresivni izlazi su slaba zamjena za sposobnost imitiranja odgovarajućeg stvarnog svijeta.

- Modeli se jako oslanjanju na ulazne podatke. Ako je kvaliteta podataka slaba ili nevjerodostojna, tada je vjerojatno da će i izlaz iz modela imati grešku.

- Važno je da korisnici modela razumiju model, te za koje potrebe se može sa sigurnošću koristiti. Postoji opasnost od upotrebe modela kao "crne kutije" za koju se pretpostavlja da daje samo valjane rezultate, bez razmatranja da li je upotreba modela odgovarajuća za određene ulazne podatke i očekivane izlaze.

- Nemoguće je u model uključiti sve buduće događaje. Na primjer, promjena u zakonodavstvu može rezultate modela učiniti nevaljalim, ali ju je nemoguće predvidjeti kada se model konstruira.

- Interpretacija nekih izlaznih rezultata modela može biti teška. Oni mogu biti valjani samo relativno, a ne apsolutno. Na primjer, usporedba razina rizika izlaza povezanih s različitim ulazima.

 © Faculty and Institute of Actuaries

3 Stohastički i deterministički modeli

Ako se želi predstaviti stvarnost čim moguće točnije, model treba imitirati slučajnu prirodu varijabli. Stohastički model je onaj koji prepoznaje slučajnu prirodu ulaznih komponenti. Model koji ne sadrži slučajnu komponentu je po prirodi deterministički.

Izlaz je u determinističkom modelu određen čim su definirani ulazi i odnosi među njima. Suprotno tome, u stohastičkom modelu izlaz je po prirodi slučajan - isto kao i ulazi koji su slučajne varijable. Izlaz je samo snimka ili procjena karakteristika modela za dani skup ulaza. Da bi se mogla koristiti statistička teorija kao pomoć pri proučavanju implikacija skupa ulaza, potrebno je nekoliko nezavisnih obrada za svaki skup ulaza.

Deterministički model je stvarno samo specijalan (pojednostavljen) slučaj stohastičkog modela.

Da li želimo koristiti deterministički ili stohastički model ovisi o tome da li smo zainteresirani za rezultate jednog jedinog "scenarija", ili za distribuciju rezultata mogućih "scenarija". Deterministički model daje rezultate relevantnih izračuna za jedan scenarij; stohastički model daje distribucije relevantnih rezultata za distribuciju scenarija. Ako se stohastički model ispituje korištenjem "Monte Carlo" simulacije, to tada daje zbirku odgovarajuće velikog broja različitih determinističkih modela, svaki od kojih se smatra jednako vjerojatnim.

Rezultati za deterministički model se često dobiju direktnim računom, ali je ponekad nužno koristiti numeričke aproksimacije, ili da bi se integrirale funkcije, ili da bi se riješile diferencijalne jednadžbe; primjeri modela gdje je posljednje potrebno diskutirat će se u poglavlju 4 (Markovljevi procesi skokova).

Ako je stohastički model dovoljno prilagodljiv, moguće je izvesti željene rezultate analitičkim metodama. Ako je to moguće, tome se često daje prednost, a također je često i brže nego Monte Carlo simulacija; dobiju se precizni rezultati i lako se mogu analizirati posljedice promjena u pretpostavkama.

Mnogi praktični problemi su međutim prekomplicirani za lako korištenje analitičkih metoda, i Monte Carlo simulacija je izuzetno jaka metoda za rješavanje kompliciranih problema. Ali ako se i samo dio modela može tretirati analitički, to može osigurati provjeru simulacijske metode. Korištenje determinističkog modela kod kompliciranog problema moguće je za računanje očekivane vrijednosti, ili medijana, gdje je distribucija oko tih središnjih vrijednosti procjenjena simulacijom.

Također je potrebno uzeti na znanje da simulacijske metode općenito daju "što ako?" odgovore; što su rezultati uz dane pretpostavke. Mnogo je teže koristiti simulaciju za dobivanje optimalnih rezultata; koji skup pretpostavki maksimizira ili minimizira neki željeni rezultat.

Daljnje ograničenje je da preciznost rezultata ovisi o broju provedenih simulacija (vidi sekciju 6 poglavlja 7).

3.1 Diskretna i neprekidna stanja i vrijeme

Stanje modela je skup varijabli koje opisuju sustav u određenoj točki u vremenu uzimajući u obzir ciljeve našeg proučavanja. Moguće je predstaviti sve buduće scenarije kao stanja, što će biti razvijeno u sljedećim poglavljima.

Diskretna stanja imamo kada varijable pokazuju diskretne promjene u vremenu. Na primjer, iz stanja živ u mrtav, ili porast broja polica nekog osiguratelja.

Neprekidna stanja imamo kada se varijable mijenjaju neprekidno u odnosu na vrijeme. Na primjer, promjena vrijednosti investicija u realnom vremenu.

Odluka da li koristiti diskretan ili neprekidan model za određeni sustav više je vođena ciljevima proučavanja, nego da li je priroda samog sustava diskretna ili neprekidna. Model također može promatrati vrijeme na diskretan ili neprekidan način. To može odražavati činjenicu da su izlazi iz modela potrebni samo u diskretnim točkama u vremenu, ili može biti da se zadovolje ciljevi modeliranja.

U praksi se ne može koristiti Monte Carlo simulacija za problem s neprekidnim vremenom; potrebno je diskretizirati vremenski korak. To se može napraviti sa željenom preciznošću, ali čim je veća preciznost, tim je dulje vrijeme procesiranja određenog modela; to može, ali ne mora biti ograničenje u praksi. Također je potrebno zapamtiti da se neki rezultati za modele s neprekidnim vremenom i neprekidnim stanjima (diskutirani u Poglavlju 6) ne mogu uopće dobiti diskretnim simulacijama. Jedan primjer je derivacija Brownovog gibanja koja nije nigdje definirana; mogu se izračunati aproksimacije konačnim diferencijama koje izgledaju kao derivacije, ali ne konvergiraju kako se smanjuje vremenski korak.

 © Faculty and Institute of Actuaries

4 Prikladnost modela

U ustanovljavanju prikladnosti modela za određeni zadatak važno je razmatrati sljedeće:

- Ciljeve zadatka koji se modelira.
- Valjanost modela u odnosu na svrhu za koju će se koristiti.
- Valjanost podataka koji će se upotrijebiti.
- Moguće greške povezane s činjenicom da model ili korišteni parametri ne predstavljaju savršeno stvarnu situaciju koja se modelira.
- Utjecaj korelacija među slučajnim varijablama koje "tjeraju" model.
- Stupanj korelacija među raznim rezultatima proizašlim iz modela.
- Sadašnji značaj modela napisanih i korištenih u prošlosti.
- Vjerodostojnost ulaznih podataka.
- Vjerodostojnost izlaznih rezultata.
- Opasnosti lažne točnosti.
- Lakoću kojom se može objasniti model i priopćiti njegovi rezultati.

5 Kratkoročna i dugoročna svojstva modela

Stabilnost odnosa uključenih u model ne mora dugoročno biti realistična. Na primjer, eksponencijalan rast može se činiti linearnim ako se promatra kroz kratak vremenski period. Ukoliko se promjene mogu predvidjeti tada ih se može uključiti u model, ali često treba prihvatiti da su dugoročni modeli sumnjivi.
Modeli su po definiciji pojednostavljene verzije stvarnog svijeta. Oni stoga mogu zanemarivati odnose "višeg reda" koji kratkoročno imaju mali značaj, ali se dugoročno mogu akumulirati.

© Faculty and Institute of Actuaries

6 Analiziranje izlaza iz modela

Budući da je simulacija samo projekt statističkog skupljanja uzoraka potpomognut računalom, za analizu izlaza iz modela potrebne su statističke tehnike. U ovoj fazi procesa modeliranja aktuar mora biti vrlo pažljiv i dobro prosuđivati, budući da su opažanja međusobno korelirana, a distribucije uzastopnih opažanja se mijenjaju kroz vrijeme. Potrebno je izbjegavati beskorisno i fatalno privlačno iskušenje pretpostavke o nezavisnim i jednako distribuiranim opažanjima. Ako postoji sustav stvarnog svijeta u odnosu na koji se mogu raditi usporedbe, potrebno je koristiti "Turingov" test. U Turingovom testu pita se stručnjake za sustav realnog svijeta da usporede nekoliko skupova podataka realnog svijeta i modela, bez da im se kaže koji su koji. Ako ti stručnjaci vide razliku među podacima realnog svijeta i modela, tehnike kojima to vide mogu se iskoristiti za poboljšanje modela.

7 Testiranje osjetljivosti

Ukoliko je to moguće, važno je testirati razumnost izlaznih rezultata modela u odnosu na stvarni svijet. Potrebno je provesti ispitivanje osjetljivosti izlaza s obzirom na male promjene u ulazima ili njihovim statističkim distribucijama. Tada je potrebno ponovno ispitati prikladnost modela, posebno ako male promjene u ulazima ili njihovim statističkim distribucijama dovode do velikih promjena u izlazima. Na taj način moguće je odrediti ključne ulaze i odnose na koje je potrebno obratiti posebnu pažnju u dizajniranju i korištenju modela.
Model treba testirati dizajnirajući odgovarajuće simulacijske eksperimente. Model se kroz taj proces može profiniti.

8 Priopćavanje rezultata

Završni korak u procesu modeliranja je priopćavanje i dokumentiranje rezultata i samog modela drugima. Priopćavanje mora uzeti u obzir znanje i poglede ciljane publike. Ovdje je ključno uvjeriti klijenta da prihvati model kao valjan i korisan alat u donošenju odluka. Važno je da klijent u potpunosti uvidi bilo koja ograničenja na upotebu i valjanost modela.

 © Faculty and Institute of Actuaries

POGLAVLJE 2 - STOHASTIČKI PROCESI

Nastavni ciljevi: (ii) Opisati opće principe stohastičkih procesa i njihovu klasifikaciju na različite tipove.

1. Općenito definirati stohastički proces.
2. Klasificirati stohastički proces prema tome da li:
   (a) ima diskretno ili neprekidno vrijeme
   (b) ima neprekidan ili diskretan prostor stanja
   (c) je mješovitog tipa

   i dati primjere svakog tipa procesa.
3. Opisati moguće primjene mješovitih procesa.
4. Objasniti što znači Markovljevo svojstvo u kontekstu stohastičkog procesa.
5. Opisati koncepte martingala, filtracije i vremena zaustavljanja primjenjenih na stohastičke procese.

1 Uvod

Stohastički proces je model slučajne pojave ovisne o vremenu. Kao što slučajna varijabla opisuje statičku slučajnu pojavu, tako je stohastički proces familija slučajnih varijabli X_t, jedna za svako vrijeme t u nekom skupu J. Skup S u kojem slučajne varijable X_t poprimaju vrijednosti zove se *prostor stanja* procesa.

Prvi izbor s kojim se suočavamo u odabiru stohastičkog procesa koji modelira stvarni život je priroda (diskretna ili neprekidna) vremenskog skupa J i prostora stanja S.

Primjer 1.1: Diskretan prostor stanja s diskretnim promjenama vremena

Društvo za osiguranje motornih vozila godišnje ispituje status svojih osiguranika. Moguće su tri razine popusta (0, 25%, 40%) ovisno o nesrećama vozača. U ovom slučaju odgovarajući prostor stanja je $S = \{0, 25, 40\}$, a vremenski skup je $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ gdje svaki interval predstavlja jednu godinu. Ovaj problem proučava se u poglavlju 3.

Primjer 1.2: Diskretan prostor stanja s neprekidnim vremenskim promjenama

Društvo za životno osiguranje klasificira svoje osiguranike na Zdrave, Bolesne ili Mrtve. Stoga je prostor stanja $S = \{Z, B, M\}$. Kao vremenski skup prirodno je odabrati $J = [0, \infty)$ budući da se bolest ili smrt mogu pojaviti u bilo kojem trenutku. S druge strane, moglo bi biti dovoljno brojati vrijeme u danima, te stoga koristiti $J = \{0, 1, 2, \dots\}$. Taj problem se detaljno proučava u poglavlju 4.

Primjer 1.3: Neprekidan prostor stanja

Odštetni zahtjevi nepredvidivih iznosa stižu do osigurateljnog društva u nepredvidiva vremena. Društvo treba predvidjeti *kumulativnu štetu* kroz $[0, t]$ za procjenu rizika da neće moći ispuniti svoje obaveze. Za ovaj problem standardni je običaj koristiti $[0, \infty)$ i za S i za J (vidi 3.8 u ovom poglavlju i poglavlje 6). Međutim, i drugi izbori su mogući: štete nastaju u jedinicama od jedne lipe i u stvari ne čine kontinuum. Slično, vrijeme nastanka štete unutar jednog dana je beznačajno, tako da je $\{0, 1, 2, \dots\}$ moguć izbor za J i/ili S.

Primjer 1.4: Procesi mješovitog tipa

Činjenica da se stohastički proces događa u neprekidnom vremenu ne znači da ne može promijeniti vrijednost u unaprijed određenim diskretnim vremenskim trenucima. Takvi procesi zovu se procesima mješovitog tipa. Kao primjer razmotrimo mirovinsku shemu u kojoj članovi imaju opciju umirovljenja na svaki rođendan između dobi 60 i 65. Broj ljudi koji će odabrati prijevremeno umirovljenje ne može se točno predvidjeti, kao niti vrijeme i broj smrti aktivnih članova. Stoga se broj prinosnika mirovinskoj shemi može modelirati kao stohastički proces mješovitog tipa s prostorom stanja $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ i vremenskim intervalom $J = [0, \infty)$. Smanjenja slučajnih iznosa dogodit će se u fiksnim trenucima zbog prijevremenog umirovljenja, kao i u slučajnim trenucima zbog smrti.

U pravilu, može se reći da su stohastički procesi s neprekidnim vremenom i neprekidnim prostorom stanja, iako konceptualno teži nego diskretni procesi, u krajnjoj mjeri fleksibilniji (na isti način kao što je jednostavnije izračunati integral nego sumirati beskonačni red).

 © Faculty and Institute of Actuaries

2 Definiranje stohastičkog procesa

2.1 Putovi

Nakon odabira vremenskog skupa i skupa stanja, preostaje definirati i sam proces $\{X_t, t \in J\}$. To znači specificirati zajedničku distribuciju od $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ za *sve* $t_1, t_2, \dots, t_n$ u J i *sve* prirodne brojeve n. To se čini užasnim zadatkom. U praksi, to se skoro uvijek radi indirektno, pomoću jednostavnog prijelaznog postupka (vidi 2.3 i sekciju 3).
Zajednička realizacija slučajnih varijabli X_t za sve t u J zove se *put* (ili *trajektorija*, engl. *sample path*) procesa. To je funkcija iz J u S. Svojstva putova procesa moraju odgovarati onima uočenim u stvarnom životu (barem u statističkom smislu). U tom slučaju model se smatra uspješnim i može se koristiti za predviđanje. Bitno je da model reproducira barem široka obilježja problema iz realnog života. Najvažnija od tih razmatraju se u sljedećim podsekcijama.

2.2 Stacionarnost

Stohastički proces je *stacionaran* ako $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ i $X_{t+t_1}, X_{t+t_2}, \dots, X_{t+t_n}$ imaju jednake distribucije za sve $t, t_1, t_2, \dots, t_n$ u J i za sve prirodne brojeve n. To znači da statistička svojstva procesa ostaju nepromijenjena kako vrijeme prolazi. U primjeru 1.2 sigurno ne bismo koristili stacionaran proces, budući da vjerojatnost biti živ u vremenu od 10 godina treba ovisiti o dobi osobe.
Stacionarnost je strogi zahtjev koji može biti teško provjeriti u stvarnom životu. Zbog toga se također upotrebljava i drugi uvjet poznat kao *slaba stacionarnost*. Tu se zahtijeva da očekivanje procesa $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ bude konstantno, te da kovarijanca procesa $C(s,t) = \mathbb{E}[X_s X_t] - \mathbb{E}[X_s]\mathbb{E}[X_t]$ ovisi samo o vremenskoj razlici $t - s$.

2.3 Prirasti

Prirasti procesa, definirani kao $X_{t+u} - X_t$ $(u > 0)$, često imaju jednostavnija svojstva nego sam proces.
Primjer 2.1:
Neka S_t označava cijenu neke dionice. Razumno je pretpostaviti da distribucija povrata kroz period trajanja u, S_{t+u}/S_t ovisi o u, ali ne o t. Prema

tome će proces logaritama cijena $X_t = \log S_t$ imati stacionarne priraste $X_{t+u} - X_t = \log(S_{t+u}/S_t)$, iako je malo vjerojatno da će sam X_t biti stacionaran.
Kaže se da proces X_t ima *nezavisne priraste* ako su za svaki $u > 0$ prirasti $X_{t+u} - X_t$ nezavisni od prošlosti procesa $\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$.
U primjeru 2.1 pretpostavka da $X_t = \log S_t$ ima nezavisne priraste oblik je hipoteze o efikasnom tržištu. Primjer 1.3 također se može modelirati procesom sa stacionarnim prirastima. Mnogi procesi se definiraju pomoću svojih prirasta, vidi sekciju 3.

2.4 Markovljevo svojstvo

Veliko je pojednostavljanje ako se budući razvoj procesa može predvidjeti samo pomoću trenutnog stanja, bez pozivanja na prošlost. To se zove *Markovljevo svojstvo* i precizno znači sljedeće:

$$\mathbb{P}[X_t \in A \,|\, X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, \ldots, X_{s_n} = x_n, X_s = x] = \mathbb{P}[X_t \in A \,|\, X_s = x]$$

za sva vremena $s_1 < s_2 < \ldots s_n < s < t$, i sva stanja $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ u S i sve podskupove A od S. Primjer 1.2 može se modelirati Markovljevim svojstvom: ako dođe do potpunog oporavka iz bolesnog stanja u zdravo stanje, povijest bolesti ne bi trebala imati utjecaja na buduće zdravstveno stanje.
Rezultat 1
Proces s nezavisnim prirastima ima Markovljevo svojstvo.
Dokaz

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[X_t \in A | X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, \ldots, X_{s_n} = x_n, X_s = x] \\
= \; & \mathbb{P}[X_t - X_s + x \in A | X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, \ldots, X_{s_n} = x_n, X_s = x] \\
= \; & \mathbb{P}[X_t - X_s + x \in A | X_s = x] = \mathbb{P}[X_t \in A | X_s = x]
\end{aligned}$$

Markovljev proces s diskretnim prostorom stanja i diskretnim vremenom naziva se *Markovljevim lancem.* Njih ćemo proučavati u poglavlju 3. U slučaju diskretnog prostora stanja, ali neprekidnog vremenskog skupa upotrebljava se pojam *Markovljev proces skokova.* Njih ćemo proučavati u poglavlju 4. Konačno, neki Markovljevi procesi s neprekidnim vremenom i neprekidnim skupom stanja razmatraju se u poglavlju 6.
Koristeći pripreme iz ove sekcije nizom primjera možemo pokazati kako definirati stohastički proces.

 © Faculty and Institute of Actuaries

3 Primjeri

3.1 Bijeli šum

Promotrimo niz nezavisnih slučajnih varijabli $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ (sve definirane na istoj vjerojatnosnoj trojci). To je diskretno-vremenski stohastički proces. Markovljevo svojstvo je trivijalno zadovoljeno. Proces je stacionaran ako sve slučajne varijable X_n imaju istu distribuciju. Takvi nizovi nezavisnih jednako distribuiranih (ukratko njd) slučajnih varijabli se ponekad opisuju kao diskretno-vremenski *bijeli šum* (engl. white noise). Uglavnom se upotrebljavaju kao početna točka za konstrukciju zamršenijih procesa.

3.2 Opća slučajna šetnja

Započnimo s nizom njd slučajnih varijabli $Y_1, \dots, Y_j, \dots$ kao gore i definirajmo proces $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ s početnim uvjetom $X_0 = 0$. To je proces sa stacionarnin nezavisnim prirastima, te stoga Markovljev proces s diskretnim vremenom. Proces nije stacionaran, čak niti slabo. U specijalnom slučaju kada koraci Y_j šetnje primaju samo vrijednosti $+1$ i -1, proces je poznat kao *jednostavna slučajna šetnja*.

3.3 Pokretne sredine

Započnimo s nizom njd slučajnih varijabli Y_j, $j = -p, -p+1, \dots,$ i $p+1$ realnih brojeva $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. *Pokretna sredina reda* p (engl. moving average of order p) se definira kao

$$X_n = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j Y_{n-j}, \quad n \geq 0\,.$$

To je stacionaran proces. Općenito nije Markovljev proces (čak niti kada je $p = 1$).

3.4 Poissonov proces

Poissonov proces s parametrom λ (engl. Poisson process with rate λ) je neprekidno-vremenski proces N_t, $t \geq 0$, sa sljedećim svojstvima:

(i) $N_0 = 0$

(ii) N_t ima nezavisne priraste

(iii) N_t ima Poissonovski distribuirane stacionarne priraste

$$\mathbb{P}[N_t - N_s = n] = \frac{[\lambda(t-s)]^n e^{-\lambda(t-s)}}{n!}, \quad s < t\,.$$

To je Markovljev proces skokova sa skupom stanja $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Proces nije stacionaran, čak niti slabo. Taj proces ima fundamentalno značenje kod brojanja ukupnog broja pojavljivanja nekog događaja kroz $[0, t]$, bez obzira na prirodu događaja (automobilska nesreća, šteta za osigurateljno društvo, dolazak mušterija na servis, ...). Detaljno proučavanje tog procesa i njegovih proširenja predmet je poglavlja 4.

3.5 Složeni Poissonov proces

Započnimo s Poissonovim procesom N_t, $t \geq 0$, i nizom njd slučajnih varijabli Y_j, $j \geq 1$ (sve definirano na istom vjerojatnosnom prostoru). *Složeni Poissonov proces* (engl. compund Poisson process) je definiran kao

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j, \quad t \geq 0\,.$$

Taj proces ima nezavisne priraste, te stoga vrijedi Markovljevo svojstvo. Služi kao model ukupnog iznosa šteta za osigurateljno društvo za vrijeme perioda $[0, t]$. N_t je ukupan broj odštetnih zahtjeva kroz period, a Y_j je iznos j-te štete. Osnovni problem *klasične teorije rizika* je procjena *vjerojatnosti nesolventnosti*

$$\Psi(u) = \mathbb{P}[u + ct - X_t < 0 \ \text{ za neko } t > 0]$$

za dani početni kapital u, stopu premije c i neku fiksnu distribuciju šteta. Taj problem se proučava u poglavlju 6.

3.6 Brownovo gibanje

Brownovo gibanje (poznato također i kao Wienerov proces) je neprekidnovremenski proces B_t, $t \geq 0$, s nezavisnim stacionarnim Gaussovskim prirastima.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Uočite kako je struktura definicije povezana s onom za Poissonov proces. Brownovo gibanje ima specijalan status u teoriji vjerojatnosti. Na temelju centralnog graničnog teorema, B_t je neprekidno-vremenski limes široke klase diskretno-vremenskih procesa, vidi poglavlje 6.

4 Martingali i vremena zaustavljanja

Uz Markovljeve procese, postoji još jedna opća klasa podložna detaljnom istraživanju. To su martingali. Njihova uloga u modernoj financijskoj teoriji ne može se preuveličati. U stvari, cijela teorija određivanja cijene i zaštite (engl. hedging) financijskih izvedenica (engl. derivative) je formulirana u terminima martingala.
Jednostavnim riječima, martingal je stohastički proces kod kojeg je trenutna vrijednost optimalni procjenitelj svoje buduće vrijednosti.
Svojstva martingala oslanjaju se na primjenu uvjetnog očekivanja.

4.1 Uvjetno očekivanje

Uvjetno očekivanje $\mathbb{E}[X|Y]$ definirano u Predmetu 101 može se proširiti do uvjetovanja pomoću nekoliko slučajnih varijabli dajući $\mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$. Zadržano je važno svojstvo

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]\} = \mathbb{E}[X]\,.$$

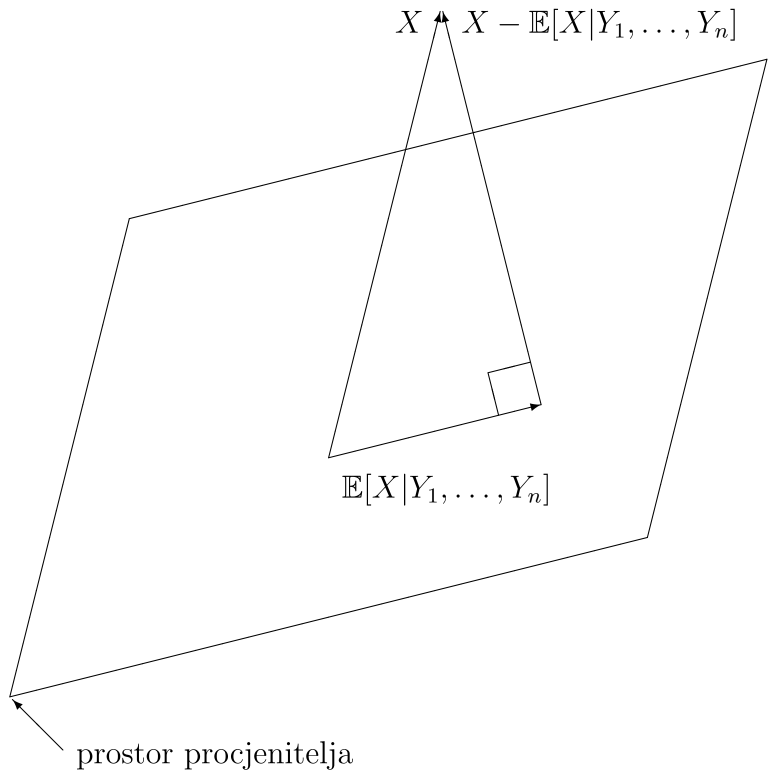
Važnost uvjetnog očekivanja dolazi iz sjedećeg svojstva:
Rezultat 2
$\mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ je optimalan procjenitelj od X zasnovan na $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ u smislu da za svaku funkciju h vrijedi

$$\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n])^2\} \leq \mathbb{E}\{(X - h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n))^2\}\,.$$

Kritičan korak u dokazu tog rezultata je
Rezultat 3
Za svaku funkciju f vrijedi sljedeće:

$$\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n])f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)\} = 0\,.$$

Ova dva rezultata imaju jednostavnu geometrijsku interpretaciju: mjerimo veličinu slučajne varijable Z računajući $\mathbb{E}[Z^2]$. Odgovarajući skalarni produkt od X i Z je $\mathbb{E}[XZ]$. Kada skalarni produkt isčezava, X i Z možemo smatrati ortogonalnima. Tim jezikom Rezultat 3 kaže da procjenitelj ima minimalnu grešku točno kada je greška procjene $X - \mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ ortogonalna na svaki dopustivi procjenitelj. Taj tip rezultata je poznat iz elementarne geometrije:



Dokaz rezultata 3: Uvjetovanjem na $Y_1, \ldots, Y_n$ dobivamo

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n])f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)\} \\
= \; & \mathbb{E}\{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_n])f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \,|\, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]\} \\
= \; & \mathbb{E}\{f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)(\mathbb{E}[X|Y_1, \ldots, Y_n] - \mathbb{E}[X|Y_1, \ldots, Y_n])\} = 0
\end{aligned}$$

Dokaz rezultata 2:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(X - h(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n))^2] \\
= \; & \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y_1, \ldots, Y_n] + \mathbb{E}[X|Y_1, \ldots, Y_n] - h(Y_1, \ldots, Y_n))^2] \\
= \; & \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y_1, \ldots, Y_n])^2] + 2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y_1, \ldots, Y_n])(\mathbb{E}[X|Y_1, \ldots, Y_n]) \\
- \; & h(Y_1, \ldots, Y_n)] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|Y_1, \ldots, Y_n] - h(Y_1, \ldots, Y_n))^2]
\end{aligned}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Zaključak slijedi iz činjenice da drugi član iščezava po Rezultatu 3, a zadnji član je pozitivan.

4.2 Martingali s diskretnim vremenom

Diskretno-vremenski stohastički proces $X_0, X_1, X_2, \ldots$ zove se *martingal* (engl. martingale), ako je

$$\mathbb{E}[|X_n|] < \infty \text{ za sve } n$$

$$\mathbb{E}[X_n | X_0, X_1, \ldots, X_m] = X_m \text{ za sve } m < n\,.$$

Riječima, sadašnja vrijednost X_m martingala je optimalni procjenitelj svoje buduće vrijednosti X_n.
Ako je diskontirana cijena finacijske imovine martingal, investicija u tu imovinu se opisuje kao neutralna prema riziku (engl. risk neutral).
Opća slučajna šetnja $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ definirana u 3.2 je martingal ako i samo ako je $\mathbb{E}[Y_j] = 0$.
Od svih svojstava martingala, najkorisnije je također i najjednostavnije.
Rezultat 4: Martingal ima konstantno očekivanje, tj. $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$ za sve n.
Dokaz: $\mathbb{E}[X_m] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[X_n|X_0, X_1, \ldots, X_m]\} = \mathbb{E}[X_n]$ za sve $m < n$. Zaključak slijedi.

4.3 Vremena zaustavljanja

Da bismo motivirali koncept vremena zaustavljanja, pretpostavimo da je X_n cijena neke dionice u trenutku n. Dioničar namjerava prodati svoje dionice čim cijena dionice nadmaši $\pounds x$ kroz dva uzastopna dana. Vrijeme prodaje T je slučajno, jer nitko ne zna kada će se specificirani događaj dogoditi (i da li će se ikada dogoditi). Međutim, to pravilo trgovanja ima smisla, jer u svakom trenutku n, gledajući trenutnu cijenu X_n i prošlu X_{n-1}, znamo da li je došlo vrijeme za akciju, tj. da li je $T = n$. Drugim riječima, indikator

$$I_{\{T=n\}} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } T = n \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

se može izraziti kao funkcija od samo X_n i X_{n-1}.
Pozitivna cjelobrojna slučajna varijabla T se zove *vrijeme zaustavljanja* (engl. stopping time) u odnosu na diskretno-vremenski stohastički proces $X_0, X_1, \ldots,$

$X_n, \ldots$, ako se za svaki n indikator $I_{\{T=n\}}$ može izraziti kao funkcija od samo $X_0, X_1, \ldots, X_n$.
Kao primjer slučajnog vremena koje *nije* vrijeme zaustavljanja, razmotrite vrijeme u kojem proces dostigne svoju maksimalnu vrijednost.
Vremena zaustavljanja su posebno korisna u vezi s martingalima. Budući da je $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$ za sve t kada je X_t martingal, primamljivo je naslutiti da će $\mathbb{E}[X_T]$ biti jednako $\mathbb{E}[X_0]$ kada je T slučajno vrijeme. Kao što sljedeći primjer pokazuje, slutnja je *pogrešna* u odsutnosti dodatnih pretpostavki.

- $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ jednostavna slučajna šetnja ($X_0 = 0$, $\mathbb{P}[Y_j = 1] = \mathbb{P}[Y_y = -1] = 1/2$)

- $T_l = \min\{n : X_n = l\}$ (to je *vrijeme prve posjete* stanju l (engl. time of the first visit), također poznato kao *vrijeme prvog pogađanja* stanja l (engl. first hitting time).

U ovom slučaju je $\mathbb{E}[X_0] = 0$, ali je $\mathbb{E}[X_{T_l}] = l$.
Pitanje kada je $\mathbb{E}[X_T]$ jednako $\mathbb{E}[X_0]$ je vrlo važno. Rješenje tog problema dano je dolje za jednostavnu situaciju. Postoje i druge verzije teorema koje pokrivaju općenitije situacije (npr. neprekidno vrijeme).
Rezultat 5 (teorem o opcionalnom zaustavljanju)
Neka je X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ martingal. Za vrijeme zaustavljanja T vrijedi $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ u slučaju da je ispunjena jedna od sljedećih pretpostavki:

(i) T je ograničeno, tj. $T \leq K$ za neku konstantu K.

(ii) X je ograničen, tj. $|X_n| \leq K$ za neku konstantu K.

Dokaz ovog rezultata izlazi van okvira predavanja.
Uočite da je čest slučaj da oba uvjeta (i) i (ii) nisu ispunjena. U tom slučaju teorem se primjenjuje na *odrezano vrijeme zaustavljanja* (engl. truncated stopping time) $T \wedge m = \min(T, m)$, te se rezanje ukloni (tj. m pusti u beskonačnost).
Korištenjem te metode može se dokazati da ako je T_l vrijeme prvog pogađanja stanja l za slučajnu šetnju s distribucijom koraka $\mathbb{P}[Y_j = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[Y_j = 1]$, tada je funkcija izvodnica momenata od T_l jednaka

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda T_l}] = \left(\frac{2p}{e^{\lambda} + \sqrt{e^{2\lambda} - 4p(1-p)}} \right)^l .$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Za dokaz te fromule korištenjem rezultata 5 potrebno je konstruirati martingal oblika $M_n = e^{-\lambda n + \gamma X_n}$ za prikladnu vrijednost γ. Mnogo zanimljivih zaključaka može se izvući iz gornje formule.
Na primjer,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_l < \infty] &= \lim_{\lambda \to 0+} \mathbb{E}[e^{-\lambda T_l}] = \left(\frac{2p}{1 + \sqrt{(1-2p)^2}} \right)^l \\
&= \left(\frac{2p}{1 + |1-2p|} \right)^l = \begin{cases} 1 & \text{ako je } p \geq 1/2 \\ \left(\frac{p}{1-p}\right)^l & \text{ako je } p < 1/2\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Također, pretpostavivši da je $p \geq 1/2$

$$\mathbb{E}[T_l] = -\frac{d}{d\lambda} \mathbb{E}[e^{-\lambda T_l}]|_{\lambda=0} = \begin{cases} \frac{l}{2p-1} & \text{ako je } p > 1/2 \\ \infty & \text{ako je } p = 1/2 \end{cases}$$

Dakle, kada je $p \geq 1/2$ svako pozitivno stanje l biti će dohvaćeno u konačnom vremenu. Međutim, kada je $p = 1/2$ potrebno prosječno vrijeme za bilo koje stanje biti će beskonačno.

4.4 Martingali s neprekidnim vremenom

Definicija martingala dana u 4.2 je preuska za mnoge primjene. Posebno, nije prikladna za proširenje na neprekidno vrijeme zbog poteškoća pri uvjetovanju na kontinuum slučajnih varijabli. Slijedi opis općenitijeg pristupa uvjetnom očekivanju i martingalima. Sljedeće strukture su u temeljima svakog stohastičkog procesa X_t:

- prostor elementarnih događaja Ω: svaki elementarni događaj $\omega \in \Omega$ određuje put $X_t(\omega)$.

- skup događaja $\mathcal{F}$: to je familija podskupova od Ω kojima se može pridružiti vjerojatnost.

- za svako vrijeme t, manja familija događaja $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$: to je skup onih događaja koji su *poznati u trenutku* t. Drugim riječima, događaj A je u $\mathcal{F}_t$ ako ovisi samo o X_s, $0 \leq s \leq t$.

Kako t raste, tako raste i $\mathcal{F}_t$: $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_u$, $t \leq u$. Uzevši zajedno, familija $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se zove *filtracija* pridružena stohastičkom procesu X_t, $t \geq 0$. Ona opisuje informaciju dobivenu promatranjem procesa.
Neke slučajne varijable biti će poznate do trenutka t: Kažemo da je Y $\mathcal{F}_t$-*izmjeriva* ako događaj $\{Y \leq y\}$ pripada $\mathcal{F}_t$ za svaku vrijednost y.
Stohastički proces Y_t, $t \geq 0$, se zove *adaptiran* filtraciji $\mathcal{F}_t$, ako je Y_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva za sve t. Ako je $\mathcal{F}_t$ filtracija generirana s X_t, tada je svaka funkcija od X_t adaptirana na $\mathcal{F}_t$.
Da bismo formulirali našu novu definiciju uvjetnog očekivanja, jednostavno inzistiramo na ključnim svojstvima rezultata 2 i 3:
uvjetno očekivanje $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$ je po definiciji optimalni procjenitelj od X među svim $\mathcal{F}_t$-izmjerivim slučajnim varijablama s konačnim očekivanjem. Ekvivalentno,

$$\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t])Y\} = 0$$

za sve $\mathcal{F}_t$-izmjerive ograničene slučajne varijable Y.
Sljedeća ključna svojstva uvjetnog očekivanja su relativno jednostavne posljedice gornje geometrijske definicije:
Rezultat 6

(i) $\mathbb{E}\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]\} = \mathbb{E}[X]$

(ii) Ako je X $\mathcal{F}_t$-izmjeriva, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] = X$

(iii) Ako je Y $\mathcal{F}_t$-izmjeriva i ograničena, tada je

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{F}_t] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$$

(iv) Ako je X nezavisna s $\mathcal{F}_t$, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X]$.

U ovom okružju, martingal je stohastički proces takav da vrijedi:

- $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$
- $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ za sve $s < t$.

Koristeći nezavisnost prirasta, može se dokazati da je Brownovo gibanje martingal. Također, ako je N_t Poissonov proces s parametrom λ, tada je $N_t - \lambda t$ martingal. Uočite da proces može biti martingal u odnosu na filtraciju generiranu drugim procesom: na primjer, ako je B_t Brownovo gibanje, $B_t^2 - t$ je martingal u odnosu na filtraciju generiranu s B_t, $t \geq 0$.

 © Faculty and Institute of Actuaries

U ovom kontekstu, vrijeme zaustavljanja u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ je pozitivna slučajna varijabla T takva da događaj $(T \leq t)$ pripada $\mathcal{F}_t$ za svaki $t \geq 0$.

POGLAVLJE 3 - MARKOVLJEVI LANCI

Nastavni ciljevi: (iii) Definirati i primjeniti Markovljev lanac.

1. Navesti osnovna obilježja modela Markovljevog lanca.
2. Navesti relacije koje predstavljaju Markovljev lanac.
3. Izračunati stacionarnu distribuciju Markovljevog lanca u najjednostavnijim slučajevima.
4. Opisati sustav iskustvenog utvrđivanja premija zasnovanog na frekvencijama u terminima Markovljevog lanca, i opisati druge jednostavne primjene.

1 Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe

Prisjetimo se iz poglavlja 2 da je termin *Markovljev lanac* rezerviran za diskretno-vremenski Markovljev proces s konačnim ili prebrojivim skupom stanja S. Prema tome, *Markovljev lanac* je niz slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sa sljedećim svojstvom:

$$\mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{m-1} = i_{m-1}, X_m = i] = \mathbb{P}[X_n = j | X_m = i] \tag{1}$$

za sva cjelobrojna vremena $n > m$ i sva stanja $i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}, i, j$ u S.
Markovljevo svojstvo (1) ima sljedeću interpretaciju: uz dano sadašnje stanje procesa $X_m = i$, dodatno znanje prošlosti irelevantno je za izračun vjerojatnosne distribucije budućih vrijednosti procesa.
Uvjetne vjerojatnosti na desnoj strani od (1) ključni su objekti za opis Markovljevog lanca. Zovemo ih *prijelazne vjerojatnosti* i označavamo ih s

$$\mathbb{P}[X_n = j | X_m = i] = p_{ij}^{(m,n)} .$$

One zadovoljavaju sustav jednažbi:
Rezultat 1:
Prijelazne vjerojatnosti Markovljevog lanca s diskretnim vremenom zadovoljavaju *Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe*:

$$p_{ij}^{(m,n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m,l)} p_{kj}^{(l,n)}$$

za sva stanja i, j u S i sva cjelobrojna vremena $m < l < n$.
Dokaz:
Zasniva se na Markovljevom svojstvu (1) i zakonu potpune vjerojatnosti u uvjetnom obliku:
ako $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ tvore potpun sustav (disjunktnih) događaja, tj.

$$\cup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega, \quad A_k \cap A_j = \emptyset, \; k \neq j \,,$$

tada za svaka dva događaja B, C:

$$\mathbb{P}[B|C] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[B|C, A_k] \, \mathbb{P}[A_k|C] \,.$$

Stoga

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n = j|X_m = i] &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}[X_n = j|X_m = i, X_l = k] \, \mathbb{P}[X_l = k|X_m = i] \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}[X_n = j|X_l = k] \, \mathbb{P}[X_l = k|X_m = i] \end{aligned}$$

koristeći Markovljevo svojstvo (uočite $l > m$).
To je traženi rezultat.
Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe omogućuju nam da izračunamo opće prijelazne vjerojatnosti pomoću *jednokoračnih prijelaznih vjerojatnosti* $p_{ij}^{(n,n+1)}$.
Zato je distribucija Markovljevog lanca potpuno određena čim je specificirano sljedeće:

- Jednokoračne prijelazne vjerojatnosti $p_{ij}^{(n,n+1)}$
- Početna vjerojatnosna distribucija $q_j = \mathbb{P}[X_0 = j]$.

Zaista, iz toga možemo izvesti distribuciju svakog puta:

$$\mathbb{P}[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] = q_{i_0} p_{i_0 i_1}^{(0,1)} p_{i_1 i_2}^{(1,2)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(n-1,n)} \,.$$

Stoga je pogodno, kadgod je moguće, odrediti stanja na način da tvore Markovljev lanac. To ilustrira primjer 3.2.

 © Faculty and Institute of Actuaries

2 Vremenski homogeni Markovljevi lanci

Do pojednostavljenja dolazi ako su jednokoračne prijelazne vjerojatnosti neovisne o vremenu:

$$p_{ij}^{(n,n+1)} = p_{ij} \tag{2}$$

U tom slučaju kažemo da je Markovljev lanac *vremenski homogen.* To će biti stalna pretpostavka u preostalom dijelu poglavlja.
Iz (2) lagano slijedi da opće prijelazne vjerojatnosti ovide samo o razlikama vremena:

$$\mathbb{P}[X_{l+m} = j | X_m = i] = p_{ij}^{(l)} . \tag{3}$$

O (3) govorimo kao o *l-koračnim prijelaznim vjerojatnostima.* Za vremenski homogen Markovljev lanac Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe glase

$$p_{ij}^{(n-m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(l-m)} p_{kj}^{(n-l)} \quad \text{za } m < l < n$$

što ima vrlo jednostavnu interpretaciju: definirajmo *prijelaznu matricu* P pomoću

$$P_{ij} = p_{ij} .$$

Tada se l-koračne prijelazne vjerojatnosti $p_{ij}^{(n,n+l)}$ mogu dobiti računajući (i, j)-to mjesto l-te potencije matrice P:

$$p_{ij}^{(l)} = {P^l}_{ij} .$$

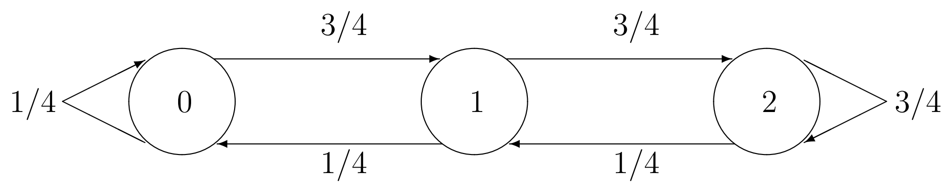
Prijelazna matrica P je kvadratna $N \times N$ matrica gdje je N broj stanja u S (moguće beskonačan).
Uvjet normalizacije $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ vrijedi za svaki i, tj. zbroj elemenata svakog reda od P mora dati jedan. Općenitije, $\sum_{j \in S} p_{ij}^{(l)} = 1$ za sve i.
Često je korisno nacrtati *prijelazni graf* Markovljevog lanca: nacrta se strelica iz i u j kadgod je $p_{ij} > 0$, što označava da je moguć direktan prijelaz iz stanja i u stanje j. Vrijednost od p_{ij} može se označiti iznad strelice.

3 Primjeri

3.1 Jednostavan model sustava bonusa

Sustav bonusa (engl. No Claim Discount system) u osiguranju motornih vozila, po kojem premija ovisi o vozačevim prošlim odštetnim zahtjevima, os-

novna je primjena Markovljevih lanaca. Izložit ćemo dva jednostavna modela i predložiti moguća poboljšanja.
Društvo za osiguranje motornih vozila svojim osiguranicima ili ne daje popust (stanje 0), ili daje 25% popusta (stanje 1), ili 50% popusta (stanje 2). Godina bez odštetnog zahtjeva rezultira prijelazom u više stanje sljedeće godine (ili zadržavanjem maksimalnog bonusa). Slično, godina s jednim ili više odštetnih zahtjeva prouzrokuje prijelaz u sljedeće niže stanje (ili zadržavanje statusa bez popusta).
Uz ta pravila, status popusta osiguranika tvori Markovljev lanac sa skupom stanja $\{0, 1, 2\}$. Ako je vjerojatnost godine bez odštetnih zahtjeva jednaka $3/4$, prijelazni graf i prijelazna matrica su



$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Vjerojatnost maksimalnog popusta u godini $n + 3$ ako je poznato da nema nikakvog popusta u godini n je

$$p_{02}^{(3)} = {P^3}_{02} = 9/16\,.$$

3.2 Drugi model za sustav bonusa

Modificirajmo prethodni model na sljedeći način: Sada imamo četiri nivoa popusta;

0: bez popusta

1: 25% popusta

2: 40% popusta

3: 60% popusta

 © Faculty and Institute of Actuaries

Pravila za kretanje po ljestvici popusta su kao i prije, ali u slučaju odštetnog zahtjeva u tekućoj godini, status popusta kreće se nadolje jedan ili dva koraka, ovisno o tome da li je prethodna godina bila bez odštetnog zahtjeva ili ne.
Uz ta pravila, status popusta X_n osiguranika *ne* čini Markovljev lanac na $S = \{0, 1, 2, 3\}$, jer

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = 0 | X_n = 2, X_{n-1} = 1] = 0\,,$$

dok je

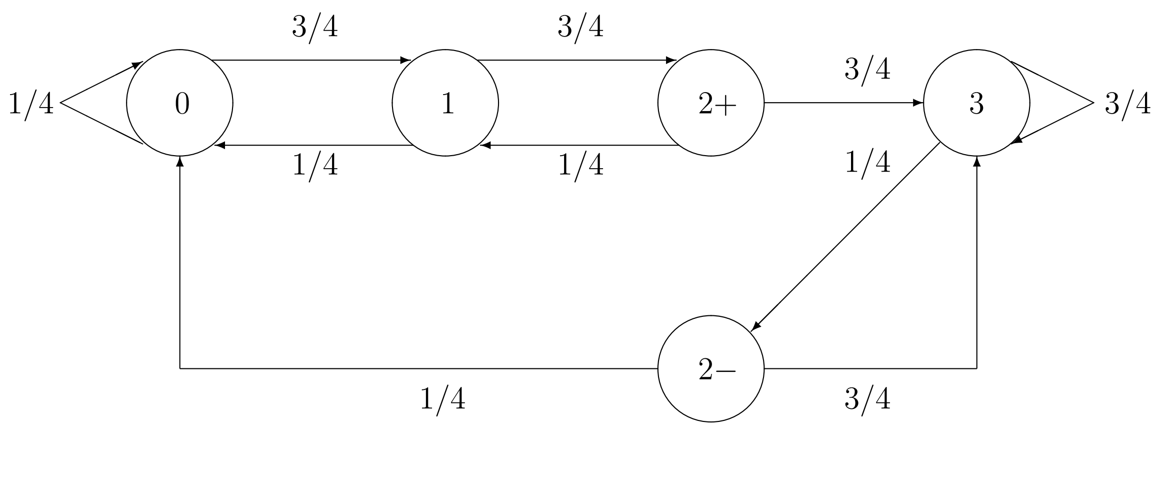
$$\mathbb{P}[X_{n+1} = 0 | X_n = 2, X_{n-1} = 3] > 0\,.$$

Za konstrukciju Markovljevog lanca Y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, potrebno je ugraditi informaciju o protekloj godini u skup stanja. U stvari, to je potrebno samo za stanje 2, koje dijelimo na:

2+: 40% popusta i bez odštetnog zahtjeva prethodne godine

2-: 40% popusta i odštetni zahtjev prethodne godine.

Pretpostavljajući kao i prije da je vjerojatnost godine bez odštetnog zahtjeva jednaka 3/4, imamo Markovljev lanac na prostoru stanja $S' = \{0, 1, 2+, 2-, 3\}$ s prijelaznim grafom i prijelaznom matricom



$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Vjerojatnost 60% popusta u godini $n+3$ uz dan popust od 25% u godini n je

$$p_{13}^{(3)} = P^3_{13} = 27/64\,.$$

Ovaj osnovni model je podložan brojnim poboljšanjima. Na primjer, vjerojatnost nesreće može ovisiti o statusu popusta, na taj način odražavajući utjecaj statusa na vjerojatnost nesreće. Također, vjerojatnost nesreće može ovisiti o vremenu odražavajući promjene u prometnim uvjetima. To vodi do vremenski nehomogenih lanaca.

3.3 Jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

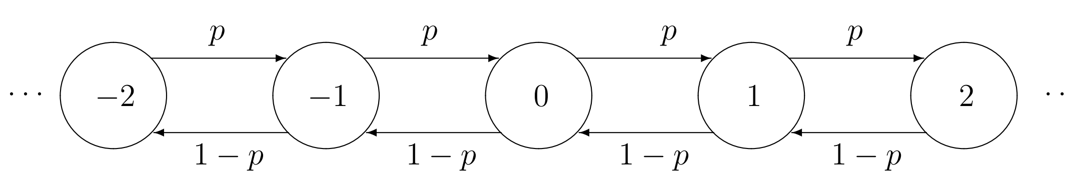
To je definirano kao $X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ gdje su slučajne varijable Y_j (koraci šetnje) nezavisne sa zajedničkom vjerojatnosnom distribucijom:

$$\mathbb{P}[Y_j = 1] = p, \quad \mathbb{P}[Y_j = -1] = 1 - p\,.$$

Vrijedi Markovljevo svojstvo:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[X_n = j | X_1 = i_1, \dots, X_{m-1} = i_{m-1}, X_m = i] \\ = \; & \mathbb{P}[X_m + Y_{m+1} + \cdots + Y_n = j | X_1 = i_1, \dots, X_{m-1} = i_{m-1}, X_m = i] \\ = \; & \mathbb{P}[Y_{m+1} + \cdots + Y_n = j - i] = \mathbb{P}[X_n = j | X_m = i] \end{aligned}$$

Prijelazni graf i prijelazna matrica su beskonačni:



 © Faculty and Institute of Actuaries

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & 0 & p & & & & \\ & 1-p & 0 & p & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1-p & 0 & p & \\ & & & & 1-p & 0 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Prijelazne vjerojatnosti za n koraka mogu se izračunati kao

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} (1-p)^{\frac{n+i-j}{2}} & \text{ako je } 0 \le n+j-i \le 2n \text{ i } n+j-i \text{ paran} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Za izvod te formule bolje je zaključivati vjerojatnosno nego računati P^n: prijelaz iz i u j u n koraka ekvivalentan je m^+ pozitivnih koraka i m^- negativnih koraka uz

$$m^+ - m^- = j - i, \quad m^+ + m^- = n\,.$$

Uočite da je jednostavna slučajna šetnja, uz to što je vremenski homogena, također i *prostorno homogena*:

$$p_{ij}^{(n)} = p_{i+r\,j+r}^{(n)}\,.$$

3.4 Jednostavna slučajna šetnja na $\{0, 1, 2, \ldots, b\}$

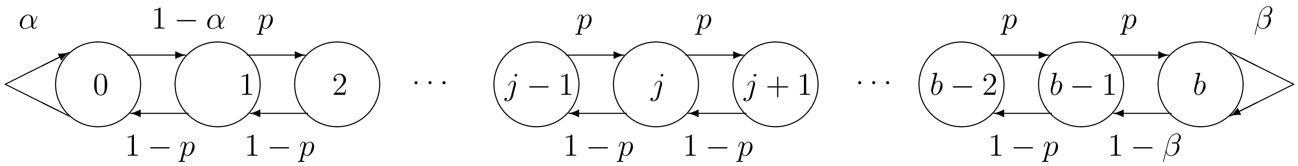
To je slično prethodnom primjeru, uz razliku da moramo specificirati *granične uvjete* u 0 i b. Oni će ovisiti o interpretaciji danoj lancu. Često korišteni granični uvjeti uključuju:

Reflektirajuća granica: $\mathbb{P}[X_{n+1} = 1 | X_n = 0] = 1$

Apsorbirajuća granica: $\mathbb{P}[X_{n+1} = 0 | X_n = 0] = 1$

Mješovita granica: $\mathbb{P}[X_{n+1} = 0 | X_n = 0] = \alpha$, $\mathbb{P}[X_{n+1} = 1 | X_n = 0] = 1 - \alpha$

Slučajna šetnja s apsorbirajućom granicom u 0 i b može se koristiti za opis kockarevog bogatstva: b je njegovo željeno bogatstvo, a 0 predstavlja propast. U oba slučaja, dostizanje granice znači ostajanje tamo zauvijek.
S mješovitim graničnim uvjetima prijelazni graf je



a prijelazna matrica

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & & & & \\ 1-p & 0 & p & & & \\ & 1-p & 0 & p & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-p & 0 & p \\ & & & & 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

Uvjeti s reflektirajućom, odnosno apsorbirajućom, granicom dobiju se kao specijalni slučajevi uzimajući α i β jednakim 0, odnosno 1. Jednostavni modela sustava bonusa iz primjera 3.1 je još jedan praktičan primjer ograničene slučajne šetnje.

3.5 Model sklonosti nesrećama

Za danog vozača, u svakom periodu j ili nema nesreće ($Y_j = 0$), ili se dogodi nesreća ($Y_j = 1$). Vjerojatnost nesreće u sljedećem periodu procjenjuje se koristeći vozačeve dosadašnje podatke kako slijedi (sve varijable y_j su ili 0 ili 1):

$$\mathbb{P}[Y_{n+1} = 1 | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_n = y_n] = \frac{f(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}{g(n)}$$

gdje su f, g dvije dane rastuće funkcije koje zadovoljavaju $0 \leq f(m) \leq g(m)$. Naravno,

$$\mathbb{P}[Y_{n+1} = 0 | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_n = y_n] = 1 - \frac{f(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}{g(n)}.$$

Ovisnost o dosadašnjim podacima znači da $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ *nema* Markovljevo svojstvo. Međutim, ukupan broj vozačevih nesreća,

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

je Markovljev lanac s prostorom stanja $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$. To je zato, jer

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[X_{n+1} = 1 + x_n | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n] \\ = & \mathbb{P}[Y_{n+1} = 1 | Y_1 = x_1, Y_2 = x_2 - x_1, \ldots, Y_n = x_n - x_{n-1}] \\ = & \frac{f(x_n)}{g(n)} \end{aligned}$$

Uočite da je lanac vremenski homogen samo ako je $g(n)$ konstantno.

4 Asimptotska vjerojatnosna distribucija Markovljevog lanca

4.1 Stacionarna vjerojatnosna distribucija

Kažemo da je π_j, $j \in S$, *stacionarna vjerojatnosna distribucija* za Markovljev lanac s prijelaznom matricom P, ako vrijede sljedeći uvjeti za sve $j \in S$:

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \qquad (4) \\ \pi_j &\geq 0 \\ \sum_{j \in S} \pi_j &= 1 \end{aligned}$$

Uočite da se (4) može zapisati u kompaktnom obliku $\pi = \pi P$ gdje se na π gleda kao na vektor redak.
Interpretacija od (4) je *da ako uzmemo π kao našu početnu vjerojatnosnu distribuciju*, to jest $\mathbb{P}[X_0 = i] = \pi_i$, tada je distribucija u trenutku 1 ponovno dana s π:

$$\mathbb{P}[X_1 = j] = \sum_{i \in S} \mathbb{P}[X_1 = j | X_0 = i] \, \mathbb{P}[X_0 = i] = \sum_{i \in S} p_{ij} \pi_i = \pi_j \, .$$

Isto vrijedi za sva vremena $n \geq 1$, tako da je π *invarijantna* vjerojatnosna distribucija. U stvari, lanac je tada *stacionaran proces* u smislu poglavlja 2. Općenito, Markovljev lanac ne mora imati stacionarnu distribuciju, te ako ona postoji ne mora biti jedinstvena. Na primjer, ne postoji stacionarna distribucija za primjer 3.3, dok u primjeru 3.4 jedinstvenost ovisi o vrijednostima α i β. Kada je prostor stanja *konačan*, situacija je jednostavna.

Rezultat 2:
Markovljev lanac s konačnim prostorom stanja ima barem jednu stacionarnu distribuciju.
Dokaz ovog rezultata izlazi van okvira predavanja.
Kao primjer, izračunajmo stacionarnu distribuciju za model bonusa iz primjera 3.2. Jednadžbe (4) glase:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_{2-} \\
\pi_1 &= \frac{3}{4}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_{2+} \\
\pi_{2+} &= \frac{3}{4}\pi_1 \\
\pi_{2-} &= \frac{1}{4}\pi_3 \\
\pi_3 &= \frac{3}{4}\pi_{2+} + \frac{3}{4}\pi_{2-} + \frac{3}{4}\pi_3
\end{aligned} \tag{5}$$

Ovaj linearni sustav nije linearno nezavisan, budući da zbrajanjem svih jednadžbi dolazimo do identiteta (to je opće obilježje jednadžbi $\pi = \pi P$ zbog svojstva $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$).
Zbog toga možemo odbaciti bilo koju od jednadžbi, recimo posljednju.
Uočite također da je zbog linearnost svaki umnožak rješenja od (5) opet rješenje. Jedinstvenost proizlazi iz normalizacije $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$. Zbog toga je dobra praksa naći rješenje za komponente od π u terminima jedne od njih (recimo π_1 ovdje), o kojoj ćemo govoriti kao o radnoj varijabli. Vrijednost radne varijable određuje se u zadnjem koraku iz normalizacije.
Sažmimo sada metodu i iskoristimo je na gornjem primjeru.

Korak 1: Odbacimo jednu od jednadžbi. Ovdje su prva ili zadnja očigledan izbor. Izabiremo zadnju.

Korak 2: Odaberimo jedan od π_j-tova kao radnu varijablu. Ovdje su $\pi_1, \pi_{2+}, \pi_{2-}$ ili π_3 razumni izbori. Izabiremo π_1.

Korak 3: Prepišemo preostale jednadžbe pomoću radne varijable.

$$\begin{array}{rcrcl}
3\pi_0 & - & \pi_{2-} & = & \pi_1 \\
3\pi_0 & + & \pi_{2+} & = & 4\pi_1 \\
 & & \pi_{2+} & = & \frac{3}{4}\pi_1 \\
4\pi_{2-} & - & \pi_3 & = & 0
\end{array}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Korak 4: Riješimo jednadžbe pomoću radne varijable.

Općenito to možemo učiniti pomoću Gaussovskih eliminacija, ali ovdje su jednadžbe tako jednostavne da se rješenja mogu pročitati ako ih gledamo u pravom redoslijedu:

$$\pi_{2+} = \frac{3}{4}\pi_1, \quad \pi_0 = \frac{\pi_1}{4}(4 - \frac{3}{4}) = \frac{13}{12}\pi_1$$

$$\pi_{2-} = \pi_1(-1 + \frac{13}{4}) = \frac{9}{4}\pi_1, \quad \pi_3 = 9\pi_1 \,.$$

Korak 5: Izračunamo radnu varijablu.

$$\begin{aligned} \pi &= \pi_1(13/12, 1, 3/4, 9/4, 9) \\ \sum_j \pi_j &= \frac{\pi_1}{12}(13 + 12 + 9 + 27 + 108) = \frac{169}{12}\pi_1 = 1 \\ \pi_1 &= \frac{12}{169} \end{aligned}$$

Korak 6: Spojimo rezultate zadnja dva koraka i dobijemo rješenje.

$$\pi = (\frac{13}{169}, \frac{12}{169}, \frac{9}{169}, \frac{27}{169}, \frac{108}{169}) \tag{6}$$

Korak 7: Ukoliko želimo, iskoristimo odbačenu jednadžbu za provjeru rezultata.

$$108 = 3/4 \times 9 + 3/4 \times 27 + 3/4 \times 108$$

ili

$$432 = 27 + 81 + 324$$

(kao što je prije objašnjeno, normalizacija ne igra nikakvu ulogu u sustavu (5)).

Pitanje *jedinstvenosti* stacionarne distribucije je delikatnije. Mi ćemo razmatrati samo *ireducibilne* lance definirane svojstvom da je svako stanje j dostižno iz nekog drugog stanja i. Drugim riječima, lanac je ireducibilan, ako za dani par stanja i, j postoj cijeli broj n takav da je $p_{ij}^{(n)} > 0$. O tom svojstvu se uobičajeno može dati sud već iz prijelaznog grafa. Markovljevi lanci iz primjera 3.1, 3.2, 3.3 su ireducibilni. Takav je i 3.4 osim u slučaju

da je bilo koja granica apsorbirajuća ($\alpha = 1$ ili $\beta = 1$). Takva apsorbirajuća stanja pojavljuju se u mnogim situacijama (npr. propast).
Rezultat 3:
Ireducibilan Markovljev lanac s konačnim skupom stanja ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju.
Dokaz ovog rezultata izlazi van okvira predavanja.
Uobičajeno je da Markovljev lanac s beskonačnim skupom stanja nema stacionarnu distribuciju, čak i kada je ireducibilan. To je slučaj kod jednostavne slučajne šetnje u primjeru 3.3.

4.2 Asimptotsko ponašanje Markovljevog lanca

Prirodno je očekivati da distribucija Markovljevog lanca teži prema invarijantnoj distribuciji π za velika vremena. To je razlog zašto je stacionarna distribucija toliko važna. Ako navedena konvergencija vrijedi, $p_{ij}^{(n)}$ će biti blizu π_j za asimptotski veliki dio vremena.
Izvjesni fenomeni donekle kompliciraju gornju sliku. Stanje i je *periodično* s periodom $d > 1$ ako je povratak u i moguć samo u broju koraka koji je umnožak od d (tj. $p_{ij}^{(n)} = 0$ osim za $n = md$ za neki cijeli broj m). Samo za aperiodična stanja postoji $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.
Koristeći prijelazni graf može se provjeriti da su u primjerima 3.1 i 3.2 sva stanja aperiodična, dok u primjeru 3.3 sva stanja imaju period 2. Konačno, u primjeru 3.4 sva su stanja aperiodična osim kada su i α i β ili 0 ili 1.
Važno je uočiti da za ireducibilan Markovljev lanac sva stanja imaju isti period (ili su sva aperiodična).
Sada možemo iznijeti rezultat o konvergenciji prema stacionarnoj vjerojatnosnoj distribuciji.
Rezultat 4:
Neka je $p_{ij}^{(n)}$ n-koračna prijelazna vjerojatnost ireducibilnog aperiodičnog Markovljevog lanca na konačnom prostoru stanja. Tada je za sve i, j, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, gdje je π stacionarna vjerojatnosna distribucija.
Uočite da je gornji limes neovisan od početnog stanja i. Dokaz ovog rezultata izlazi van okvira predavanja.

 © Faculty and Institute of Actuaries

POGLAVLJE 4 - MARKOVLJEVI PROCESI SKOKOVA

Nastavni ciljevi: (iv) Definirati i primjeniti Markovljev proces.

1. Navesti osnovna obilježja modela Markovljevog procesa.
2. Definirati Poissonov proces, izvesti distribuciju broja događaja u danom vremenskom intervalu, izvesti distribuciju vremena između događaja, i primjeniti te rezultate.
3. Izvesti Kolmogorovljeve jednadžbe za Markovljev proces s vremenski neovisnim, te vremenski i dobno ovisnim prijelaznim intenzitetima.
4. Riješiti Kolmogorovljeve jednadžbe u jednostavnim slučajevima.
5. Navesti diferencijske jednažbe koje se mogu koristiti za numeričko rješavanje Kolmogorovljevih jednadžbi.
6. Navesti jednostavan numerički algoritam koji se može koristiti za rješavanje jednadžbi u složenijim slučajevima.
7. Opisati jednostavan model doživljenja, model bolesti i model braka pomoću Markovljevih procesa i opisati druge jednostavne primjene.
8. Navesti Kolmogorovljeve jednadžbe za model u kojem prijelazni intenziteti ne ovise samo o dobi i vremenu, već također i o duljini boravka u jednom ili više stanja.
9. Opisati modele bolesti i braka pomoću Markovljevih procesa ovisnih o duljini boravka i opisati jednostavne primjene.

1 Kolmogorovljeve jednadžbe

Markovljev proces X_t, $t \geq 0$, s neprekidnim vremenom i diskretnim (tj. konačnim ili prebrojivim) skupom stanja S naziva se *Markovljev proces skokova*. Njegove prijelazne vjerojatnosti

$$P_{ij}(s,t) = \mathbb{P}[X_t = j | X_s = i] \quad (s \leq t)$$

zadovoljavaju *Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe*

$$P_{ij}(s,t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(s,u) P_{kj}(u,t) \quad \forall s < u < t\,. \tag{1}$$

To je neposredna posljedica Markovljevog svojstva, vidi poglavlje 3. Označimo li sa $P(s,t)$ matricu s elementima $P_{ij}(s,t)$, jednadžba (1) se može zapisati

$$P(s,t) = P(s,u)P(u,t) \quad \forall s < u < t\,. \tag{2}$$

Ukoliko znamo *prijelaznu matricu* $P(s,t)$ i početnu distribuciju $q_i = \mathbb{P}[X_0 = i]$, koristeći Markovljevo svojstvo možemo naći općenite vjerojatnosti za proces X_t. Na primjer, za $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$\mathbb{P}[X_0 = i, X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2, \ldots, X_{t_n} = j_n] = q_i p_{ij_1}(0,t_1) p_{j_1 j_2}(t_1,t_2) \ldots p_{j_{n-1} j_n}(t_{n-1},t_n)$$

i

$$\mathbb{P}[X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2, \ldots, X_{t_n} = j_n] = \sum_{i \in S} q_i p_{ij_1}(0,t_1) p_{j_1 j_2}(t_1,t_2) \ldots p_{j_{n-1} j_n}(t_{n-1},t_n)$$

Mi ćemo *pretpostaviti* da su funkcije $P_{ij}(s,t)$ neprekidno diferencijabilne. Uočimo li da je

$$P_{ij}(s,s) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } i \neq j \\ 1 & \text{ako je } i = j \end{cases} \tag{3}$$

to povlači postojanje sljedećih funkcija

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s,t)|_{t=s} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(s,s+h) - \delta_{ij}}{h}\,. \tag{4}$$

Ekvivalentno, vrijede sljedeće relacije za $h \to 0$ ($h > 0$):

$$P_{ij}(s,s+h) = \begin{cases} h\sigma_{ij}(s) + o(h) & \text{za } i \neq j \\ 1 + h\sigma_{ii}(s) + o(h) & \text{za } i = j \end{cases} \tag{5}$$

gdje tvrdnja da je $f(h) = o(h)$ za $h \to 0$ znači $\lim_{h \to 0} f(h)/h = 0$.
Interpretacija prvog retka u (5) je jednostavno da je vjerojatnost prijelaza iz i u j za vrijeme kratkog vremenskog intervala $[s, s+h]$ proporcionalna s h. Stoga naziv *prijelazni intenzitet* za $\sigma_{ij}(s)$. Prijelazni intenziteti imaju fundamentalno značenje, budući da u potpunosti određuju distribuciju Markovljevih procesa skokova. Da bismo to vidjeli, derivirajmo (1) u odnosu na t, te stavimo $u = t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s,t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(s,t) \sigma_{kj}(t)\,. \tag{6}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

To su *Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed.* One se mogu zapisati u kompaktnom obliku kao

$$\frac{\partial}{\partial t}P(s,t) = P(s,t)A(t) \tag{7}$$

gdje je $A(t)$ matrica s elementima $\sigma_{ij}(t)$.
U izvođenju (6) implicitno je pretpostavljeno da je prostor stanja konačan. U tom slučaju, za sve fiksne s, i, (6) je *konačan* linearan sustav *običnih* diferencijalnih jednadžbi (u stvari, varijabla s i indeks i pojavljuju se samo u početnom uvjetu (3)). Prema tome, za dane prijelazne intenzitete $\sigma_{ij}(t)$, jednadžba (6) ima jedinstveno rješenje kompatibilno s (3). Zbog tog razloga se Markovljevi modeli redovito formuliraju jednostavno specificiranjem njihovih prijelaznih intenziteta $\sigma_{ij}(t)$.
Deriviranjem (2) s obzirom na s, a ne t (i stavljajući $u = s$), možemo dobiti Kolmogorovljeve *jednadžbe unatrag*:

$$\frac{\partial}{\partial s}P(s,t) = -A(s)P(s,t)\,. \tag{8}$$

U "normalnim" okolnostima, sustavi unaprijed i unatrag su ekvivalentni. To je posebno tako kada su prijelazni intenziteti ograničeni

$$\sup_{i,j} |\sigma_{ij}(t)| < \infty \quad \forall t \geq 0\,. \tag{9}$$

Međutim, kada (9) ne vrijedi, sustav unatrag ima fundamentalnije značenje, vidi primjer 4.4.
Uočimo konačno da iz (5) slijedi da je $\sigma_{ij}(s) \geq 0$, $i \neq j$, ali je $\sigma_{ii}(s) \leq 0$. U stvari, deriviranje identiteta $\sum_{j\in S} P_{ij}(s,t) = 1$ s obzirom na t u $t = s$ povlači

$$\sigma_{ii}(s) = -\sum_{j\neq i} \sigma_{ij}(s)\,. \tag{10}$$

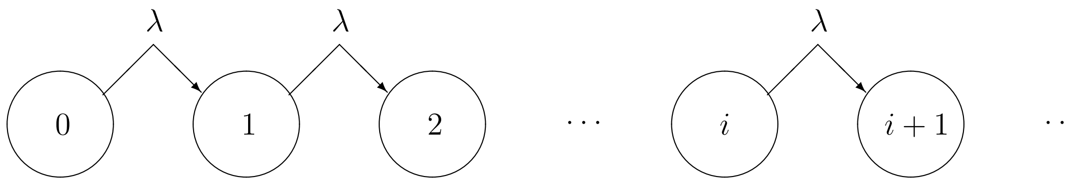
Stoga svaki redak matrice $A(s)$ ima zbroj nula.

2 Poissonov proces

Promotrajmo Markovljev proces skokova sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ i prijelaznim intenzitetima:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{za } j = i+1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Reprezentacija pomoću dijagrama je



a matrica A u Kolmogorovljevim jednadžbama je:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & 0 \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & -\lambda & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{11}$$

Nije nimalo očito da se proces definiran gore podudara s Poissonovim procesom karakteriziranim u poglavlju 2 kao proces s nezavisnim stacionarnim Poissonovski distribuiranim prirastima. Međutim, može se dokazati da su dvije definicije ekvivalentne.

Poissonov proces se uglavnom primjenjuje kao *brojeći proces*: X_t modelira broj pojavljivanja nekog događaja (kao na primjer, automobilskih nesreća) kroz $[0, t]$.

Iz (11) dobivamo jednadžbe unaprijed

$$\begin{cases} P'_{i0}(t) = -\lambda P_{i0}(t) \\ P'_{ij}(t) = \lambda P_{i\,j-1}(t) - \lambda P_{ij}(t),\ j > 0\,. \end{cases} \tag{12}$$

Uz početan uvjet $P_{i0}(0) = \delta_{i0}$, prva jednadžba daje $P_{i0}(t) = \delta_{i0}e^{-\lambda t}$. Nadalje računamo $P_{0j}(t)$ za sve j. Jednadžbu

$$P'_{0j}(t) = \lambda P_{0\,j-1}(t) - \lambda P_{0j}(t) \tag{13}$$

rješavamo metodom *varijacije konstanti*. Budući da je opće rješenje homogene jednadžbe $P'_{0j}(t) = \lambda P_{0j}(t)$ jednako $\alpha e^{-\lambda t}$, tražimo partikularno rješenje od (13) u obliku $\alpha_j(t)e^{-\lambda t}$. Uvrštavanje toga u (13) daje jednadžbu $\alpha'_j(t) = \lambda\alpha_{j-1}(t)$ koja dopušta rješenje $\alpha_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}$. Prema tome, opće rješenje od (13) je

$$P_{0j}(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t} + \alpha e^{-\lambda t}\,,$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

a početni uvjet $P_{0j}(0) = \delta_{0j}$ daje $\alpha = 0$. Na isti način može se naći

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{za } j \geq i \\ 0 & \text{za } j < i\,. \end{cases} \tag{14}$$

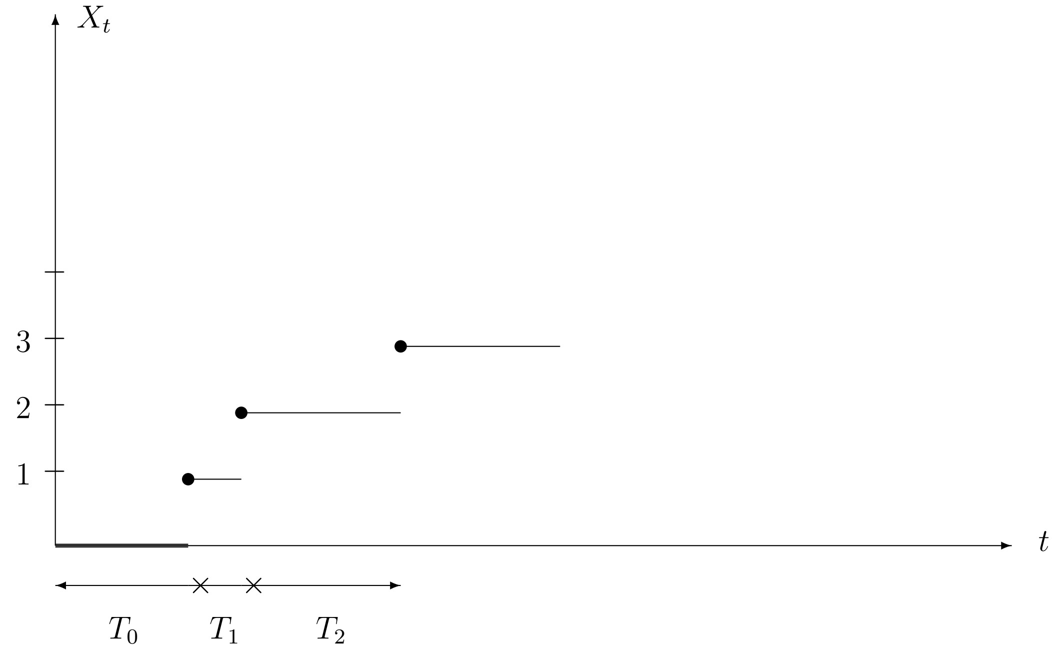
Dokaz tog rezultata izlazi van okvira predavanja.

Sada možemo razmatrati svojstva prirasta procesa. Prva stvar koju treba primjetiti je da je proces, uz to što je vremenski homogen, također *prostorno homogen*: $P_{ij}(t) = P_{i+l\,j+l}(t)$. Koristeći to i Markovljevo svojstvo, imamo za sve $s_0 < s_1 < \cdots < s_n < s < t$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[X_t - X_s = j | X_{s_0} = i_0, X_{s_1} = i_1, \ldots, X_{s_n} = i_n, X_s = i] \\ = \; & \mathbb{P}[X_t = i + j | X_s = i] = P_{i\,i+j}(t-s) = P_{0j}(t-s) \\ = \; & \frac{(\lambda(t-s))^j}{j!} e^{-\lambda(t-s)}\,. \end{aligned}$$

To dokazuje da su prirasti $X_t - X_s$ nezavisni od prošlosti procesa $(X_u, u \leq s)$ i imaju stacionarnu Poissonovu distribuciju. Zbog toga se naš Markovljev proces skokova podudara s Poissonovim procesom definiranim u poglavlju 2.

Budući da se Poissonov proces X_t mijenja samo skokovima za jedan na gore, njegovi putovi su u potpunosti karakterizirani vremenima u kojima se skokovi dogode. Označimo s $T_0, T_1, T_2, \ldots$ uzastopna *vremena između događaja* (ili vremena zadržavanja).



Uočite da izabiremo (po konvenciji) da su putovi od X_t zdesna neprekidni tako da je $X_{T_0} = 1, X_{T_0+T_1} = 2, \ldots$.
Lagano je karakterizirati vjerojatnosnu distribuciju vremena T_j koje Poissonov proces provede u stanju j

$$\mathbb{P}[T_0 > t | X_0 = 0] = \mathbb{P}[X_t = 0 | X_0 = 0] = e^{-\lambda t}.$$

Prema tome, T_0 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ. Štoviše,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[T_1 > t | X_0 = 0, T_0 = s] = \mathbb{P}[X_{t+s} = 1 | X_0 = 0, T_0 = s] \\ = \; & \mathbb{P}[X_{t+s} - X_s = 0 | X_0 = 0, T_0 = s] = \mathbb{P}[X_{t+s} - X_s = 0] \\ = \; & P_{00}(t) = e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

gdje treća jednakost odražava nezavisnost prirasta $X_{t+s} - X_s$ od prošlosti procesa (do i uključivši vrijeme s). Gornji račun dokazuje dva rezultata odjednom: T_1 je nezavisno od T_0 i ima jednaku distribuciju. Slično, $T_0, T_1, \ldots, T_j, \ldots$, je niz nezavisnih eksponencijalno distribuiranih slučajnih varijabli s parametrom λ.

 © Faculty and Institute of Actuaries

3 Struktura Markovljevih procesa skokova

Iako mnoge aktuarske primjene uključuju prijelazne intenzitete ovisne o dobi, glavne ideje je najbolje uvesti u jednostavnom slučaju *vremenski homogenog* procesa kod kojeg je $P_{ij}(s,t) = P_{ij}(0,t-s) = P_{ij}(t-s)$, te su kao rezultat toga prijelazni intenziteti σ_{ij} neovisni o vremenu.

3.1 Vremenski homogen slučaj

Eksponencijalni karakter vremena zadržavanja Poissonovog procesa nije slučajan: *svojstvo zaborava*

$$\mathbb{P}[T > t + u | T > t] = \mathbb{P}[T > u] \tag{15}$$

koje karakterizira eksponencijalno distribuirane slučajne varijable je nužan zahtjev za vremena zadržavanja vremenski homogenog Markovljevog procesa. Promotrimo prvo vrijeme zadržavanja $T_0 = \inf\{t : X_t \neq X_0\}$.

Rezultat 1:
Prvo vrijeme zadržavanja vremenski homogenog Markovljevog procesa skokova s prijelaznim intenzitetima σ_{ij} je eksponenciajlno distribuirano s parametrom $\lambda_i = -\sigma_{ii} = \sum_{j\neq i} \sigma_{ij}$. Drugim riječima,

$$\mathbb{P}[T_0 > t | X_0 = i] = e^{-\lambda_i t}\,.$$

Dokaz:
Događajem $\{T_0 > t\} = \{X_s = X_0, 0 \leq s \leq t\}$ je teško rukovati, jer uključuje kontinuum vremena $0 \leq s \leq t$. Stoga ćemo ga aproksimirati diskretizacijom vremena. Definirajmo događaje

$$B_n = \{X_{lt/2^n} = X_0, l = 1, 2, \ldots, 2^n\}\,.$$

Sada možemo računati

$$\mathbb{P}[B_n | X_0 = i] = \left(P_{ii}(\frac{t}{2^n})\right)^{2^n} = \left(1 + \sigma_{ii}\frac{t}{2^n} + o(\frac{1}{2^n})\right)^{2^n}\,.$$

Ali uočite da je $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \ldots$, te $\{T_0 > t\} = \cap_{m=1}^{\infty} B_m$, te zato

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[T_0 > t | X_0 = i] = \mathbb{P}[\cap_{m=1}^{\infty} B_m | X_0 = i] \\ = & \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\cap_{m=1}^{n} B_m | X_0 = i] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[B_n | X_0 = i] \\ = & \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sigma_{ii}\frac{t}{2^n} + o(\frac{1}{2^n})\right)^{2^n} = e^{\sigma_{ii} t} = e^{-\lambda_i t}\,. \end{aligned}$$

Kod Poissonovog procesa vrijeme skokova je sve, ali općenito moramo također karakterizirati i stanje u koje proces skače. To je izuzetno jednostavno: skok se događa iz $X_0 = i$ u $X_{T_0} = j$ s vjerojatnošću *proporcionalnom prijelaznom intenzitetu* σ_{ij} i štoviše, X_{T_0} je *nezavisno* od vremena zadržavanja T_0. Da bismo to vidjeli, promatrajmo za $j \neq i$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[X_{t+h} = j, t < T_0 \leq t+h | X_0 = i] = \mathbb{P}[X_{t+h} = j, T_0 > t | X_0 = i] \\ = \; & \mathbb{P}[X_{t+h} = j | X_0 = i, T_0 > t] \, \mathbb{P}[T_0 > t | X_0 = i] \\ = \; & \mathbb{P}[X_{t+h} = j | X_s = i, 0 \leq s \leq t] e^{-\lambda_i t} = P_{ij}(h) e^{-\lambda_i t} \, . \end{aligned}$$

Sada podijelimo sa h i pustimo $h \to 0$: zajednička vjerojatnosna distribucija/gustoća od X_{T_0} i T_0 je uvjetno na $X_0 = i$ jednaka

$$\sigma_{ij} e^{-\lambda_i t} \, .$$

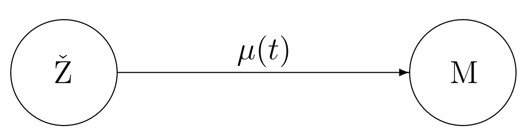
Drugim riječima, ona je produkt gustoće vremena zadržavanja $\lambda_i e^{-\lambda_i t}$ i σ_{ij}/λ_i. To dokazuje dva rezultat odjednom: vjerojatnost skoka iz stanja i u stanje j je

$$\mathbb{P}[X_{T_0} = j | X_0 = i] = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i} \quad (j \neq i)$$

i štoviše, X_{T_0} je nezavisno s T_0.
Kao rezultat Markovljevog svojstva, slika je ista za uzastopne skokove: nakon što je ušao u neko stanje j, proces tamo ostaje eksponencijalno distribuirano vrijeme s parametrom λ_j. Tada skače u stanje k s vjerojatnošću $\frac{\sigma_{jk}}{\lambda_j}$.
Uočite da je srednje vrijeme zadržavanja u stanju j jednako $1/\lambda_j$. Toga se je važno sjetiti kada se prijelaznim intenzitetima pridružuju numeričke vrijednosti.

3.2 Nehomogen slučaj

Promatrajmo sljedeći *model doživljenja*: prijelaz iz stanja živ $\check{Z}$ u stanje mrtav M događa se s intenzitetom $\mu(t)$.



 © Faculty and Institute of Actuaries

Drugim riječima, $\mu(t)$ je intenzitet smrtnosti.
Budući da je $A(t) = \begin{pmatrix} -\mu(t) & \mu(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, jednadžbe unaprijed daju

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{\check{Z}\check{Z}}(s,t) = -\mu(t) P_{\check{Z}\check{Z}}(s,t)\,.$$

Rješenje koje odgovara početnom uvjetu $P_{\check{Z}\check{Z}}(s,s) = 1$ je

$$P_{\check{Z}\check{Z}}(s,t) = e^{-\int_s^t \mu(x)\,dx}\,. \tag{16}$$

Ekvivalentno, vjerojatnost da će osoba dobi s preživjeti daljni period duljine barem w je

$${}_w p_s = P_{\check{Z}\check{Z}}(s, s+w) = e^{-\int_s^{s+w} \mu(x)\,dx} = e^{-\int_0^w \mu(s+y)\,dy}\,. \tag{17}$$

Formula (17) ilustrira potrebu za vremenski ovisnim intenzitetima u smrtnosti i mnogim drugim aktuarskim modelima: konstanta μ bi dovela do vjerojatnosti doživljenja ${}_w p_s$ neovisne o dobi, što je apsurdan rezultat.
U obliku u kojem je napisana, (17) je svojstvena specifičnom modelu doživljenja koji promatramo. Međutim, ako se pravilno reinterpretira, to je samo primjer opće formule.
Za općeniti Markovljev proces skokova X_t, definirajmo *rezidualno vrijeme zadržavanja* R_s kao (slučajni) iznos vremena između s i sljedećeg skoka:

$$\{R_s > w, X_s = i\} = \{X_u = i, s \le u \le s + w\}\,.$$

Formula (17) daje vjerojatnost da je $R_s > w$ ako je dano stanje $\check{Z}$ u trenutku s. Slijedeći iste korake kao u dokazu rezultata 1, općenito se može dokazati da je

$$\mathbb{P}[R_s > w | X_s = i] = e^{-\int_s^{s+w} \lambda_i(u)\,du}\,. \tag{18}$$

Štoviše, karakterizacija stanja

$$X_s^{(+)} = X_{s+R_s}$$

u koje proces skoči, slična je homogenom slučaju:

$$\mathbb{P}[X_s^{(+)} = j | X_s = i, R_s = w] = \frac{\sigma_{ij}(s+w)}{\lambda_i(s+w)}\,. \tag{19}$$

Gornje nije samo zgodna slika ponašanja Markovljevog procesa skokova: to je također jaki računski alat. Zaista, uvjetovanjem na R_s i $X_s^{(+)}$, te korištenjem zakona potpune vjerojatnosti, imamo

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(s,t) &= \mathbb{P}[X_t = j | X_s = i] \\
&= \sum_{l \neq i} \int_0^{t-s} \mathbb{P}[X_t = j | X_s = i, R_s = w, X_s^{(+)} = l] \sigma_{il}(s+w) e^{-\int_s^{s+w} \lambda_i(u)\,du}\, dw \\
&= \sum_{l \neq i} \int_0^{t-s} P_{lj}(s+w,t) \sigma_{il}(s+w) e^{-\int_s^{s+w} \lambda_i(u)\,du}\,. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

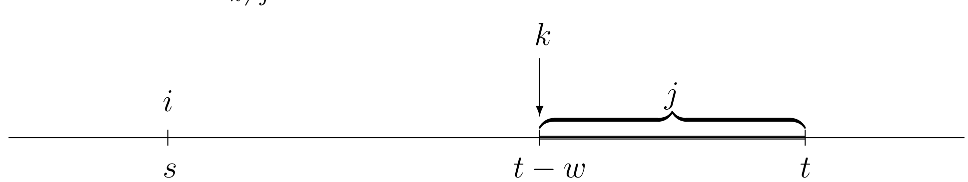
To je *integrirani oblik jednadžbe unatrag*, što se može provjeriti deriviranjem po t. Formula može izgledati zastrašujuće, ali odgovara intuiciji: budući da je $j \neq i$, proces mora u nekom trenutku iskočiti iz i. Po (18), prvi skok nakon vremena s dogodi se u $s+w$ s vjerojatnosnom gustoćom

$$\lambda_i(s+w) e^{-\int_s^{s+w} \lambda_i(u)\,du}\,.$$

Po (19) proces će skočiti u l kroz vremenski period $[s, s+w]$ s vjerojatnosti $\frac{\sigma_{ij}(s+w)}{\lambda_i(s+w)}$. Preostaje izvesti prijelaz iz l u j kroz preostali vremenski period $[s+w, t]$:

Kada je $i = j$ imamo dodatni član $e^{-\int_s^t \lambda_i(u)\,du}$, jer proces može ostati u stanju i kroz cijeli period $[s,t]$.
Ako se umjesto na prvi skok nakon s fokusiramo na zadnji skok prije t, možemo dobiti intuitivni izvod *integriranog oblika jednadžbe unaprijed.*
Za $i \neq j$ to izgleda

$$P_{ij}(s,t) = \sum_{k \neq j} \int_0^{t-s} P_{ik}(s, t-w) \sigma_{kj}(t-w) e^{-\int_{t-w}^{t} \lambda_j(u)\,du}\, dw\,. \qquad (21)$$



 © Faculty and Institute of Actuaries

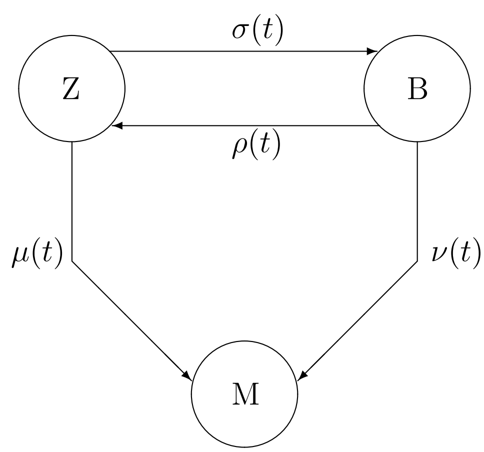
Za potpun izvod te jednadžbe treba se pozvati na svojstva *tekućeg vremena zadržavanja* C_t, naime vremena između zadnjeg skoka i t:

$$\{C_t \geq w, X_t = j\} = \{X_u = j, t - w \leq u \leq t\}.$$

4 Primjene

4.1 Bolest i smrt

Opišimo stanja osobe kao "zdrav", "bolestan" ili "mrtav". Za dane vremenski ovisne (tj. dobno ovisne) prijelazne intenzitete, možemo konstruirati Markovljev proces skokova sa skupom stanja $\{Z, B, M\}$:



Matrica $A(t)$ u Kolmogorovljevim jednadžbama je

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\sigma(t) - \mu(t) & \sigma(t) & \mu(t) \\ \rho(t) & -\rho(t) - \nu(t) & \nu(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Specijalno, $\lambda_Z(t) = \sigma(t) + \mu(t)$, $\lambda_B(t) = \rho(t) + \nu(t)$, $\lambda_M = 0$.
Najjednostavnije je izračunati vjerojatnosti za ostati neprekidno zdrav ili neprekidno bolestan kroz $[s, t]$. Koristeći (18) te vjerojatnosti su

$$\mathbb{P}[R_s > t - s | X_s = Z] = e^{-\int_s^t (\sigma(u) + \mu(u))\, du} \tag{22}$$

i

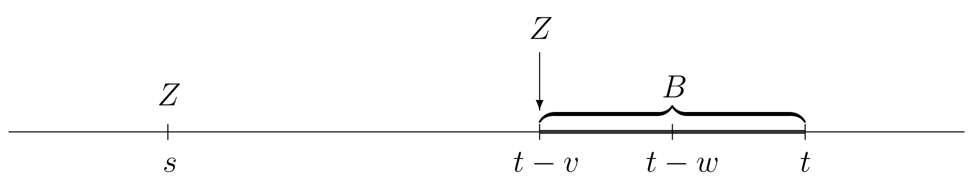
$$\mathbb{P}[R_s > t - s | X_s = B] = e^{-\int_s^t (\rho(u) + \nu(u))\, du} .$$

Prijelazne vjerojatnosti mogu se povezati jedna s drugom kao u (20) i (21). Na primjer

$$P_{ZB}(s,t) = \int_0^{t-s} P_{BB}(s+w,t)\sigma(s+w) e^{-\int_s^{s+w} (\sigma(u)+\mu(u))\, du}\, dw .$$

Lako se može rukovati dodatnim uvjetima na rezidualno ili tekuće vrijeme zadržavanja. Promotrimo, na primjer, vjerojatnost da je osoba bolesna u trenutku t i da je bila bolesna barem w, ako je dano da je osoba zdrava u trenutku s. Ta vjerojatnost je:

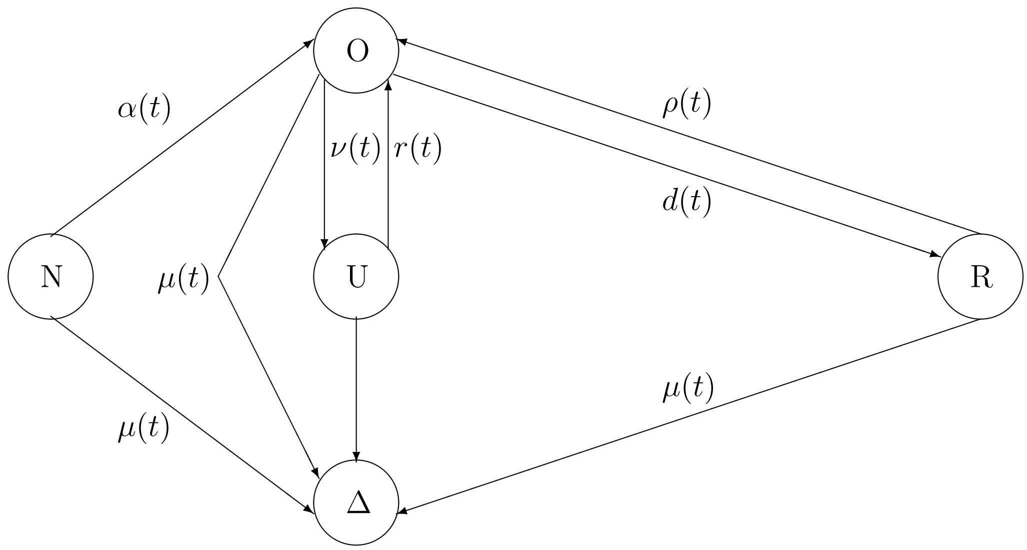
$$\mathbb{P}[X_t = B, C_t > w | X_s = Z] = \int_0^{t-s} P_{ZZ}(s, t-v)\sigma(t-v) e^{-\int_{t-v}^t (\rho(u)+\nu(u))\, du}\, dv .$$



4.2 Brak

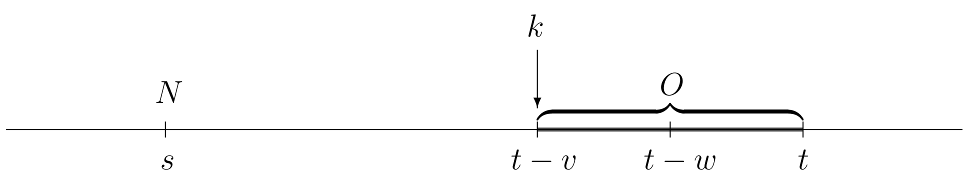
Opišimo bračni status neke osobe kao jedan od sljedećih: neženja (nikad oženjen) (N), oženjen (O), udovac (U), rastavljen (R), mrtav (Δ). Možemo definirati Markovljev proces skokova kao na slici:

 © Faculty and Institute of Actuaries



Zbog jednostavnosti smo uzeli da intenzitet smrti $\mu(t)$ ne ovisi o bračnom statusu. Ovaj model se može proučavati točno kao i primjer 4.1. Na primjer, vjerojatnost da je osoba oženjena u trenutku t i da je bila oženjena kroz period trajanja barem w, ako je dano da je osoba neženja u trenutku s je (uz pretpostavku $w < t - s$):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_t = O, C_t > w | X_s = N] &= \int_s^{t-w} (P_{NN}(s, t-v)\alpha(t-v) + P_{NU}(s, t-v) r(t-v) \\ &+ P_{NR}(s, t-v)\rho(t-v))\, e^{-\int_{t-v}^{t} (\mu(u)+\nu(u)+\gamma(u))\, du}\, dv\,.\end{aligned}$$

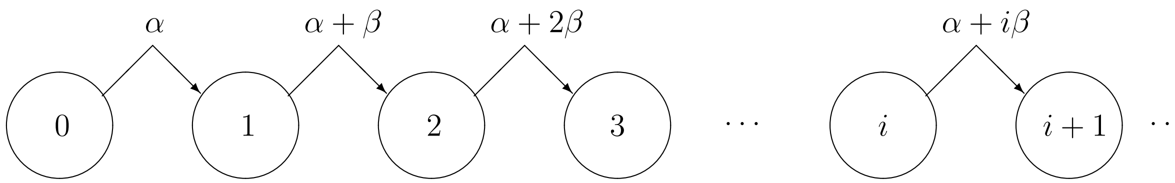


gdje je k bilo koje od stanja koje vodi do O, naime N, U i R.

4.3 Sklonost nesrećama

Promotrimo sljedeći model za ukupan broj nesreća X_t koje ima neki vozač za vrijeme perioda $[0, t]$: X_t je vremenski homogen Markovljev proces skokova s prijelaznim intenzitetima ($i \neq j$):

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \alpha + i\beta & \text{ako je } j = i+1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$



Drugim riječima, intenzitet nesreća raste linearno s vozačevom povijesti nesreća. Prijelazna matrica procesa je

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & & & 0 \\ & -\alpha-\beta & \alpha+\beta & & \\ & & -\alpha-2\beta & \alpha+2\beta & \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

a jednadžbe unaprijed za $P_{0j}(t)$ su

$$\begin{aligned} P'_{00}(t) &= -\alpha P_{00}(t) \\ P'_{0j}(t) &= (\alpha + (j-1)\beta)P_{0\,j-1}(t) - (\alpha + j\beta)P_{0j}(t), \quad j > 0\,. \end{aligned}$$

Te jednadžbe se rješavaju isto kao za Poissonov proces: tražimo rješenje u obliku $P_{0j}(t) = \gamma_j(t)e^{-(\alpha+j\beta)t}$. Slijedi da nepoznate funkcije γ_j trebaju zadovoljavati $\gamma'_j(t) = \gamma_{j-1}(t)(\alpha + (j-1)\beta))e^{\beta t}$.
To rješavamo rekurzivno, uzevši u obzir početni uvjet $\gamma_j(0) = \delta_{0j}$:

$$\gamma_0(t) = 1, \gamma_1(t) = \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1), \gamma_2(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{2\beta^2}(e^{\beta t} - 1)^2, \ldots,$$
$$\gamma_j(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)\ldots(\alpha+(j-1)\beta)}{j!\beta^j}(e^{\beta t} - 1)^j\,.$$

Prema tome rješenje je

$$P_{0j}(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)\ldots(\alpha+(j-1)\beta)}{j!\beta^j}e^{-\alpha t}(1 - e^{-\beta t})^j\,.$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

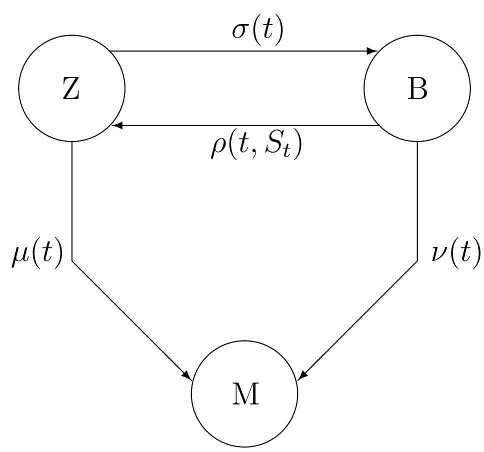
Napomena:
Budući da je $\lambda_i = \alpha + i\beta$, vremena zadržavanja T_i imaju svojstvo da je $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[T_i] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha+i\beta} = \infty$. Da smo izabrali $\sigma^*_{ij} = \alpha + i^2\beta$ $(j = i+1)$, imali bismo $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[T^*_i] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha+i^2\beta} < \infty$, te stoga $\mathbb{P}[\sum_{i=0} T^*_i < \infty] = 1$. Drugim riječima, beskonačno mnogo prijelaza se događa u konačnom vremenu. To vodi na $\sum_{j=0}^{\infty} P^*_{ij}(t) < 1$ i do nejedinstvenosti rješenja Kolmogorovljevih jednadžbi: zaista, definicija procesa mora se dopuniti dodavanjem graničnog stanja (koje se dostiže nakon beskonačno mnogo prijelaza) i specificiranjem prijelaznog pravila iz njega. Rezultirajuće prijelazne vjerojatnosti će zadovoljavati originalne jednadžbe unatrag, ali ne jednadžbe unaprijed.

4.4 Bolest i smrt ovisni o trajanju

U primjer 4.1, Markovljevo svojstvo povlači

$$\mathbb{P}[X_t = Z | X_s = B, C_s = w] = \mathbb{P}[X_t = Z | X_s = B] \, .$$

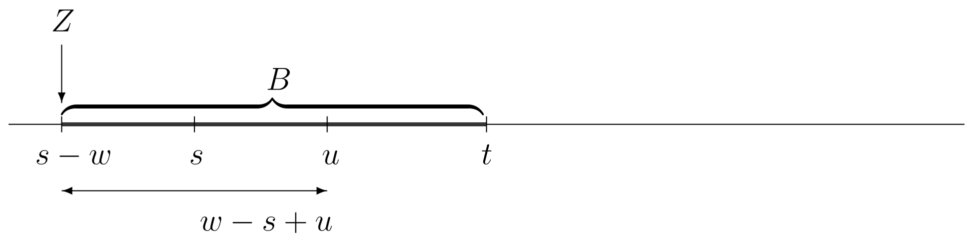
Drugim riječima, trajanje tekuće bolesti nema utjecaja na buduće zdravstvene prognoze. Da bismo uklonili to neželjeno svojstvo, modificiramo model dopuštajući da intenziteti prijelaza iz stanja B ovise o tekućem vremenu zadržavanja C_t.



Može se učiniti da nas to vodi van dometa ovog poglavlja, budući da se vrijednosti od C_t sada moraju uključiti u stanja, tako da prostor stanja prestaje biti prebrojivim. Međutim, okvir sekcije 3.2 se još uvijek može koristiti, uz uvjet pažljivog uvjetovanja na relevantno tekuće vrijeme zadržavanja.

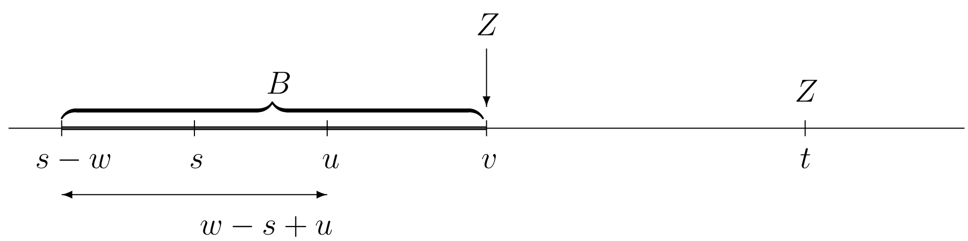
U stvari, budući da prijelazni intenziteti σ i μ ne ovise o C_t, vjerojatnost ostajanja neprekidno zdrav kroz $[s, t]$ je kao i prije dana s (22). S druge strane, za izračunati vjerojatnost da se ostane neprekidno bolestan kroz $[s, t]$ uz dan tekući period bolesti $[s - w, s]$, trebamo obnavljati vrijednosti od ρ i ν kako bolest napreduje:

$$\mathbb{P}[X_t = B, R_s > t - s | X_s = B, C_s = w] = e^{-\int_s^t (\rho(u, w-s+u) + \nu(u, w-s+u))\, du}.$$



Za završni primjer, vjerojatnost biti zdrav u trenutku t ako je dano da je osoba bolesna u trenutku s, sa tekućim trajanjem bolesti w može se zapisati kao:

$$\begin{aligned} P_{B_w Z}(s, t) &= \mathbb{P}[X_t = Z | X_s = B, C_s = w] \\ &= \int_0^t e^{-\int_s^v (\rho(u, w-s+u) + \nu(u, w-s+u))\, du} \rho(v, w - s + v) P_{ZZ}(v, t)\, dv. \end{aligned}$$



5 Numeričke metode

Općenito se linearne obične diferencijalne jednadžbe s vremenski ovisnim koeficijentima ne mogu riješiti eksplicitno pomoću elementarnih funkcija. Stoga ne možemo očekivati da ćemo naći rješenje Kolmogorovljevih jednadžbi u analitičkom obliku, osim u slučaju da prijelazni intenziteti imaju vrlo specijalan oblik (na primjer konstante). Ukratko ćemo opisati tri numeričke metode.

Ovo su samo primjeri metoda, dok će odabir metode ovisiti o okolnostima.

 © Faculty and Institute of Actuaries

5.1 Eulerova metoda

Metoda se sastoji jednostavno u zamjeni derivacije po t u jednadžabi unaprijed (7) konačnom diferencijom. Drugim riječima, izaberemo korak h i računamo $P(s, s + mh)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, pomoću sljedeće rekurzivne sheme:

$$\begin{cases} P(s, s + (m + 1)h) = P(s, s + mh) + hP(s, s + mh)A(s + mh) \\ P(s, s) = I \end{cases}$$

gdje je I jedinična matrica s elementima δ_{ij}.
Ta metoda vodi do grešaka reda h, drugim riječima, polovljenje veličine koraka prepolovit će grešku. U točkama koje nisu točke mreže $t = s + mh$, $P(s, t)$ se procjenjuje linearnom interpolacijom.

5.2 Runge-Kutta metoda četvrtog reda

To je značajno poboljšanje u odnosu na Eulerovu metodu, budući da je pridružena greška sada reda h^4 (tj. polovljenje veličine korak će smanjiti grešku za faktor 16).
Slijedi shema:

$$\begin{cases} P(s, s + (m + 1)h) = P(s, s + mh) + \frac{h}{6}[C_1(s, m) + 2C_2(s, m) + 2C_3(s, m) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C_4(s, m)] \\ P(s, s) = I \end{cases}$$

gdje je

$$\begin{aligned} C_1(s, m) &= P(s, s + mh)A(s + mh) \\ C_2(s, m) &= [P(s, s + mh) + \frac{h}{2}C_1(s, m)]A(s + (m + \frac{1}{2})h) \\ C_3(s, m) &= [P(s, s + mh) + \frac{h}{2}C_2(s, m)]A(s + (m + \frac{1}{2})h) \\ C_4(s, m) &= [P(s, s + mh) + hC_3(s, m)]A(s + mh)\,. \end{aligned}$$

5.3 Integralni oblik

Drugi pristup je krenuti od integralnog oblika Kolmogorovljevih jednadžbi unaprijed (ili unatrag), vidi sekciju 3.2:

$$P_{ik}(s, t) = \delta_{ik} e^{-\int_s^t \lambda_i(u)\,du} + \sum_{j \neq k} \int_0^{t-s} P_{ij}(s, t - w)\sigma_{jk}(t - w) e^{-\int_{t-w}^t \lambda_k(u)\,du}\,dw\,.$$

Niz uzastopnih aproksimacija $P_{ij}^{(n)}(s,t)$ definiran dolje ima korisno svojstvo *rasta* prema rješenju kada $n \to \infty$ (provjerite indukcijom):

$$\begin{cases} P_{ik}^{(0)}(s,t) & = & \delta_{ik} e^{-\int_s^t \lambda_i(u)\,du} \\ P_{ik}^{(n+1)}(s,t) & = & \delta_{ik} e^{-\int_s^t \lambda_i(u)\,du} + \sum_{j \neq k} \int_0^{t-s} P_{ij}^{(n)}(s,t-w)\sigma_{jk}(t-w) e^{-\int_{t-w}^t \lambda_k(u)\,du}\,dw\,. \end{cases}$$

Za numeričku implementaciju integrale treba aproksimirati, na primjer korištenjem Simpsonovog složenog pravila: za numeričko računanje integrala $\int_a^b f(x)\,dx$, podijelimo interval $[a,b]$ na $2m$ intervala jednake duljine

$$h = \frac{b-a}{2m}$$

i koristimo

$$\frac{h}{3}(f(a)+f(b)) + \frac{2h}{3}\sum_{j=1}^{m-1} f(a+2jh) + \frac{4h}{3}\sum_{j=1}^{m} f(a+(2j-1)h)$$

kao aproksimaciju od $\int_a^b f(x)\,dx$. Možete očekivati grešku reda h^4.
Ta metoda može se koristiti u primjeru 4.5, te u 4.1 i 4.3.

 © Faculty and Institute of Actuaries

POGLAVLJE 5 - GLAVNI POJMOVI U OSNOVI ANALIZE VREMENSKIH NIZOVA

Nastavni ciljevi: (v) Definirati i primjeniti glavne pojmove na kojima se temelji analiza modela vremenskih nizova.

1. Objasniti pojam i opća svojstva stacionarnog, $I(0)$, i integriranog, $I(1)$, jednodimenzionalnog vremenskog niza.

2. Objasniti pojam stacionarnog slučajnog niza.

3. Objasniti pojam filtera primjenjenog na stacionaran slučajan niz.

4. Upoznati notaciju za operator pomaka unatrag, operator diferenciranja unatrag, te pojmove korijena karakteristične jednadžbe vremenskog niza.

5. Objasniti pojmove i osnovna svojstva autoregresivnih (AR) vremenskih nizova, pokretnih sredina (MA), autoregresivnih pokretnih sredina (ARMA) i autoregresivnih integriranih pokretnih sredina (ARIMA).

6. Objasniti pojmove i svojstva diskretnih slučajnih šetnji i slučajnih šetnji s normalno distribuiranim prirastima, sa i bez pomaka.

7. Objasniti osnovne pojmove vremenskih nizova u frekvencijskoj domeni.

8. Objasniti osnovne pojmove višedimenzionalnih vremenskih nizova.

9. Objasniti pojam kointegriranog vremenskog niza.

10. Pokazati da izvjesni jednodimenzionalni vremenski nizovi imaju Markovljevo svojstvo i opisati kako preurediti jednodimenzionalni vremenski niz u višedimenzionalni Markovljev model.

11. Skicirati proces identifikacije, procjene i dijagnoze vremenskih nizova, kriterije za odabir među modelima i dijagnostički test koji se može primjeniti na ostatke vremenskog niza nakon procjene.

12. Objasniti osnovne pojmove modela prijenosne funkcije.

13. Opisati ukratko druge nestacionarne, nelinearne modele vremenskih nizova.

14. Opisati jednostavne primjene modela vremenskih nizova, uključujući slučajnu šetnju, autoregresivne i kointegrirane modele primjenjene na investicijske varijable.

1 Svojstva jednodimenzionalnih vremenskih nizova

Jednodimenzionalni vremenski niz (engl. univariate time series) je niz opažanja $\{x_n\}_{n=1}^N$, svako zabilježeno u pravilnim vremenskim intervalima $t_0 + n\tau$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Na primjer, niz dnevnih zaključnih cijena dionica, p_n, tvori vremenski niz gdje je τ jedan (tržišni) dan, a t_0 dan prije nego što je zabilježeno prvo opažanje. Niz mjesečnih iznosa inflacije tvori vremenski niz gdje je τ jedan mjesec. Karakteristično obilježje vremenskog niza je to da je red opažanja važan i nije nebitan kao kod slučajnog uzorka. Na primjer, lista dnevnih povrata na FTSE 100 dionice nekog određenog dana nije vremenski niz, i red podataka u listi je irelevantan. U isto vrijeme, lista vrijednosti od FTSE 100 indeksa uzeta nekog određenog dana u razmacina od jedne minute jeste vremenski niz, i uređaj podataka u listi je od najvećeg značaja.

Točnu vrijednost k-tog opažanja x_k je u pravilu teško predvidjeti u trenutku bilježenja prethodnog opažanja. Zbog tog razloga se vremenski nizovi modeliraju slučajnim procesima s diskretnim vremenom

$$\{X_n\}_{n=1}^N \equiv \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}, \tag{1}$$

koji se također nazivaju i nizovima slučajnih varijabli. Određen vremenski niz (niz opažanja, ili podataka, $\{x_n\}_{n=1}^N$) se tada interpretira kao realizacija slučajnog procesa $\{X_n\}_{n=1}^N$. U modernoj literaturi se termin vremenski niz često koristi i za podatke, i za proces kojeg su ti podaci realizacija.

Često je pogodno koristiti općenitije klase slučajnih procesa nego one dane s jednakosti (1). Modelirat ćemo vremenski niz nizom slučajnih varijabli. To može biti bilo konačan niz slučajnih varijabli

$$\{X_n\}_{n=S}^T \equiv \{X_S, X_{S+1}, X_{S+2}, \ldots, X_T\},$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

bilo jednostrano beskonačan niz slučajnih varijabli

$$\{X_n\}_{n=S}^{\infty} \equiv \{X_S, X_{S+1}, X_{S+2}, \dots, \},$$

bilo dvostrano beskonačan niz slučajnih varijabli

$$\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \equiv \{\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \dots\}.$$

Postoje dva razloga za uvođenje beskonačnih nizova slučajnih varijabli. Prvo, ako je dan proizvoljan konačan vremenski niz, možemo koristiti prikladan dio beskonačnog niza kao model za taj niz. Na taj način možemo koristiti jedan beskonačan niz slučajnih varijabli za modeliranje vremenskih nizova bilo koje duljine. Drugi razlog je da se nekim matematičkim pojmovima, kao konvergenciji prema ekvilibriju, može dati precizno značenje samo u slučaju beskonačnog niza slučajnih varijabli.
Stacionarni ili $I(0)$ vremenski nizovi su opisani u sekciji 2. Njihovo dugoročno ponašanje se ne mijenja. Ako se drugi niz dobije sumiranjem uzastopnih članova $I(0)$ niza, rezultat je integrirani ili $I(1)$ niz. Njegovo dugoročno ponašanje općenito nije stacionarno, nego se mijenja s vremenom kako se dodaje više članova. Njih ćemo diskutirati u sekciji 4.

2 Stacionarni slučajni nizovi

Stacionarni i slabo stacionarni slučajni nizovi su definirani u poglavlju 2. Teorija stacionarnih slučajnih procesa igra važnu ulogu u teoriji vremenskih nizova, jer se kalibracija modela vremenskih nizova (to jest, procjena vrijednosti parametara modela korištenjem povijesnih podataka) može provesti samo u slučaju stacionarnih vremenskih nizova. Nestacionarni vremenski nizovi trebaju se transformirati u stacionarne, prije nego što se može provesti kalibracija.
Kovarijanca bilo kojeg para elemenata X_r i X_s stacionarnog niza $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ovisi o r i s samo kroz razliku $r-s$. Zbog tog svojstva možemo definirati autokovarijacijsku funkciju $\gamma(h)$ stacionarnog slučajnog procesa $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ kako slijedi

$$\gamma(r-s) \equiv \mathrm{cov}(X_s, X_r) = \mathbb{E}(X_s X_r) - \mathbb{E}(X_s)\mathbb{E}(X_r).$$

Zajednička varijanca elemenata stacionarnog procesa dana je sa

$$\gamma(0) = \mathbb{E}(X_r^2) - \mathbb{E}(X_r)^2.$$

Autokorelacijska funkcija stacionarnog procesa definira se sa

$$\rho_n = \frac{\gamma(n)}{\gamma(0)}\,.$$

Primjer. Jednostavna familija slabo stacionarnih procesa su procesi bijelog šuma. Slučajni proces $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je bijeli šum, ako je $\mathbb{E}(e_n) = \mu$ za svaki n, i

$$\gamma(h) = \text{cov}(e_n, e_{n+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{ako je } h = 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

U slučaju $\mu = 0$, bijeli šum $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ se zove centrirani bijeli šum (engl. zero-mean white noise). Važan predstavnik procesa bijelog šuma je niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem μ i varijancom σ^2.

Pojam nenegativno definitne funkcije igra važnu ulogu u teoriji vremenskih nizova. Funkcija $f(k)$ definirana na cjelobrojnim vrijednostima k zove se nenegativno definitna, ako za svaki skup realnih brojeva $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, i bilo koji skup cijelih brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_n$, funkcija zadovoljava

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_j \alpha_l f(k_j - k_l) \geq 0\,.$$

Sljedeća svojstva su posljedica definicije autokovarijacijske funkcije.

Rezultat 2.1.

Autokovarijacijska funkcija $\gamma(n)$ stacionarnog slučajnog procesa je:

(a) parna funkcija, to jest, $\gamma(n) = \gamma(-n)$;

(b) nenegativno definitna funkcija.

Dokaz. Budući da autokovarijacijska funkcija $\gamma(n) = \text{cov}(X_l, X_{l+n})$ ne ovisi o l, uočimo da imamo

$$\gamma(n) = \text{cov}(X_{l-n}, X_{l-n+n}) = \text{cov}(X_{l-n}, X_l) = \text{cov}(X_l, X_{l-n}) = \gamma(-n)\,.$$

Stoga je autokovarijacijska funkcija parna funkcija.

Za dokaz druge tvrdnje propozicije, promotrimo proizvoljan konačan skup realnih brojeva $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, i bilo koji skup cijelih brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Označimo $\mu = \mathbb{E}(X_k)$. Očekivana vrijednost nenegativne slučajne varijable je nenegativna. Zato

$$\mathbb{E}\left\{\left[\sum_{l=1}^{n} \alpha_l (X_{k_l} - \mu)\right]^2\right\} \geq 0\,.$$

S druge strane

$$\mathbb{E}\left\{\left[\sum_{l=1}^{n} \alpha_l (X_{k_l} - \mu)\right]^2\right\} = \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{n} \alpha_l (X_{k_l} - \mu) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (X_{k_j} - \mu)\right]$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_l \alpha_j \mathbb{E}[(X_{k_l} - \mu)(X_{k_j} - \mu)] = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_l \alpha_j \gamma(k_l - k_j)\,.$$

Stoga je autokovarijacijska funkcija zaista nenegativno definitna.
Druga važna karakteristika stacionarnog slučajnog procesa je parcijalna autokorelacijska funkcija $\{\phi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ definirana sa

$$\phi(k) = \frac{\det\ P_k^*}{\det\ P_k}\,.$$

gdje je P_k $k \times k$ autokorelacijska matrica

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

to jest, $P_k = \{p_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{k\ \ k}$, gdje je $p_{i,j} = \rho_{|i-j|}$, a P_k^* je P_k u kojoj je zadnji stupac zamijenjen sa $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)^T$. Na primjer, $\phi(1) = \rho_1$, i

$$\phi(2) = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}\,.$$

Analitičko računanje determinante u definiciji parcijalne autokorelacijske funkcije je često teško. Unatoč tome, parcijalna autokorelacijska funkcija $\phi(k) \equiv \phi_{k,k}$

može se računati rekurzivno iz relacija

$$\phi_{k,k} = \begin{cases} \rho_1 & \text{ako je } k = 1 \\ \frac{\rho_k - \sum_{n=1}^{k-1} \phi_{k-1,n}\rho_{k-n}}{1 - \sum_{n=1}^{k-1} \phi_{k-1,n}\rho_n} & \text{ako je } k = 2, 3, \dots , \end{cases}$$

i $\phi_{k,n} = \phi_{k-1,n} - \phi_{k,k}\phi_{k-1,k-n}$, za $n = 1, 2, \dots, k-1$.
Jedan od glavnih problema u teoriji vremenskih nizova je pronaći model kojeg je dani vremenski niz $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ vjerojatna realizacija. Iako je potpuna specifikacija takvog modela delikatan problem, neke važne karakteristike se mogu procijeniti korištenjem sljedećih standardnih recepata. Zajedničko očekivanje (ili sredina) stacionarnog modela može se procijeniti korištenjem *očekivanja uzorka*

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} x_k \, .$$

Autokovarijacijska funkcija $\gamma(k)$ može se procijeniti korištenjem autokovarijacije uzorka

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{l=k+1}^{T} (x_l - \hat{\mu})(x_{l-k} - \hat{\mu}) \, .$$

Autokorelacijska funkcija ρ_k može se procijeniti korištenjem

$$r_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \, .$$

Parcijalna autokorelacijska funkcija može se procijeniti korištenjem

$$\hat{\phi}(k) = \frac{\det \hat{P}_k^*}{\det \hat{P}_k} \, ,$$

gdje su $\hat{P}_k$ i $\hat{P}_k^*$ iste matrice kao P_k i P_k^* ali u kojima su ρ_k zamijenjeni svojim procjeniteljima r_k.

3 Filtriranje vremenskih nizova

Operacije na vremenskom nizu $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (ulazni vremenski niz) se ponekad zovu filtriranje. *Stvaranje* novog vremenskog niza $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (izlazni vremenski niz) korištenjem linearnih težinskih suma $y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_{n-k}$ je primjena linearnog filtera, gdje se težine $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ identificiraju s filterom. Cilj

 © Faculty and Institute of Actuaries

filtriranja je modifikacija podataka (ulaznog niza) da bi se ispunili određeni ciljevi, ili da bi se razotkrila specifična obilježja podataka. Važan predmet je konstrukcija linearnih filtera za specijalne svrhe koji mogu ispuniti te ciljeve. Na primjer, važan problem u analizi ekonomskih vremenskih nizova je otkrivanje, izolacija i otklanjanje determinističkog trenda.
U praksi, filtrirani vremenski niz je konačan niz $\{x_n\}_{n=1}^{N}$, filter $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ sadrži samo konačan (i relativno mali u usporedbi s N) broj komponenata različitih od nule, $a_k = 0$ za $k > t$ i $k < s$. Novo stvoren vremenski niz $\{y_n\}_{n=t+1}^{N-s}$ je kraći od originalnog.
Apsolutno sumabilan vremenski niz $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (to jest vremenski niz sa svojstvom $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty$) može se reprezentirati u obliku

$$x_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega n} f(\omega)\, d\omega$$

gdje je

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\omega k}\,.$$

Ako se vremenski niz $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ koristi kao ulaz za filter $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, tada su elementi izlaznog vremenskog niza dani s

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x_{n-k} = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\omega(n-k)} f(\omega)\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} A(\omega) f(\omega)\, d\omega \tag{2}$$

gdje je

$$A(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ik\omega}\,.$$

Funkcija $A(\omega)$ zove se prijenosna funkcija linearnog filtera $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Prijenosna funkcija $A(\omega)$ u potpunosti karakterizira filter $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Zaista, ako znamo prijenosnu funkciju filtera, tada možemo naći izlazni niz koristeći jednakost (2) Štoviše, filtrirane težine su jedinstveno određene prijenosnom funkcijom pomoću izraza

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} A(\omega)\, d\omega\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\,.$$

Primjer 3.1.

Naročito jednostavan primjer je filter potpunog odgađanja (engl. perfect delay). Promotrimo vremenski nix $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Vremenski niz odgođen za period τ je vremenski niz $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ s komponentama $y_n = x_{n-\tau}$. Filter $\{a_k\}_{-\infty}^{\infty}$ definiran je sa

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{ako je } k = \tau, \\ 0 & \text{inače}. \end{cases}$$

Prijenosna funkcija $A(\omega)$ potpunog odgađanja dana je s $A(\omega) = e^{-i\omega\tau}$.

Primjer 3.2.

Drugi jednostavan primjer linearnog filtera je centrirana pokretna sredina (engl. moving average). Filter je definiran s

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2q+1} & \text{za } -q \leq k \leq q\,, \\ 0 & \text{inače}. \end{cases} \tag{3}$$

Taj filter transformira vremenski niz $\{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$ u vremenski niz $\{w_n\}_{-\infty}^{\infty}$ s komponentama

$$w_n = \frac{1}{2q+1} \sum_{k=-q}^{q} x_{n-k}\,.$$

Može se koristiti za odvajanje linearnog trenda od stacionarne komponente slučajnog procesa $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Zaista, pretpostavimo da je

$$X_n = an + b + Y_n\,,$$

gdje su a i b konstante, a $\{Y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je stacionaran slučajan proces (s očekivanjem nula). Nakon filtriranja dobivamo

$$W_n = \frac{1}{2q+1} \sum_{k=-q}^{q} [a(n-k)+b] + \frac{1}{2q+1} \sum_{k=-q}^{q} Y_{n-k} = an+b+\frac{1}{2q+1} \sum_{k=-q}^{q} Y_{n-k}\,.$$

Ako su slučajne varijable Y_n nekorelirane, tada se veličina člana

$$\frac{1}{2q+1} \sum_{k=-q}^{q} Y_{n-k}$$

(mjerana po standardnoj devijaciji) reducira za faktor $(2q+1)^{-1/2}$ u usporedbi s Y_n. Stoga filter (3) prigušuje brzo mjenjajuću komponentu $\{Y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ i propušta bez iskrivljenja sporo mjenjajući linearni trend.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Prijenosna funkcija $A(\omega)$ filtera (3) dana je s

$$A(\omega) = \sum_{j=-q}^{q} \frac{1}{2q+1} e^{-i\omega j} = \frac{1}{2q+1} \frac{e^{i\omega q} - e^{-i\omega(q+1)}}{1 - e^{-i\omega}} = \frac{1}{2q+1} \frac{\sin[\omega(q+\frac{1}{2})]}{\sin(\frac{1}{2}\omega)} .$$

Linearni filter je *rekurzivan* ako vrijednost izlaznog niza u trenutku $t = n$ ovisi linearno o fiksnom broju prošlih ulaznih i izlaznih vremenskih nizova. Na primjer, relacija

$$y_n = \sum_{k=1}^{p} a_k y_{n-k} + \sum_{k=0}^{q} b_k x_{n-k} ,$$

definira rekurzivan filter. Da bi se pronašla prijenosna funkcija rekurzivnog filtera, potrebno je prvo izraziti vrijednosti izlaznog vremenskog niza potpuno pomoću ulaznog vremenskog niza. Taj izraz definira težine konvencionalnog (nerekurzivnog) filtera ekvivalentnog rekurzivnom filteru. Nakon toga, prijenosna funkcija računa se korištenjem težina ekvivalentnog konvencionalnog filtera.

Primjer 3.3.
Jednostavan primjer rekurzivnog filtera je filter eksponencijalnog izglađivanja definiran relacijom

$$y_n = ay_{n-1} + (1-a)x_n .$$

Ekvivalentan konvencionalni filter postoji ako je $|a| < 1$, i dan je s

$$y_n = (1-a) \sum_{k=0}^{\infty} a^k x_{n-k} .$$

Prijenosna funkcija $A(\omega)$ filtera eksponencijalnog izglađivanja dana je s

$$A(\omega) = \frac{1-a}{1-ae^{-i\omega}} .$$

4 Operator pomaka unatrag B, operator diferenciranja unatrag ∇, i karakteristična jednadžba vremenskog niza

Promotrimo vremenski niz

$$x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \equiv \{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\} .$$

Operator pomaka unatrag (engl. backward shift operator) B primjenjen na vremenski niz x proizvodi novi vremenski niz $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} = Bx$, takav da je $y_n = x_{n-1}$. To jest, n-ti element od $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ podudara se s $(n-1)$-vim elementom od $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Često se operator pomaka unatrag formalno primjenjuje na elemente vremenskog niza $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, tako da možemo vidjeti nešto poput

$$\begin{array}{rcllllllll} \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} & \equiv & & \{\ldots, & y_{-2}, & y_{-1}, & y_0, & y_1, & y_2, & \ldots\} \\ & = & B & \{\ldots, & x_{-2}, & x_{-1}, & x_0, & x_1, & x_2, & \ldots\} \\ & = & & \{\ldots, & Bx_{-2}, & Bx_{-1}, & Bx_0, & Bx_1, & Bx_2, & \ldots\} \\ & = & & \{\ldots, & x_{-3}, & x_{-2}, & x_{-1}, & x_0, & x_1, & \ldots\} \end{array} \tag{4}$$

ili u sažetom obliku, $y_n = Bx_n = x_{n-1}$. Iako je gornja sažeta notacija vrlo prikladna, treba uvijek držati na umu da je to samo skraćenje za $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} = Bx$. Na primjer, u slučaju vremenskog niza sa

$$x_{-3} = 4, x_{-2} = 5, x_{-1} = 3, x_0 = 5, x_1 = 1, \text{ i } x_2 = 5\,,$$

zadnja tri reda jednadžbe (4) izgledaju

$$\begin{array}{cllllllll} B & \{\ldots, & 5, & 3, & 5, & 1, & 5, & \ldots\} \\ = & \{\ldots, & B5, & B3, & B5, & B1, & B5, & \ldots\} \\ = & \{\ldots, & 4, & 5, & 3, & 5, & 1, & \ldots\} \end{array}$$

Prema tome, uzeta doslovce, relacija $Bx_n = x_{n-1}$ daje, ponešto zbunjujuće, da je $B5$ ponekad jednako 4, ponekad 3, a nekad opet 1. Također kratica $Bx_n = x_{n-1}$ sugerira da operator B pomiče niz x unatrag (otud ime operator pomaka unatrag), dok pogled na jednadžbu (4) pokazuje da je u stvari niz x pomaknut unaprijed.
Operator B je linearan operator, što znači

$$B(\alpha_1 x + \alpha_2 z) = \alpha_1 Bx + \alpha_2 Bz\,.$$

Produkt dva operatora AC je definiran kao uzastopno djelovanje operatora C i A (operator C djeluje prvi). Kvadrat operatora B, u oznaci B^2, je produkt dva operator B, to jest $B^2 = BB$. Prema tome, vremenski niz $z = B^2x$ je vremenski niz s elementima

$$\begin{array}{ccclllllll} & & & \{\ldots, & z_{-2}, & z_{-1}, & z_0, & z_1, & z_2, & \ldots\} \\ = & B(Bx) & = B & \{\ldots, & x_{-3}, & x_{-2} & x_{-1}, & x_0, & x_1, & \ldots\} \\ & & & \{\ldots, & x_{-4}, & x_{-3}, & x_{-2}, & x_{-1}, & x_0, & \ldots\} \end{array}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

ili u sažetom obliku, $z_n = B^2 x_n = x_{n-2}$. Više potencije od B se definiraju analogno. Operator B^0 je jednak operatoru identitete, $B^0 = I$. On ostavlja svaki vremenski niz nepromjenjenim, $B^0 x = x$, ili formalno $Bx_n = x_n$.
Operator diferenciranja unatrag primjenjen na vremenski niz $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ daje novi vremenski niz

$$y = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} = \nabla x = (1 - B)x$$

tako da je $y_n = x_n - x_{n-1}$. Operator ∇ često se formalno primjenjuje na elemente niza x, i prikladna kratka notacija je $y_n = \nabla x_n = x_n - x_{n-1}$. Operator ∇ je linearan

$$\nabla(\alpha_1 x + \alpha_2 z) = \alpha_1 \nabla x + \alpha_2 \nabla z\,.$$

k-ta potencija operatora ∇, u oznaci ∇^k, definirana je kao produkt od k operatora ∇, to jest, kao uzastopna primjena k operatora ∇. Na primjer

$$\nabla^3 x = \nabla\nabla\nabla x = \nabla(\nabla(\nabla x)))\,,$$

tako da je n-ti element niza $y = \nabla^3 x$ dan s

$$\begin{aligned} y_n &= \nabla(\nabla(\nabla x_n)) = \nabla(\nabla(x_n - x_{n-1})) = \nabla(\nabla x_n - \nabla x_{n-1}) \\ &= \nabla(x_n - x_{n-1} - x_{n-1} + x_{n-2}) = \nabla(x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}) \\ &= x_n - 3x_{n-1} + 3x_{n-2} - x_{n-3}\,. \end{aligned}$$

Promotrimo vremenski niz s rekurzivno definiranim elementima

$$x_n - \alpha_1 x_{n-1} - \alpha_2 x_{n-2} - \cdots - \alpha_p x_{n-p} = e_n\,, \tag{5}$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dani niz brojeva, na primjer realizacija bijelog šuma. Koristeći operator pomaka unatrag zadnju jednakost možemo zapisati kao

$$x_n - \alpha_1 B x_n - \alpha_2 B^2 x_n - \cdots \alpha_p B^p x_n = e_n\,,$$

ili

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^p) x_n = e_n\,.$$

Uvedemo li polinom

$$\phi(\lambda) = 1 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2 - \cdots - \alpha_p\lambda^p\,,$$

dobijemo

$$\phi(B)x_n = e_n \,.$$

Polinom $\phi(\lambda)$ zove se *karakteristični polinom* vremenskog niza (5). Analiza vremenskog niza (5) se značajno pojednostavljuje, ako se polinom $\phi(\lambda)$ faktorizira, to jest napiše u obliku

$$\phi(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}\right) \,,$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ korijeni jednadžbe $\phi(\lambda) = 0$. Zbog tog razloga jednadžba $\phi(\lambda) = 0$ igra važnu ulogu i poznata je kao *karakteristična jednadžba* vremenskog niza (5). Korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ se odgovarajuće zovu *korijeni karakteristične jednadžbe.*

5 Glavni linearni modeli vremenskih nizova

Glavni linearni modeli vremenskih nizova su:

- Autoregresivni model (AR)
- Model pokretnih sredina (MA)
- Autoregresivni model s ostacima pokretnih sredina (ARMA)
- Autoregresivni integrirani model s ostacima pokretnih sredina (ARIMA)

Autoregresivni model
Definicija 5.1.
Autoregresivni proces reda p (uobičajena oznaka je AR(p)) je niz slučajnih varijabli $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ uzastopno definiranih pravilom

$$X_n = \mu + \alpha_1(X_{n-1} - \mu) + \alpha_2(X_{n-2} - \mu) + \cdots + \alpha_p(X_{n-p} - \mu) + e_n \,, \quad (6)$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ centriran bijeli šum.
Korištenjem operator pomaka unatrag, jednadžbu (6) možemo zapisati kao

$$\phi(B)(X_n - \mu) = e_n \,,$$

gdje je $\phi(\lambda) = 1 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2 - \cdots - \alpha_p\lambda^p$ polinom stupnja p.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Za potpuno specificiranje AR(p) modela moramo specificirati p početnih uvjeta $X_{s-p}, X_{s-p+1}, \ldots, X_{s-1}$, koji mogu biti bilo slučajne varijable, bilo realni brojevi (slučajne varijable s degeneriranom distribucijom). Nakon toga se distribucija bilo koje slučajne varijable X_n, $n \geq s$, može naći korištenjem jednadžbe (6), početnih uvjeta, i distribucije bijelog šuma.
Najjednostavniji autoregresivni proces je autoregresivni proces prvog reda AR(1). Definiran je pomoću

$$\begin{cases} X_n = \mu + \alpha(X_{n-1} - \mu) + e_n \\ X_{s-1} = x + \mu \end{cases} \tag{7}$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ niz nezavisnih normalnih slučajnih varijabli s očekivanjem nula i varijancom σ^2.
Rezultat 5.1.
Neka je $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ AR(1) slučajni proces definiran formulom (7). Tada je

$$X_n = \mu + \alpha^{n-s+1}x + \sum_{l=0}^{n-s} \alpha^{n-s-l} e_{s+l}\,, \quad \text{za } n = s, s+1, \ldots,$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu + \alpha^{n-s+1}x\,,$$

i

$$\operatorname{cov}(X_n, X_{n+k}) = \alpha^{|k|}\sigma^2 \frac{1-\alpha^{2(n-s+1)}}{1-\alpha^2}\,.$$

Dokaz.
Po definiciji (7) imamo

$$\begin{aligned} X_s &= \mu + \alpha x + e_s\,, \\ X_{s+1} &= \mu + \alpha(X_s - \mu) + e_{s+1} = \mu + \alpha^2 x + \alpha e_s + e_{s+1}\,, \\ X_{s+2} &= \mu + \alpha(X_{s+1} - \mu) + e_{s+2} = \mu + \alpha^3 x + \alpha^2 e_s + \alpha e_{s+1} + e_{s+2}\,. \end{aligned}$$

Možemo nastaviti na isti način, ali je opća shema već jasna, te možemo napisati

$$X_{s+k} = \mu + \alpha^{k+1}x + \sum_{l=0}^{k} \alpha^l e_{s+k-l}$$

ili

$$X_{s+k} = \mu + \alpha^{k+1}x + \sum_{l=0}^{k} \alpha^{k-l} e_{s+l}\,.$$

Ekvivalentno,

$$X_n = X_{s+n-s} = \mu + \alpha^{n-s+1}x + \sum_{l=0}^{n-s} \alpha^l e_{n-l}$$

ili

$$X_n = X_{s+n-s} = \mu + \alpha^{n-s+1}x + \sum_{l=0}^{n-s} \alpha^{n-s-l} e_{s+l} \, .$$

Izraz za očekivanu vrijednost slučajne varijable X_n slijedi odmah, budući da je $\mathbb{E}(e_n) = 0$ za svaki n. Kovarijanca od X_n i X_{n+k} se računa kako slijedi. Promotrimo prvo slučaj $k \geq 0$. Imamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_n, X_{n+k}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{l=0}^{n-s} \alpha^{n-s-l} e_{s+l} \sum_{f=0}^{n+k-s} \alpha^{n+k-s-f} e_{s+f} \right) \\
&= \sigma^2 \sum_{l=0}^{n-s} \alpha^{2(n-s-l)+k} = \alpha^k \sigma^2 \frac{1-\alpha^{2(n-s+1)}}{1-\alpha^2} \, .
\end{aligned}$$

U slučaju $k < 0$ analogni račun daje

$$\operatorname{cov}(X_n, X_{n+k}) = \alpha^{-k} \sigma^2 \frac{1-\alpha^{2(n-s+1)}}{1-\alpha^2} \, .$$

Spajanjem rezultat dobivenih za slučajeve $k < 0$ i $k \geq 0$ dolazimo do

$$\operatorname{cov}(X_n, X_{n+k}) = \alpha^{|k|} \sigma^2 \frac{1-\alpha^{2(n-s+1)}}{1-\alpha^2} \, .$$

Tvrdnja Rezultata 5.1. jasno kaže da slučajni proces AR(1) s početnim uvjetom $X_{s-1} = x + \mu$ nije stacionaran proces. Zaista, niti je $\mathbb{E}(X_n)$ konstanta, niti je $\operatorname{cov}(X_n, X_{n+1})$ nezavisna od n. Međutim, stacionarnost je narušena samo zbog prisutnosti člana $\alpha^{2(n-s+1)}$ koji postaje iščezavajuće mali ako je $|\alpha| < 1$ i $n - s$ dovoljno velik. Prema tome, za $|\alpha| < 1$ slučajni proces je primjetno nestacionaran samo u početnoj fazi evolucije (male vrijednosti od $n - s$), i postaje praktički stacionaran u ekvilibriju (velike vrijednosti od $n - s$). Taj tip nestacionarnosti se ponekad zove prolazna (engl. transient) nestacionarnost. Slučajne procese koji pokazuju prolaznu nestacionarnost moguće je tretirati kao stacionarne, uz uvjet da je proces započeo dovoljno daleko u prošlosti.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Ako uzmemo limes kada $s \to -\infty$, to jest, ako promatramo slučajni proces koji je počeo s istim početnim uvjetom $X_{s-1} = x + \mu$ ali davno, tada za $|\alpha| < 1$ dobijemo

$$X_n = \mu + \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l e_{n-l}\,. \tag{8}$$

Kratki račun analogan onom iz dokaza Rezultata 5.1 pokazuje da slučajni proces $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ definiran jednadžbom (8) ima konstantno očekivanje

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu$$

i kovarijancu

$$\mathrm{cov}(X_n, X_{n+k}) = \frac{\alpha^{|k|}\sigma^2}{1-\alpha^2}\,.$$

Stoga je slučajan proces (8) stacionaran u slabom smislu. Autokorelacijska funkcija procesa je dana s

$$\rho_k = \alpha^{|k|},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\,.$$

Parcijalna autokorelacijska funkcija $\phi(k)$ dana je s

$$\phi(1) = \rho_1 = \alpha, \quad \phi(2) = \frac{\alpha^2 - \alpha^2}{1-\alpha^2} = 0\,.$$

U stvari, $\phi(k) = 0$ za sve $k \geq 2$. Zaista, za $k \geq 2$ prvi i zadnji stupac matrice P_k^* su linearno zavisni. Naime, zadnji stupac jednak je prvom stupcu pomnoženom s α. Determinanta matrice koja sadrži linearno zavisne stupce je nula. Stoga, $\phi(k) = \det P_k^* / \det P_k = 0$ za $k \geq 2$.
Drugi način kako učiniti AR(1) proces istinski stacionarnim je započeti proces iz "ekvilibrijskog" početnog uvjeta. Svaka slučajna varijabla stacionarnog AR(1) procesa (8) je normalna slučajna varijabla s očekivanjem μ i varijancom $\sigma^2/(1-\alpha^2)$. Promotrimo AR(1) proces definiran s

$$\begin{cases} X_n = \mu + \alpha(X_{n-1} - \mu) + e_n \\ X_{s-1} = N(\mu, \nu) \end{cases} \tag{9}$$

gdje je $\{e_n\}_{n=s}^{\infty}$ niz nezavisnih normalnih slučajnih varijabli s očekivanjem nula i varijancom σ^2, a $N(\mu, \nu)$ je normalna slučajna varijabla s očekivanjem μ i varijancom $\nu = \sigma^2/(1-\alpha^2)$, nezavisna od $\{e_n\}_{n=s}^{\infty}$. Računi analogni onima iz dokaza Rezultata 5.1 pokazuju da je AR(1) proces (9) stacionaran.

Kompliciraniji model vremenskog niza je slučajni proces AR(2) definiran sa

$$\begin{cases} X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2 X_{n-2} + e_n\,, \\ X_{s-2} = x \\ X_{s-1} = y\,, \end{cases} \tag{10}$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ niz nezavisnih normalnih slučajnih varijabli s očekivanjem nula i varijancom σ^2.

Rezultat 5.2.

Neka je $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ slučajni proces AR(2) definiran jednadžbom (10). Tada

$$X_n = y\frac{\psi_2^{n-s+2} - \psi_1^{n-s+2}}{\psi_2 - \psi_1} - x\psi_1\psi_2\frac{\psi_2^{n-s+1} - \psi_1^{n-s+1}}{\psi_2 - \psi_1} + \sum_{k=0}^{n-s}\frac{\psi_2^{k+1} - \psi_1^{k+1}}{\psi_2 - \psi_1}e_{n-k}\,,$$

za $n = s, s+1, \ldots,$

$$\mathbb{E}(X_n) = y\frac{\psi_2^{n-s+2} - \psi_1^{n-s+2}}{\psi_2 - \psi_1} - x\psi_1\psi_2\frac{\psi_2^{n-s+1} - \psi_1^{n-s+1}}{\psi_2 - \psi_1}\,,$$

i

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_n, X_{n+k}) &= \frac{\sigma^2\psi_1^{|k|+1}}{(\psi_2 - \psi_1)^2}\left[\psi_1\frac{1 - \psi_1^{2(n-s+1)}}{1 - \psi_1^2} - \psi_2\frac{1 - (\psi_1\psi_2)^{n-s+1}}{1 - \psi_1\psi_2}\right] \\ &+ \frac{\sigma^2\psi_2^{|k|+1}}{(\psi_2 - \psi_1)^2}\left[\psi_2\frac{1 - \psi_2^{2(n-s+1)}}{1 - \psi_2^2} - \psi_1\frac{1 - (\psi_1\psi_2)^{n-s+1}}{1 - \psi_1\psi_2}\right]\,, \end{aligned}$$

gdje je $\psi_1 = 1/\lambda_1$, $\psi_2 = 1/\lambda_2$, a λ_1, λ_2 su korijeni karakteristične jednadžbe $1 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2 = 0$.

Dokaz.

Upotrebom operatora pomaka unatrag B, relaciju

$$X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2 X_{n-2} + e_n\,,$$

možemo zapisati u obliku

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2)X_n = e_n\,.$$

Također možemo faktorizirati polinom $\phi(\lambda) = 1 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2$ kako slijedi

$$\phi(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)\,,$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

gdje su

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right)^2 + \frac{1}{\alpha_2}}$$

korijeni karakteristične jednadžbe $1 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2 = 0$. Stoga je $\phi(B)X_n = e_n$ ekvivalentno sa

$$(1 - \psi_1 B)(1 - \psi_2 B)X_n = e_n\,.$$

Označimo li $Y_n = (1 - \psi_2 B)X_n$, tada se AR(2) proces (10) "dijeli" na dva AR(1) procesa

$$\begin{cases} Y_n = \psi_1 Y_{n-1} + e_n, \\ Y_{s-1} = y - \psi_2 x, \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} X_n = \psi_2 X_{n-1} + Y_n, \\ X_{s-1} = y\,. \end{cases}$$

Korištenjem Rezultata 5.1 dobivamo eksplicitne izraze za te procese

$$Y_n = \psi_1^{n-s+1}(y - \psi_2 x) + \sum_{k=0}^{n-s} \psi_1^{n-s-k} e_{s+k} \tag{11}$$

i

$$X_n = \psi_2^{n-s+1} y + \sum_{l=0}^{n-s} \psi_2^{n-s-l} Y_{s+l}\,. \tag{12}$$

Uvrstimo li jednadžbu (11) u (12) dobivamo eksplicitni izraz za slučajnu varijablu X_n pomoću početnih uvjeta i bijelog šuma:

$$X_n = \psi_2^{n-s+1} y + (y - \psi_2 x)\psi_2^{n-s}\psi_1 \sum_{l=0}^{n-s} \left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right)^l + \sum_{l=0}^{n-s} \psi_2^{n-l-s} \sum_{k=0}^{l} \psi_1^{l-k} e_{s+k}\,.$$

Zamjenom redoslijeda sumacije po l i k dobivamo

$$X_n = \psi_2^{n-s+1} y + (y - \psi_2 x)\psi_2^{n-s}\psi_1 \sum_{l=0}^{n-s} \left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right)^l + \sum_{k=0}^{n-s} e_{s+k} \sum_{l=k}^{n-s} \psi_2^{n-s-l}\psi_1^{l-k}\,.$$

Sumiranjem geometrijskog reda dobivamo

$$X_n = y\frac{\psi_2^{n-s+2} - \psi_1^{n-s+2}}{\psi_2 - \psi_1} - x\psi_1\psi_2\frac{\psi_2^{n-s+1} - \psi_1^{n-s+1}}{\psi_2 - \psi_1} + \sum_{k=0}^{n-s} \frac{\psi_2^{k+1} - \psi_1^{k+1}}{\psi_2 - \psi_1} e_{n-k}\,.$$

Računanje očekivanja je direktno, dok je računanje kovarijacijske funkcije analogno onom iz dokaza Rezultata 5.1.

Model pokretnih sredina

Definicija 5.2

Proces pokretnih sredina reda p (često se koristi oznaka MA(p)) je niz slučajnih varijabli $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ definiran s

$$X_n = \mu + e_n + \alpha_1 e_{n-1} + \alpha_2 e_{n-2} + \cdots + \alpha_p e_{n-p} \tag{13}$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ centriran bijeli šum s varijancom σ^2.
Korištenjem operatora pomaka unatrag B, jednadžbu (13) možemo zapisati u obliku

$$X_n = \mu + \theta(B)e_n\,,$$

gdje je $\theta(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_p x^p$ polinom p-tog stupnja.
Realizacija slučajnih varijabli $\{X_n\}_{n=1}^{N}$ je niz opažanja $\{x_n\}_{n=1}^{N}$. S druge strane, realizacija bijelog šuma $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ se često ne može neposredno opažati. Ipak, ako su korijeni polinoma $\theta(x)$ veći od 1 po apsolutnoj vrijednosti, tada je moguće procijeniti vrijednosti od $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ iz realizacije $\{x_n\}_{n=1}^{N}$.

Definicija 5.3.

MA(p) proces zove se invertibilan, ako je p korijena jednadžbe $\theta(x) = 0$ veće od jedan po apsolutnoj vrijednosti, $|x_k| > 1$ za $k = 1, 2, \ldots, p$.
U slučaju MA(1) procesa imamo $e_n = -\mu - \alpha_1 e_{n-1} + x_n$. Korištenjem Rezultata 5.1 dobivamo

$$e_n = -\mu + (-\alpha_1)^n e_0 + \sum_{f=0}^{n-1} (-\alpha_1)^f x_{n-f}\,.$$

Iz tog izraza još uvijek ne možemo točno naći vrijednosti od e_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, budući da je e_0 nepoznat. Međutim, ako je MA(1) proces invertibilan, to jest, ako je $|\alpha_1| < 1$, tada točna vrijednost od e_0 nije jako važna, budući da se može očekivati $(-\alpha_1)^n e_0 \approx 0$ za dovoljno velike n. Stoga je aproksimacija

$$e_n \approx -\mu + \sum_{f=0}^{n-1} (-\alpha_1)^f x_{n-f}\,,$$

prilično točna ako je $|\alpha_1| < 1$. Situacija je radikalno drugačija ako MA(1) proces nije invertibilan, to jest, ako je $|\alpha_1| > 1$. U tom slučaju je veličina člana $(-\alpha_1)^n e_0$ usporediva s veličinom od $\sum_{f=0}^{n-1} (-\alpha_1)^f x_{n-f}$.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Rezultat 5.3.
Slučajni proces MA(p) je stacionaran u slabom smislu. Zajedničko očekivanje dano je s $\mathbb{E}(X_n) = \mu$, a autokovarijacijska funkcija dana je s

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{l=0}^{p-|k|} \alpha_l \alpha_{l+|k|}, & \text{ako je } |k| \leq p \\ 0, & \text{ako je } |k| > p \end{cases} \tag{14}$$

gdje je $\alpha_0 = 1$.

Dokaz.
Očekivana vrijednost svake slučajne varijable X_n je μ, budući da je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ centriran bijeli šum. Autokovarijacijska funkcija se računa kako slijedi. Promotrimo prvo slučaj $k \geq 0$. Imamo

$$\gamma(k) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{l=0}^{p} \alpha_l e_{n-l}\right)\left(\sum_{f=0}^{p} \alpha_f e_{n+k-f}\right)\right].$$

Ako je $k > p$ dobivamo

$$\gamma(k) = \sum_{l=0}^{p}\sum_{f=0}^{p} \alpha_l \alpha_f \mathbb{E}(e_{n-l} e_{n+k-f}) = \sum_{l=0}^{p}\sum_{f=0}^{p} \alpha_l \alpha_f \mathbb{E}(e_{n-l})\mathbb{E}(e_{n+k-f}) = 0\,,$$

budući da je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ centriran bijeli šum. U slučaju $0 \leq k \leq p$ dobivamo

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{l=0}^{p} \alpha_l e_{n-l}\right)\left(\sum_{f=-k}^{p-k} \alpha_{f+k} e_{n-f}\right)\right] \\ &= \sum_{l=0}^{p-k} \alpha_l \alpha_{l+k} \mathbb{E}(e_{n-l}^2) = \sigma^2 \sum_{l=0}^{p-k} \alpha_l \alpha_{l+k}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Isti račun u slučaju $k < 0$ daje

$$\gamma(k) = \sigma^2 \sum_{l=0}^{p+k} \alpha_l \alpha_{l-k}\,,$$

ako je $k \geq -p$, i $\gamma(k) = 0$ ako je $k < -p$. Iz gornjeg dobivamo (14). Prema tome, slučajne varijable X_n imaju konačne druge momente

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mu^2 + \gamma(0) = \mu^2 + \sigma^2 \sum_{l=0}^{p} \alpha_l^2\,.$$

Štoviše, očekivanje $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ i autokovarijance $\text{cov}(X_n, X_{n+k}) = \gamma(k)$ ne ovise n. Prema tome, slučajni proces $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je stacionaran u slabom smislu.
Neposredna posljedica Rezultata 5.3 je sljedeći izraz za autokorelacijsku funkciju.

$$\rho_k = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\sum_{l=0}^{p-|k|} \alpha_l \alpha_{l+|k|}}{\sum_{l=0}^{p} \alpha_l^2}, & \text{ako je } |k| \le p\,, \\ 0 & \text{ako je } |k| > p\,. \end{cases}$$

Za jednostavne slučajeve od MA(p) moguće je eksplicitno izračunati parcijalnu autokorelacijsku funkciju. Promotrimo slučajni proces MA(1). Autokorelacijska funkcija dana je s

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{ako je } k = 0, \\ \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2}, & \text{ako je } k = 1, \\ 0, & \text{ako je } k \ge 2\,. \end{cases}$$

Prema tome su $k \times k$ matrice P_k i P_k^* dane s

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & \rho_1 \\ 0 & 0 & & & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & 0 & \cdots & 0 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \rho_1 & \\ 0 & 0 & & \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & \rho_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Izračun determinante $\det P_k^*$ je direktan

$$\det P_k^* = (-1)^{k+1} \frac{\alpha_1^k}{(1+\alpha_1^2)^k}\,.$$

Izračun determinante $\det P_k$ zahtijeva više truda. Preskočit ćemo račune i samo napisati rezultat:

$$\det P_k = \frac{1-\alpha_1^{2(k+1)}}{(1-\alpha_1^2)(1+\alpha_1^2)^k}\,.$$

Stoga je parcijalna autokorelacijska funkcija slučajnog procesa MA(1) dana s

$$\phi(k) = (-1)^{k+1} \frac{(1-\alpha_1^2)\alpha_1^k}{1-\alpha_1^{2(k+1)}}\,.$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Autoregresivni model s ostacima pokretnih sredina
Definicija 5.4.
Centriran autoregresivni proces s ostacima pokretnih sredina je niz slučajnih varijabli $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ definiran relacijom

$$X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \alpha_2 X_{n-2} + \cdots + \alpha_p X_{n-p} + e_n + b_1 e_{n-1} + b_2 e_{n-2} + \cdots + b_q e_{n-q} \tag{16}$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ centriran bijeli šum. Notacija ARMA(p,q) se često upotrebljava za takve slučajne procese.
Korištenjem operatora pomaka unatrag B gornju definiciju možemo zapisati u kompaktnom obliku

$$\phi(B)X_n = \theta(B)e_n \,,$$

gdje su

$$\phi(x) = 1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots - \alpha_p x^p \,,$$

i

$$\theta(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_q x^q \,,$$

polinomi stupnja p, odnosno stupnja q. ARMA(p,q) model s očekivanjem μ definiran je s

$$\phi(B)(X_n - \mu) = \theta(B)e_n \,.$$

Analogno kao kod AR(p) modela, za potpunu definiciju ARMA(p,q) modela trebamo specificirati p početnih uvjeta $X_{s-p}, X_{s-p+1}, \ldots, X_{s-1}$.
Najjednostavniji primjer ARMA(p,q) modela je ARMA$(1,1)$ model definiran s

$$\begin{cases} X_n = \mu + \alpha(X_{n-1} - \mu) + e_n + b e_{n-1} \\ X_{s-1} = \mu + x \,, \end{cases} \tag{17}$$

gdje je $\{e_n\}_{n=s}^{\infty}$ niz nezavisnih normalnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem μ i varijancom σ^2. Dokaz sljedeće propozicije analogan je dokazu Rezultata 5.1. Dokaz tog rezultata izlazi van okvira predavanja.
Rezultat 5.4.
Neka je $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ ARMA$(1,1)$ proces definiran jednadžbom (17). Tada je

$$X_n = \mu + \alpha^{n-s+1}x + \alpha^{n-s} b e_{s-1} + \left(1 + \frac{b}{\alpha}\right) \sum_{k=0}^{n-s-1} \alpha^{n-s-k} e_{s+k} + e_n$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu + \alpha^{n-s+1}x + \alpha^{n-s} b e_{s-1} \,,$$

i

$$\mathrm{Var}(X_n) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\left[1 + 2\alpha b + b^2 - [\alpha(b^2+1) + 2b]\alpha^{2(n-s)+1}\right] .$$

Za $l \neq 0$,

$$\mathrm{cov}(X_n, X_{n+l}) = \sigma^2 \frac{\alpha^{|l|-1}}{1-\alpha^2}\left[(1+\alpha b)(\alpha + b) - [\alpha(b^2+1) + 2b]\alpha^{2(n-s+1)}\right] .$$

ARMA(p, q) modeli nasljeđuju mnoga svojstva AR(p) modela. Na primjer, analogno AR(1) modelu, ARMA$(1, 1)$ model je nestacionaran. Međutim, nestacionarnost je samo prolaznog tipa ako je $|\alpha| < 1$. U slučaju $|\alpha| < 1$, uzimanjem limesa $s \to -\infty$, dobivamo stacionaran ARMA$(1, 1)$ proces

$$X_n = \mu + \left(1 + \frac{b}{\alpha}\right)\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k e_{n-k} + e_n .$$

Autokovarijacijska funkcija tog procesa dana je s

$$\gamma(l) = \begin{cases} \sigma^2 \frac{1+2\alpha b+b^2}{1-\alpha^2}, & \text{za } l = 0 \\ \sigma^2 \alpha^{|l|-1} \frac{(1+\alpha b)(\alpha+b)}{1-\alpha^2}, & \text{za } l \neq 0 , \end{cases}$$

a autokorelacijska funkcija je dana s

$$\rho(l) = \begin{cases} 1 & \text{za } l = 0 \\ \alpha^{|l|-1} \frac{(1+\alpha b)(\alpha+b)}{1+2\alpha b+b^2} & \text{za } l \neq 0 . \end{cases}$$

Autoregresivni integrirani model s ostacima pokretnih sredina
Promotrimo ARMA(p, q) model

$$\phi(B)(Y_n - \mu) = \theta(B)e_n ,$$

gdje su

$$\phi(x) = 1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots - \alpha_p x^p ,$$

i

$$\theta(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_q x^q ,$$

polinomi stupnja p, odnosno stupnja q. Pretpostavimo da su svi korijeni $x_1, x_2, \ldots, x_p$ jednadžbe $\phi(x) = 0$ veći od 1 po apsolutnoj vrijednosti, $|x_k| > 1$, za sve $k = 1, 2, \ldots, p$.

Definicija 5.5

 © Faculty and Institute of Actuaries

Autoregresivni integrirani proces s ostacima pokretnih sredina (engl. autoregressive integrated process with moving average residuals) je niz slučajnih varijabli $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ definiran relacijom

$$\phi(B)(1-B)^d(X_n-\mu)=\theta(B)e_n\,.$$

Za takav slučajni proces se često upotrebljava notacija ARIMA(p,d,q).
Uočite da su ARMA(p,q) slučajni proces $\{Y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ i ARIMA(p,d,q) slučajni proces $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ povezani s

$$(1-B)^d X_n = Y_n, \quad \text{za } n=s+d, s+d+1,\ldots\,.$$

Neka je $\{Y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ stacionaran ARMA(p,q) slučajni proces s očekivanjem μ i varijancom σ^2. Komponente ARIMA$(p,1,q)$ slučajnog procesa $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ zadovoljavaju $X_n-X_{n-1}=Y_n$. Stoga je

$$X_n = x+\sum_{l=1}^{n-s} Y_l\,,$$

gdje je $X_s=x$ početni uvjet. Korištenjem zadnje relacije nalazimo

$$\mathbb{E}(X_n)=x+(n-s)\mu\,,$$

i za $h\geq 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X_n,X_{n+h}) &= \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{n-s}(Y_{s+l}-\mu)\sum_{k=1}^{n+h-s}(Y_{s+k}-\mu)\right]\\ &= \sum_{l=1}^{n-s}\sum_{k=1}^{n+h-s}\gamma(k-l)=\sum_{f=s+1-n}^{n+h-s-1}\gamma(f)c_n(f)\,,\end{aligned}$$

gdje je

$$c_n(f)=\begin{cases} f+(n-s), & \text{za } s+1-n\leq f\leq -1\,,\\ (n-s), & \text{za } 0\leq f\leq h\,,\\ (n+h-s)-f, & \text{za } h+1\leq f\leq n+h-s-1\,.\end{cases}$$

Slučajni proces ARIMA(p,d,q) je nestacionaran proces ako je $d\geq 1$. Također se može označavati kao $I(d)$ niz.

6 Diskretne slučajne šetnje, i slučajne šetnje s normalno distribuiranim prirastima

Diskretne slučajne šetnje razmatrane su u Poglavlju 3. Ako slučajne varijable X_k (prirasti) u definiciji slučajne šetnje imaju neprekidnu distribuciju, tada se slučajna šetnja zove neprekidna. Većina kvalitativnih rezultata koji vrijede za diskretne šetnje imaju analogije za neprekidne šetnje. Važan primjer neprekidne slučajne šetnje je *slučajna šetnja s normalno distribuiranim prirastima.* To je niz slučajnih varijabli

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \,,$$

gdje su slučajne varijable X_k nezavisne i imaju zajedničku gustoću

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] .$$

Distribuciju slučajne varijable S_n - lokacija čestica nakon n koraka - nije teško pronaći. Promatrajmo dvije nezavisne slučajne varijable X i Y s očekivanjima μ_1, odnosno μ_2, i varijancama σ_1^2, odnosno σ_2^2. Zbroj $X+Y$ je normalna slučajna varijabla s očekivanjem $\mu_1 + \mu_2$ i varijancom $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Koristeći taj rezultat više puta zaključujemo da slučajna varijabla S_n ima normalnu distribuciju s očekivanjem $n\mu$ i varijancom $n\sigma^2$, ekvivalentno ARIMA$(0,1,0)$ nizu, najjednostavnijem obliku $I(1)$ niza.

7 Analiza vremenskih nizova u "frekvencijskoj domeni"

Promotrimo slabo stacionaran model vremenskog niza $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Autokovarijacijska funkcija

$$\gamma(h) = \mathbb{E}(X_{n+h}X_n) - \mathbb{E}(X_{n+h})\mathbb{E}(X_n)$$

stacionarnog niza $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ne ovisi o n.
Rezultat 7.1.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Neka je autokovarijacijska funkcija $\gamma(h)$ apsolutno sumabilna, to jest, $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$. Tada se funkcija $\gamma(h)$ može predstaviti u obliku

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\omega} f(\omega)\, d\omega\,, \tag{18}$$

gdje je

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega} \gamma(n)\,, \tag{19}$$

parna nenegativna funkcija, i

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\, d\omega = \gamma(0) = \mathrm{Var}(X_k)\,.$$

Definicija 7.1

Funkcija $f(\omega)$ u reprezentaciji (18) zove se *spektralna gustoća* kovarijacijske funkcije $\gamma(h)$. Ponekad se funkcija $f(\omega)$ naziva i spektralnom gustoćom modela vremenskog niza $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Kao što će biti jasno iz sljedećeg primjera, uvjet apsolutne sumabilnosti autokovarijacijske funkcije važan je za postojanje neprekidne spektralne gustoće.

Primjer 7.1.

Promotrimo model vremenskog niza

$$X_n = \sum_{j=0}^{M} [A_j \cos(\omega_j n) + B_j \sin(\omega_j n)]\,, \tag{20}$$

gdje su A_j i B_j, $j = 0, 1, \ldots, M$, nezavisne slučajne varijable s očekivanjem nula i varijancama

$$\mathrm{Var}(A_j) = \mathrm{Var}(B_j) = \sigma_j^2, \quad j = 0, 1, \ldots, M\,,$$

i gdje su $\omega_j \in [-\pi, \pi]$, $j = 0, 1, \ldots, M$, različite "frekvencije". Autokovarijacijska funkcija tog vremenskog niza dana je s

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \mathbb{E}(X_{n+h}X_n) \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{M}(A_j\cos[\omega_j(n+h)] + B_j\sin[\omega_j(n+h)]) \times \sum_{k=0}^{M}(A_k\cos(\omega_k n) + B_k\sin(\omega_k n))\right] \\ &= \sum_{k=0}^{M}\sigma_k^2[\cos[\omega_k(n+h)]\cos(\omega_k n) + \sin[\omega_k(n+h)]\sin(\omega_k n)] \\ &= \sum_{k=0}^{M}\sigma_k^2\cos(\omega_k h)\end{aligned}$$

Vidimo da je autokovarijacijska funkcija modela vremenskog niza (20) dana sumom trigonometrijskih funkcija, a ne integralom. Suma apsolutnih vrijednosti $\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma(h)|$ je beskonačna, i ne postoji reprezentacija oblika (18). Zbog tog razloga kažemo da model vremenskog niza (20) ima *diskretan spektar* ili *linijski spektar*.

Sljedeći niz je primjer modela vremenskog niza s neprekidnon spektralnom gustoćom.

Primjer 7.2

Promotrimo bijeli šum $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, to jest, niz nekoreliranih slučajnih varijabli s očekivanjem nula i autokovarijacijskom funkcijom

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{za } h = 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uvrštavanje funkcije $\gamma(h)$ u jednadžbu (19) daje

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\,.$$

To znači da je spektralna gustoća bijelog šuma konstantna, i sve frekvencije $-\pi \leq \omega \leq \pi$ daju isti doprinos varijanci $\gamma(0)$.

Rezultat 7.2

Neka je $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ model stacionarnog vremenskog niza s apsolutno sumabilnom autokovarijacijskom funkcijom $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\gamma_X(n)| < \infty$ i spektralnom gustoćom $f_X(\omega)$, te neka je $\{\alpha_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ apsolutno sumabilan niz realnih brojeva. Tada je spektralna gustoća niza

$$Y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k X_{n-k}\,,$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

dana s

$$f_Y(\omega) = f_X(\omega) \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-i\omega k} \right|^2 .$$

Dokaz.
Da bismo izbjegli nezgrapnu notaciju, propoziciju dokazujemo samo u slučaju $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_n) = 0$. Slučaj kada očekivanja nisu nula zahtijeva samo neznatne modifikacije.

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(h) &= \mathbb{E}(Y_n Y_{n+h}) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k X_{n-k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l X_{n+h-l} \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_k \alpha_l \mathbb{E}(X_{n-k} X_{n+h-l}) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_k \alpha_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h-l+k)\omega} f_X(\omega)\, d\omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\omega} f_X(\omega) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega} \alpha_k \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-il\omega} \alpha_l \right) d\omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\omega} f_X(\omega) \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega} \alpha_k \right|^2 d\omega .
\end{aligned}$$

Usporedba zadnjeg izraza za autokorelacijsku funkciju s jednadžbom (18) pokazuje da je

$$f_Y(\omega) = f_X(\omega) \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{i\omega k} \right|^2 .$$

Rezultat 7.2 omogućuje nam da pronađemo spektralne gustoće glavnih modela stacionarnih vremenskih nizova.

Korolar 7.1
Spektralna gustoća $f_Y(\omega)$ procesa pokretnih sredina

$$\left\{ Y_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j e_{n-j} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} ,$$

dana je s

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k} \alpha_k \right|^2 , \tag{21}$$

uz uvjet da je $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$.

Dokaz.

Tvrdnja korolara poseban je slučaj Rezultata 7.2 kada je niz $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ bijeli šum sa spektralnom gustoćom

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \text{za } -\pi \leq \omega \leq \pi \, .$$

Spektralna gustoća konačnih pokretnih sredina

$$\left\{ Y_n = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j e_{n-j} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} ,$$

dana je s

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{N} e^{i\omega k} \alpha_k \right|^2 .$$

Primjetimo li da je $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k e^{i\omega k}$ vrijednost polinoma $P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k x^k$ u točki $x = e^{i\omega}$, možemo dobiti drugu reprezentaciju za spektralnu gustoću $f_Y(\omega)$. Polinom $P_N(x)$ ima N korijena $m_1, m_2, \ldots, m_N$, te se može faktorizirati kao

$$P_N(x) = \alpha_N \prod_{k=1}^{N} (x - m_k) \, .$$

Stoga je

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \alpha_N \prod_{k=1}^{N} (e^{i\omega} - m_k) \right|^2 = \frac{\alpha_N^2 \sigma^2}{2\pi} \left[\prod_{k=1}^{N} (e^{i\omega} - m_k) \right] \left[\prod_{k=1}^{N} (e^{-i\omega} - m_k^*) \right] ,$$

gdje je m_k^* kompleksno konjugiran broju m_k.

Korolar 7.1 također možemo koristiti da izračunamo spektralne gustoće stacionarnog autoregresivnog procesa prvog reda, vidi jednadžbu (8),

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k e_{n-k} \, , \quad |\rho| < 1 \, .$$

Zaista, uvrštavanjem $\alpha_j = \rho^j$ za $j = 0, 1, 2, \ldots$, i $\alpha_j = 0$ za $j < 0$ u jednadžbu (21), dobivamo

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k e^{i\omega k} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{1}{1 - \rho e^{i\omega}} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega} \, .$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Korolar 7.2
Spektralna gustoća $f_Y(\omega)$ stacionarnog autoregresivnog procesa AR(p)

$$Y_n + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k Y_{n-k} = e_n\,,$$

dana je s

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(1 - 2m_j \cos\omega + m_j^2)}\,,$$

uz uvjet da su $m_1, m_2, \ldots, m_p$, korijeni jednadžbe

$$m^p + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j m^{p-j} = 0\,,$$

manji od 1 po apsolutnoj vrijednosti.
Dokaz.
Tvrdnja korolara poseban je slučaj Rezultata 7.2 kada je niz $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ bijeli šum sa spektralnom gustoćom

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \text{za} \ -\pi \le \omega \le \pi\,.$$

8 Višedimenzionalni autoregresivni modeli

k-dimenzionalni multivarijatni vremenski niz $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je niz k-dimenzionalnih vektora

$$x_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Svaki vektor x_n je skup opažanja zabilježenih u vremenu $t = n$ - vrijednosti k varijabli koje nas zanimaju u $t = n$. Višedimenzionalni (multivarijatni) vremenski niz je modeliran nizom slučajnih vektora

$$\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} X_n^{(1)} \\ X_n^{(2)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad -\infty < n < \infty\,.$$

Za svaki $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$ je niz $\{x_n^{(l)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ jednodimenzionalan (univarijatan) vremenski niz, te se, u principu, može individualno modelirati nizom slučajnih varijabli. Međutim, bolje modeliranje se može postići nizom slučajnih vektora ako su komponente višedimenzionalnog vremenskog niza statistički korelirane.
Svojstva "drugog reda" niza slučajnih vektora sažeta su pomoću *vektora očekivanih vrijednosti*

$$\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \equiv \left\{ \left(\mu_n^{(1)}, \mu_n^{(2)}, \ldots, \mu_n^{(k)} \right) \right\}_{n=-\infty}^{\infty},$$

gdje je $\mu_n^{(l)} = \mathbb{E}(X_n^{(l)})$, i *kovarijacijskim matricama* svih parova slučajnih vektora $\tilde{X}_n, \tilde{X}_{n+h}$

$$\hat{C}(n, n{+}h) \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X_n^{(1)}, X_{n+h}^{(1)}) & \mathrm{cov}(X_n^{(1)}, X_{n+h}^{(2)}) & \cdots & \mathrm{cov}(X_n^{(1)}, X_{n+h}^{(k)}) \\ \mathrm{cov}(X_n^{(2)}, X_{n+h}^{(1)}) & \mathrm{cov}(X_n^{(2)}, X_{n+h}^{(2)}) & \cdots & \mathrm{cov}(X_n^{(2)}, X_{n+h}^{(k)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_n^{(k)}, X_{n+h}^{(1)}) & \mathrm{cov}(X_n^{(k)}, X_{n+h}^{(2)}) & \cdots & \mathrm{cov}(X_n^{(k)}, X_{n+h}^{(k)}) \end{pmatrix}.$$

Dijagonalni elementi kovarijacijske matrice su autokovarijance komponenata slučajnih vektora $\tilde{X}_n$. Vandijagonalni elementi c_{ij} su kovarijance od $X_n^{(i)}$ i $X_{n+h}^{(j)}$.

Primjer. (Višedimenzionalni bijeli šum.)

Jednostavan primjer višedimenzionalnog slučajnog procesa je niz nekoreliranih slučajnih vektora.

$$\tilde{e}_n = \begin{pmatrix} e_n^{(1)} \\ e_n^{(2)} \\ \vdots \\ e_n^{(k)} \end{pmatrix} \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

- višedimenzionalni analogon centriranog bijelog šuma. Sve komponente vektora očekivanja od $\tilde{e}_n$ su nule, za sve n. Svi elementi kovarijacijskih matrica $\hat{C}(n, n{+}h)$ su također nule, za $h \neq 0$. Kovarijacijska matrica $\hat{C}(n, n)$ ne ovisi o n. To je simetrična matrica s elementima različitim od nule $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$ duž glavne dijagonale, te, tipično, nekim vandijagonalnim elementima od $\hat{C}(n, n)$ također različitim od nule.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Višedimenzionalni autoregresivni proces reda p i dimenzije k je niz k-dimenzionalnih slučajnih vektora $\{\tilde{X}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ definiranih s

$$\tilde{X}_n + \sum_{j=1}^{p} \hat{A}_j \tilde{X}_{n-j} = \tilde{e}_n \,,$$

gdje je $\tilde{e}_n$ k-dimenzionalni bijeli šum, $\hat{A}_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, su $k \times k$ matrice, i $\hat{A}_p$ ima barem jedan element različit od nule.
Najjednostavniji primjer višedimenzionalnog autoregresivnog modela je autoregresivni proces prvog reda i dimenzije dva definiran s

$$\begin{cases} X_n^{(1)} = \alpha_{11} X_{n-1}^{(1)} + \alpha_{12} X_{n-1}^{(2)} + e_n^{(1)} \\ X_n^{(2)} = \alpha_{21} X_{n-1}^{(1)} + \alpha_{22} X_{n-1}^{(2)} + e_n^{(2)} \end{cases} , \tag{22}$$

gdje su $\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ i $\{e_n^{(2)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ centrirani (jednodimenzionalni) bijeli šumovi s varijancama σ_1^2 i σ_2^2. Bijeli šumovi $\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ i $\{e_n^{(2)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ nisu nužno nekorelirani, to jest, ne zahtijevamo $c_{12} \equiv \mathrm{cov}(e_n^{(1)}, e_n^{(2)}) = 0$, iako zahtijevamo $\mathrm{cov}(e_n^{(1)}, e_k^{(2)}) = 0$ za $k \neq n$. Za potpuno definiranje slučajnog procesa (22) trebamo specificirati početne uvjete, recimo, $X_{s-1}^{(1)} = x^{(1)}$ i $X_{s-1}^{(2)} = x^{(2)}$. Korištenjem matrične notacije, definiciju dvodimenzionalnog autoregresivnog procesa prvog reda možemo zapisati u kompaktnom obliku

$$\begin{cases} \tilde{X}_n & = & \hat{A}\tilde{X}_{n-1} + \tilde{e}_n \,, \\ \tilde{X}_{s-1} & = & \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{23}$$

gdje je

$$\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} X_n^{(1)} \\ X_n^{(2)} \end{pmatrix} , \ \hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} , \ \text{i} \ \tilde{e}_n = \begin{pmatrix} e_n^{(1)} \\ e_n^{(2)} \end{pmatrix} .$$

Analogno kao kod jednodimenzionalnog autoregresivnog modela, slučajne vektore $\tilde{X}_n$ možemo izraziti pomoću bijelog šuma i početnih uvjeta. U stvari, možemo koristiti točno iste argumente kao one korištene u dokazu Rezultata 5.1. Korištenjem definicije (23) dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{X}_s &= \hat{A}\tilde{X}_{s-1} + \tilde{e}_s, \\ \tilde{X}_{s+1} &= \hat{A}\tilde{X}_s + \tilde{e}_{s+1} = \hat{A}^2\tilde{X}_{s-1} + \hat{A}\tilde{e}_s + \tilde{e}_{s+1}, \\ \tilde{X}_{s+2} &= \hat{A}\tilde{X}_{s+1} + \tilde{e}_{s+2} = \hat{A}^3\tilde{X}_{s-1} + \hat{A}^2\tilde{e}_s + \hat{A}\tilde{e}_{s+1} + \tilde{e}_{s+2} \,. \end{aligned}$$

Pojavljuje se ista shema kao ona opažena kod jednodimenzionalnog autoregresivnog modela AR(1), te dobivamo

$$\tilde{X}_n = \hat{A}^{n-s+1}\tilde{X}_{s-1} + \sum_{l=0}^{n-s} \hat{A}^{n-s-l}\tilde{e}_{s+l}, \quad n = s, s+1, \dots,$$

ili, ekvivalentno

$$\tilde{X}_n = \hat{A}^{n-s+1}\tilde{X}_{s-1} + \sum_{l=0}^{n-s} \hat{A}^{l}\tilde{e}_{n-l}, \quad n = s+1, s+2, \dots .$$

9 Integrirani i kointegrirani vremenski nizovi

Definicija 9.1.
Slučajni proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ zove se integriranim reda d (često se koristi notacija $I(d)$) ako je slučajni proces

$$\{Y_n\}_{n=s+d}^{\infty} = \nabla^d \{X_n\}_{n=s}^{\infty},$$

stacionaran slučajni proces.
Poučno je reformulirati Definiciju 9.1 za specijalne slučajeve $d = 0$ i $d = 1$.
$d = 0$: Slučajni proces $I(0)$ je stacionaran proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$.
$d = 1$: Slučajni proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ je je integrirani slučajni proces prvog reda, $I(1)$, ako je slučajni proces

$$\{Y_n\}_{n=s+1}^{\infty} = \{X_n - X_{n-1}\}_{n=s+1}^{\infty},$$

stacionaran proces.
$I(1)$ proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ dan je pomoću stacionarnog procesa $\{Y_n\}_{n=s+1}^{\infty}$ s

$$X_n = X_s + \sum_{l=s+1}^{n} Y_l, \text{ za } n = s+1, s+2, \dots .$$

Pretpostavimo da je dano $X_s = x$ (početni uvjet), i neka su μ i $\gamma(k)$ očekivanje i autokovarijacijska funkcija stacionarnog procesa $\{Y_n\}_{n=s+1}^{\infty}$. Očekivanja slučajnih varijabli X_n dana su s

$$\mu_n = x + (n-s)\mu, \; n = s, s+1, s+2, \dots ,$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

a varijance su dane s

$$\nu_n = (n-s)\sigma^2 + 2\sum_{k=1}^{n-s-1}(n-s-k)\gamma(k),\ n = s+1, s+2\dots .$$

Prema tome, $I(1)$ proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ je nestacionaran proces.

Definicija 9.2

Višedimenzionalni slučajni proces

$$\tilde{V}_n = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix},\ n = s, s+1, s+2, \dots ,$$

naziva se *kointegriranim* ako vrijedi:

(1) $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ i $\{Y_n\}_{n=s}^{\infty}$ su $I(1)$ slučajni procesi,

(ii) postoji vektor (α, β) takav da je $\alpha X_n + \beta Y_n$ stacionaran slučajni proces.

Vektor (α, β) naziva se *vektor kointegriranja*.

Kao primjer kointegriranog slučajnog procesa promotrimo dvodimenzionalni autoregresivni proces (23). Neka svojstvene vrijednosti matrice $\hat{A}$ zadovoljavaju $\lambda_1 = 1$ i $|\lambda_2| < 1$. Tada su $\{X_n^{(1)}\}_{n=s}^{\infty}$ i $\{X_n^{(2)}\}_{n=s}^{\infty}$ integrirani slučajni procesi, i $\{(\alpha_{11}-1)X_n^{(1)} + \alpha_{12}X_n^{(2)}\}_{n=s}^{\infty}$ je stacionaran AR(1) proces. Vektor kointegriranja je $(\alpha_{11}-1, \alpha_{12})$.

Definicija 9.3

Višedimenzionalan slučajan proces

$$\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} X_n^{(1)} \\ X_n^{(2)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \end{pmatrix},\ n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots ,$$

naziva se kointegriranim slučajnim procesom reda m ako vrijedi:

(i) jednodimenzionalni slučajni procesi $\{X_n^{(1)}\}_{n=s}^{\infty}$, $\{X_n^{(2)}\}_{n=s}^{\infty}$, $\dots$, $\{X_n^{(k)}\}_{n=s}^{\infty}$ su integrirani slučajni procesi,

(ii) postoji točno m linearno nezavisnih vektora $(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \dots, \alpha_k^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, m$, takvih da su

$$\left\{\sum_{l=1}^{k} \alpha_l^{(j)} X_n^{(l)}\right\}_{n=s}^{\infty},\quad j = 1, 2, \dots, m,$$

stacionarni slučajni procesi.

Vektori $(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \ldots, \alpha_k^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots, m$, zovu se *vektori kointegriranja*.

10 Markovljevo svojstvo modela vremenskih nizova

Definicija 10.1
Slučajni proces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ima *Markovljevo svojstvo*, ako je uvjetna distribucija slučajne varijable X_n uz dane sve prijašnje vrijednosti $X_1, \ldots, X_{n-1}$ jednaka uvjetnoj distribuciji slučajne varijable X_n uz danu vrijednost samo od X_{n-1}. To jest,

$$\mathbb{P}[X_n \in [a_n, b_n] | X_{n-1} = a_{n-1}, \ldots, X_1 = a_1] = \mathbb{P}[X_n \in [a_n, b_n] | X_{n-1} = a_{n-1}],$$

za sve $n \geq 2$, za svaki interval $[a_n, b_n]$, i za sve vrijednosti $a_1, \ldots, a_{n-1}$.
Ponekad je moguće pronaći eksplicitan izraz za slučajne varijable X_n pomoću prijašnjih slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_{x-1}$, i, eventualno, nekih drugih slučajnih varijabli nezavisnih od $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Tada slučajni proces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ima Markovljevo svojstvo ako i samo ako slučajne varijable $X_1, \ldots, X_{n-2}$ ne ulaze u eksplicitan izraz za X_n, za svaki $n \geq 1$.
Jednostavan slučaj slučajnog procesa s Markovljevim svojstvom je autoregresivan proces prvog reda $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ definiran s

$$\begin{cases} X_n = \mu + \alpha(X_{n-1} - \mu) + e_n, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

gdje je $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih normalnih slučajnih varijabli s oěkivanjem nula i varijancom σ^2. Zaista, u tom slučaju imamo izraz za svaku slučajnu varijablu X_n pomoću prijašnjih slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_{n-1}$ i slučajne varijable e_n nezavisne od $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Budući da slučajne varijable $X_1, \ldots, X_{n-2}$ u stvari ne ulaze u izraz za X_n, slučajni proces AR(1) ima Markovljevo svojstvo.
Analogno, svaki slučajni proces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ definiran relacijom oblika

$$X_n = g(X_{n-1}, e_n),$$

ima Markovljevo svojstvo, ako je $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Funkcija $g(x, y)$ je proizvoljna funkcija dviju varijabli.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Uočimo da autoregresivni proces drugog reda $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ definiran s

$$\begin{cases} Y_n = \mu + \alpha_1(Y_{n-1} - \mu) + \alpha_2(Y_{n-2} - \mu) + e_n, \\ Y_{-1} = \alpha, Y_0 = \beta, \end{cases} \tag{24}$$

nema Markovljevo svojstvo. Zaista, dani eksplicitni izraz za Y_n pomoću $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ i e_n sadrži slučajnu varijablu Y_{n-2}. Zato $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ nema Markovljevo svojstvo.

Definicija 10.2.
Višedimenzionalan slučajni proces

$$\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} X_n^{(1)} \\ X_n^{(2)} \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, \ldots ,$$

ima Markovljevo svojstvo ako je zajednička uvjetna distribucija vektora $\tilde{X}_n$ uz dane sve prijašnje vektore $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n-1}$ jednaka zajedničkoj uvjetnoj distribuciji vektora $\tilde{X}_n$ uz danu vrijednost samo vektora $\tilde{X}_{n-1}$.
Analogno kao kod jednodimenzionalnog slučajnog procesa, moguće je odrediti da li višedimenzionalni slučajni vektor ima ili nema Markovljevo svojstvo promatranjem eksplicitnog izraza za slučajni vektor $\tilde{X}_n$ pomoću prijašnjih slučajnih vektora $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n-1}$. Slučajni proces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ima Markovljevo svojstvo samo ako u eksplicitan izraz za $\tilde{X}_n$ ulazi slučajan vektor $\tilde{X}_{n-1}$ i vektori nezavisni od $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n-2}$, za sve $n \geq 1$.
Autoregresivni proces drugog reda $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan jedndžbom (24) može se u stvari reprezentirati kao višedimenzionalni autoregresivni proces s Markovljevim svojstvom. Zaista, promotrimo dvodimenzionalni slučajni proces

$$\tilde{Y}_n = \begin{pmatrix} Y_n \\ Y_{n-1} \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, \ldots,$$

koji zadovoljava jednadžbu

$$\begin{pmatrix} Y_n \\ Y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} Y_{n-1} \\ Y_{n-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Prva komponenta dvodimenzionalnog procesa $\{\tilde{Y}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ zadovoljava jednadžbu (24), dok je druga komponenta jednaka prvoj, odgođenoj za jedan

vremenski interval. Stoga su AR(2) proces (24) i višedimenzionalni proces $\{\tilde{Y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ekvivalentni.
Uz malu promjenu notacije jednadžbu (25) možemo zapisati

$$\begin{pmatrix} Y_n^{(1)} \\ Y_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} Y_{n-1}^{(1)} \\ Y_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

ili

$$\tilde{Y}_n = \tilde{\mu} + \hat{A}(\tilde{Y}_{n-1} - \tilde{\mu}) + \tilde{e}_n \,. \tag{26}$$

Višedimenzionalni proces $\{\tilde{Y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan jednadžbom (26) ima Markovljevo svojstvo. Zaista, dani izraz za $\tilde{Y}_n$ pomoću prijašnjih vektora $\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_{n-1}$ ne sadrži vektore $\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_{n-2}$. Dodatni slučajni vektor $\tilde{e}_n$ kojeg taj izraz sadrži ne ovisi o $\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_{n-1}$. Stoga slučajni proces $\{\tilde{Y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ima Markovljevo svojstvo.
Analogno možemo reprezentirati autoregresivni proces AR(p), $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, koji zadovoljava

$$Z_n = \mu + \alpha_1(Z_{n-1} - \mu) + \alpha_2(Z_{n-2} - \mu) + \cdots + \alpha_p(Z_{n-p} - \mu) + e_n \,, \tag{27}$$

kao višedimenzionalni proces s Markovljevim svojstvom. Zaista, uvedemo li vektore

$$\tilde{Z}_n = \begin{pmatrix} Z_n \\ Z_{n-1} \\ \vdots \\ Z_{n-p} \end{pmatrix}, \ \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}, \ \tilde{e}_n = \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

i matricu

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

jednadžbu (27) možemo zapisati kao

$$\tilde{Z}_n = \tilde{\mu} + \hat{B}(\tilde{Z}_{n-1} - \tilde{\mu}) + \tilde{e}_n \,.$$

Prva komponenta od $\tilde{Z}_n$ zadovoljava relaciju (27), dok su ostale komponente različite odgode prve. Slučajni proces $\{\tilde{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ima Markovljevo svojstvo zbog istog razloga kao i proces $\{\tilde{Y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ definiran jednadžbom (26).

 © Faculty and Institute of Actuaries

11 Box-Jenkinsov pristup identifikaciji, procjeni i dijagnozi vremenskih nizova

U ovoj sekciji promatramo opću klasu autoregresivnih integriranih modela s ostacima pokretnih sredina - ARIMA(p, d, q) modele. Kao i obično pretpostavljamo da je dan vremenski niz $\{x_n\}_{n=0}^N$ (povijesni podaci). Box-Jenkinsov pristup nam omogućuje pronaći ARIMA model koji je razumno jednostavan i opisuje dovoljno točno povijesne podatke $\{x_n\}_{n=0}^N$. Glavne točke pristupa su

- Pokusna identifikacija modela iz ARIMA klase.
- Procjena parametara u identificiranom modelu.
- Dijagnostička ispitivanja.

Ukoliko pokusno identificiran model prođe dijagnostičke testove, model se može koristiti za predviđanje. Ako ne prođe, dijagnostički testovi bi trebali pokazati kako modificirati model, te se provodi novi krug identifikacije, procjene i dijagnoze.

Identifikacija.

ARIMA(p, d, q) model je potpuno identificiran izborom nenegativnih vrijednosti za parametre p, d i q. Parametar d je broj koliko puta trebamo diferencirati vremenski niz $\{x_n\}_{n=1}^N$ da bismo ga preveli u vjerojatnu realizaciju

$$\{z_n\}_{n=d}^N \equiv \{\nabla^d x_n\}_{n=d}^N ,$$

stacionarnog slučajnog procesa. Sljedeća tri principa mogu se koristiti za odabir odgovarajuće vrijednosti od d.

1. Vremenski niz $\{x_n\}_{n=1}^N$ može se modelirati stacionarnim ARMA modelom ako autokorelacijska funkcija uzorka

$$r_k = \frac{\sum_{l=k+1}^N (x_l - \hat{\mu})(x_{l-k} - \hat{\mu})}{\sum_{l=1}^N (x_l - \hat{\mu})^2}$$

brzo opada po k. Specifično obilježje podataka $\{x_n\}_{n=1}^N$ koje se može diferenciranjem prevesti u realizaciju stacionarnog slučajnog procesa, je sporo opadajuća autokorelacijska funkcija uzorka r_k.

2. Varijanca uzorka

$$\sigma_d^2 \equiv \frac{1}{N}\sum_{n=d}^{N} z_n^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=d}^{N} z_n\right)^2$$

prvo opada po d dok se ne postigne stacionarnost, a tada počinje rasti. Stoga se d može odabrati kao vrijednost koja minimizira σ_d^2. Ponekad je $\sigma_d^2 \approx \sigma_{d-1}^2$ za neki d, te tada treba razmatrati više od jedne vrijednosti za d. Ako σ_d^2 počinje odmah rasti, tada treba odabrati $d = 0$, to jest, vremenski niz $\{x_n\}_{n=0}^N$ je sam vjerojatna realizacija stacionarnog procesa.
3. Graf nestacionarnog niza pokazuje promjenljiv nivo, čak nakon prilagodbe za očekivanje koje nije nula. Konstantnost nivoa stacionarnog vremenskog niza može se otkriti kako slijedi. Promotrimo vremenski niz $\{x_n\}_{n=1}^{2N}$ i označimo s L_M broj koliko puta niz prijeđe nivo $x = 0$ na intervalu $n = 1, 2, \ldots, M$. Za centrirane stacionarne vremenske nizove trebalo bi biti $L_{2N}/L_n \approx 2$.
Pretpostavimo sada da je pronađena odgovarajuća vrijednost parametra d, te da je vremenski niz

$$\{z_n\}_{n=d}^N \equiv \{\nabla^d x_n\}_{n=d}^N\,,$$

vjerojatna realizacija stacionarnog vremenskog niza. U okviru Box-Jenkinsovog pristupa nastojimo pronaći ARMA(p,q) model kojeg je $\{z_n\}_{n=d}^N$ vjerojatna realizacija.
Identifikacija parametara p i q je lagana ukoliko su ili p ili q jednaki nula. Teorijska parcijalna autokorelacijska funkcija $\phi(k)$ AR(p) modela je nula za $k > p$. Stoga, ako je $\{z_n\}_{n=d}^N$ realizacija AR(p) modela, tada parcijalna autokorelacijska funkcija uzorka $\hat{\phi}(k)$ (izračunata za $\{z_n\}_{n=d}^N$) treba poprimiti vrijednosti u 95% pouzdanom intervalu

$$[-1.96\sigma_\phi, 1.96\sigma_\phi],\ \text{gdje je } \sigma_\phi^2 = N^{-1}\,,$$

za svaki $k > p$. To jest, parcijalna autokorelacijska funkcija uzorka $\hat{\phi}(k)$ treba biti odrezana u nekoj vrijednosti $k = p^*$.
Teorijska autokorelacijska funkcija ρ_k MA(q) modela je nula za $k > q$. Stoga, ako je $\{z_n\}_{n=d}^N$ realizacija MA(q) modela, tada autokorelacijska funkcija uzorka r_k (izračunata za $\{z_n\}_{n=d}^N$) treba poprimiti vrijednosti u 95% pouzdanom intervalu

$$[-1.96\sigma_r, 1.96\sigma_r],\ \text{gdje je } \sigma_r = N^{-1}\left(1 + 2\sum_{l=1}^{q} r_l^2\right),$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

za svaki $k > q$. To jest, autokorelacijska funkcija uzorka r_k treba biti odrezana u nekoj vrijednosti $k = q^*$.
Prema tome, ako je $\hat{\phi}(k)$ odrezano u nekoj vrijednosti $k = p^*$, tada se AR(p^*) pokusno identificira kao model za $\{z_n\}_{n=d}^N$, a ARIMA($p^*, d, 0$) se pokusno identificira kao model za $\{x_n\}_{n=0}^N$. S druge strane, ako je r_k odrezano u nekoj vrijednosti $k = q^*$, tada se MA(q^*) pokusno identificira kao model za $\{z_n\}_{n=d}^N$, a ARIMA($0, d, q^*$) se pokusno identificira kao model za $\{x_n\}_{n=0}^N$.
Ako ni $\hat{\phi}(k)$ ni r_k nisu odrezani, tada trebamo tražiti ARMA(p, q) model s vrijednostima p i q koje nisu nula. Potrebno je nacrtati grafove autokorelacijske funkcije uzorka r_k i parcijalne autokorelacijske funkcije uzorka $\hat{\phi}(k)$, i vizualno usporediti sa sličnim grafovima teorijskih autokorelacijskih funkcija ρ_k i $\phi(k)$ za razne vrijednosti p i q. Treba identificirati one vrijednosti p^* i q^* koje daju najbolju vizualnu prilagodbu teorijskih i uzoračkih grafova. Ako nekoliko vrijednosti od p i q daju vizualno ekvivalentne prilagodbe, tada treba odabrati minimalne moguće vrijednosti p^* i q^* (princip štedljivosti).

Procjena.

Nakon što su identificirane vijednosti za p i q, problem postaje procjena vrijednosti parametara $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ i $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ za ARMA(p, q) model

$$Z_n = \alpha_1 Z_{n-1} + \alpha_2 Z_{n-2} + \cdots + \alpha_p Z_{n-p} + e_n + \beta_1 e_{n-1} + \beta_2 e_{n-2} + \cdots + \beta_q e_{n-q}\,. \quad (28)$$

Ukoliko vrijednosti za p i q nisu prevelike, problem procjene se uvijek može riješiti numerički. Glavna ideja je prvo izračunati vrijednosti od $\{e_n\}_{n=d}^N$ koristeći $\{z_n\}_{n=d}^N$ i relacije (28). Nakon toga tražimo vrijednosti za α i β koje minimiziraju varijancu uzorka

$$\hat{\sigma}^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q) = \frac{1}{N} \sum_{l=d}^{N} e_l^2\,.$$

Sljedeći primjer ilustrira glavne korake rješavanja problema procjene.
Pretpostavimo da je dan $\{z_n\}_{n=d}^N$, te da su preliminarno identificirane vrijednosti parametara p i q jednake $p = q = 1$. Realizacija $\{z_n\}_{n=d}^N$ ARMA($1, 1$) procesa zadovoljava

$$z_n = \alpha z_{n-1} + e_n + \beta e_{n-1}\,,$$

gdje je $\{e_n\}_{n=d-1}^N$ realizacija bijelog šuma. Korištenjem sljedećeg postupka možemo izračunati varijancu uzorka $\hat{\sigma}(\alpha, \beta)$ za sve čvorove mreže $\alpha = -0.9, -0.8, \ldots, 0.8, 0.9$ i $\beta = -0.9, -0.8, \ldots, 0.8, 0.9$. Uzmimo prvi podatak z_d kao početni uvjet, i stavimo

$$e_{d+1} = z_{d+1} - \alpha z_d\,.$$

Preostale e_k računamo iterativno koristeći

$$e_k = z_k - \alpha z_{k-1} - \beta e_{k-1}\,.$$

Nađemo točku (α_0, β_0) u mreži s najmanjom vrijednosti od

$$\hat{\sigma}^2(\alpha, \beta) = \sum_{k=d+1}^{N} e_k^2\,.$$

Reduciramo korak mreže na 0.01, napravimo novu mrežu oko (α_0, β_0) i pronađemo bolju aproksimaciju za α i β. Ponavljamo sve dok procijenitelji nisu poznati do na traženu točnost.

Dijagnostička ispitivanja.

Najjednostavniji model vremenskog niza je niz nezavisnih i jednako distribuiranih normalnih slučajnih varijabli $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, ARIMA$(0,0,0)$ s očekivanjem i varijancom procijenjenim iz podataka $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ korištenjem očekivanja i varijance uzorka. Međutim, taj model često ne pruža odgovarajući opis podataka $\{x_n\}_{n=0}^{N}$, jer ne prolazi dolje opisane dijagnostičke testove. Ideja iza modeliranja vremenskih nizova je pronaći skup operacija koje transformiraju podatke $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ u vjerojatnu realizaciju niza nezavisnih normalnih slučajnih varijabli. Na primjer, AR(1) model $X_n = \alpha X_{n-1} + e_n$ je odgovarajući opis podataka $\{x_n\}_{n=0}^{N}$, ako operacija $1-\alpha B$ prevodi podatke u takvu realizaciju. To jest, ako je $\{x_n - \alpha x_{n-1}\}_{n=1}^{N}$ vjerojatna realizacija centriranog bijelog šuma. Nakon pokusne identifikacije ARIMA(p,d,q) modela i izračuna procjena $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$, $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_p, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_q$, trebamo napraviti dijagnostičko ispitivanje. Cilj dijagnostičkog ispitivanja je ustanoviti da li je skup brojeva $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ izračunat iz podataka $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ korištenjem relacija

$$x_n = \hat{\alpha}_1 x_{n-1} + \cdots + \hat{\alpha}_p x_{n-p} + e_n + \hat{b}_1 e_{n-1} + \cdots + \hat{b}_q e_{n-q}\,,$$

vjerojatna realizacija niza nezavisnih i jednako distribuiranih (normalnih) slučajnih varijabli. Brojevi $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ se uobičajeno nazivaju *ostaci* (engl. residuals).

Često se koriste sljedeća ispitivanja.

Kontrola grafa od $\{e_n\}_{n=1}^{N}$.

Vizualna kontrola grafa ostataka $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ često pomaže identificirati jaku ovisnost veličine fluktuacija po n. Tipični primjeri su trend, ciklička komponenta, i nekonstantnost varijance. Nije vjerojatno da će realizacija niza nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli imati išta od toga. Također,

 © Faculty and Institute of Actuaries

oko 95% ostataka $\{e_n\}_{n=1}^N$ bi trebalo ležati između $-1.96\hat{\sigma}$ i $1.96\hat{\sigma}$, ako je identificirani ARIMA(p,d,q) model odgovarajući za opis podataka.

Spektralni test.

Spektralna gustoća bijelog šuma je konstanta $f(\omega)=\frac{\sigma^2}{2\pi}$, vidi Primjer 7.2. Tu činjenicu možemo iskoristiti za dizajn testa nezavisnosti i stacionarnosti ostataka $\{e_n\}_{n=1}^N$. Procijenitelj za $f(\omega)$ dan je s

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\hat{\gamma}_0+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N/2}\hat{\gamma}_n\cos(n\omega)\,,$$

gdje je $\hat{\gamma}_n$ autokovarijanca uzorka od $\{e_n\}_{n=1}^N$, vidi Sekciju 2. Visoki uski šiljci u $\hat{f}(\omega)$ označavaju prisutnost cikličkih komponenata u $\{e_n\}_{n=1}^N$, na primjer, sezonsku komponentu. Široki vrh kod niske frekvencije označava prisutnost trenda u $\{e_n\}_{n=1}^N$.

Kontrola autokorelacijskih funkcija uzorka od $\{e_n\}_{n=1}^N$.

Autokorelacijske funkcije uzorka niza nezavisnih i jednakodistribuiranih slučajnih varijabli $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$, dane sa

$$\rho_k=\frac{\sum_{l=1}^{N-k}(Z_l-\mu)(Z_{l+k}-\mu)}{\sum_{l=1}^{N}(Z_l-\mu)^2}\,,$$

imaju distribuciju koja je približno normalna za velike vrijednosti od N, s očekivanjem nula i varijancom N^{-1}. Dakle, oko 95% vrijednosti od ρ_k treba ležati između ograda $\pm1.96/\sqrt{N}$. Pretpostavimo li da smo podacima $\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ prilagodili odgovarajući ARIMA model, isti rezultat treba vrijediti za autokorelacijske funkcije uzorka ostataka $\{e_n\}_{n=1}^N$.

Portmanteau test.

Umjesto provjere da li svaki ρ_k pada unutar 95% -tnog intervala pouzdanosti $[-1.96/\sqrt{N},1.96/\sqrt{N}]$, moguće je promatrati jednu statistiku koja ovisi o svim ρ_k, $k=1,2,\ldots,M$, gdje je M recimo 20. Test je zasnovan na činjenici da slučajna varijabla

$$Q_M=N\sum_{k=1}^{M}\rho_k^2$$

ima približno χ^2 distribuciju s $M-(p+q)$ stupnjeva slobode. Adekvatnost modela se stoga odbija na nivou α ako je

$$Q_M>\chi^2_{1-\alpha}(M-p-q)\,,$$

gdje je $\chi^2_{1-\alpha}(M-p-q)$ $1-\alpha$ kvantil χ^2 distribucije s $M-p-q$ stupnjeva slobode.

Brojanje točaka okreta.

Za niz brojeva $y_1, y_2, \dots, y_N$ kažemo da ima točku okreta u vremenu k, ako je ili $y_{k-1} < y_k$ i $y_k > y_{k+1}$, ili $y_{k-1} > y_k$ i $y_k < y_{k+1}$. Ako je $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s neprekidnom distribucijom, tada je vjerojatnost točke okreta u vremenu k jednaka $\frac{2}{3}$, očekivani broj točaka okreta je $\frac{2}{3}(N-2)$, a varijanca je $(16N-29)/90$. Stoga bi broj točaka okreta u realizaciji od $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ trebao biti unutar 95%-tnog intervala pouzdanosti

$$\left[\frac{2}{3}(N-2) - 1.96\sqrt{\frac{16N-29}{90}},\ \frac{2}{3}(N-2) + 1.96\sqrt{\frac{16N-29}{90}}\right].$$

Test predznaka razlike.

Kod ovog testa brojimo vrijednosti k takve da je $y_k > y_{k-1}$. Označimo li taj broj sa S, tada je $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2}(N-1)$ i $\mathrm{Var}(S) = \frac{1}{12}(N+1)$ za niz $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ nezavisnih slučajnih varijabli s neprekidnom distribucijom. Stoga bi u realizaciji od $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ broj vrijednosti k takvih da je $y_k > y_{k-1}$ trebao biti unutar 95%-tnog intervala pouzdanosti

$$\left[\frac{1}{2}(N-1) - 1.96\sqrt{\frac{N+1}{12}},\ \frac{1}{2}(N-1) + 1.96\sqrt{\frac{N+1}{12}}\right].$$

Provjera normalnosti.

Promotrimo niz $\{e_n\}_{n=1}^N$ i uređene statistike

$$e_{(1)} < e_{(2)} < \cdots < e_{(N)}.$$

To jest, $\{e_{(n)}\}_{n=1}^N$ je niz $\{e_n\}_{n=1}^N$ preuređen po rastućem uređaju. Ako je niz ostataka $e_1, e_2, \dots, e_N$ realizacija niza nezavisnih i jednako distribuiranih normalnih slučajnih varijabli, tada bi graf točaka

$$\left\{\Phi^{-1}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)/N\right], e_{(k)}\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

trebao biti približno linearan. Ovdje je $\Phi^{-1}(x)$ inverz standardne normalne funkcije distribucije.

 © Faculty and Institute of Actuaries

12 Modeli prijenosne funkcije

Modeliranje pomoću prijenosne funkcije je spajanje konvencionalnog modeliranja vremenskih nizova i linearne regresije. Model prijenosne funkcije uključuje jedan izlazni niz $\{Y_n\}_{n=1}^N$ i jedan (ili više) ulaznih nizova $\{X_n\}_{n=1}^N$. On predviđa buduće vrijednosti izlaznog niza na osnovi prošlih vrijednosti tog niza i prošlih vrijednosti ulaznog niza. Opći oblik modela prijenosne funkcije je

$$Y_n = \mu + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k Y_{n-k} + \sum_{l=1}^{q} b_l X_{n-l} + R_n \,,$$

gdje je $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ centriran stacionaran proces (ostaci), nezavisan od ulaznog procesa $\{X_n\}_{n=1}^N$. Pretpostavlja se da se istom transformacijom stacionarnosti izlazni, odnosno ulazni proces, mogu prevesti u stacionarne procese $\{U_n\}_{n=1}^N$, odnosno $\{V_n\}_{n=1}^N$.
Za izgradnju modela prijenosne funkcije koristimo povijesne podatke $\{y_n\}_{n=1}^N$ (izlazni vremenski niz) i $\{x_n\}_{n=1}^N$ (ulazni vremenski niz). Izgradnja modela uključuje tri koraka.

- Identificiranje modela za opis ulaznog vremenskog niza.
- Identificiranje preliminarnog modela prijenosne funkcije za opis izlaznog vremenskog niza.
- Identificiranje modela za ostatke.

Korak 1.
Koristi se transformacija stacionarnosti za prevođenje ulaznog vremenskog niza $\{x_n\}_{n=1}^N$ u vremenski niz $\{v_n\}_{n=1}^N$. Koristi se ista transformacija stacionarnosti za prevođenje izlaznog niza $\{y_n\}_{n=1}^N$ u vremenski niz $\{u_n\}_{n=1}^N$. Koristi se Box-Jenkinsov pristup za identifikaciju ARMA(k, l) modela za $\{v_n\}_{n=1}^N$.
Korak 2.
Identificirani model ARMA(k, l) sugerira transformaciju koja prevodi $\{v_n\}_{n=1}^N$ u realizaciju bijelog šuma $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$. Izračuna se vremenski niz $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$, i koristi ista transformacija za "predizbijeljivanje" vremenskog niza $\{u_n\}_{n=1}^N$. Označimo predizbijeljeni vremenski niz s $\{b_n\}_{n=1}^N$.

Izračuna se korelacijska funkcija uzorka između $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$ i $\{b_n\}_{n=1}^N$

$$r_k(\alpha, b) = \frac{\sum_{n=1}^N (\alpha_n - \bar{\alpha})(b_n - \bar{b})}{\left[\sum_{n=1}^N (\alpha_n - \bar{\alpha})^2\right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^N (b_n - \bar{b})^2\right]^{1/2}}$$

za, recimo, $k = -20, -19, \ldots, 19, 20$, gdje su $\bar{\alpha}$ i $\bar{b}$ očekivanja uzorka od $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$ i $\{b_n\}_{n=1}^N$. Korelacijska funkcija ne bi smjela imati statistički značajne vrijednosti različite od nule za negativne k. To jest, trebali bismo imati $r_k(\alpha, b) \in [-1.96N^{-1/2}, 1.96N^{-1/2}]$, na 95%-tnom nivou pouzdanosti, za svaki $k < 0$. U suprotnom, vremenski niz $\{x_n\}_{n=1}^N$ nije vodeći indikator od $\{y_n\}_{n=1}^N$ i ne može se koristiti za modeliranje pomoću prijenosne funkcije od $\{y_n\}_{n=1}^N$. Svi pozitivni zaostaci koji odgovaraju (značajnim) vrijednostima od $r_k(\alpha, b)$ različitim od nule trebaju se identificirati i koristiti za formulaciju preliminarnog modela prijenosne funkcije

$$\delta(B)U_n = \mu' + Cw(B)B^l V_n + \eta_n \,. \tag{29}$$

U gornjoj jednadžbi
C je parametar skaliranja,
η_n su ostaci,
l - minimalni zaostatak sa statistički značajnim vrijednostima korelacije $r_l(\alpha, b)$ različitim od nule,

$$w(B) = 1 - w_1 B - w_2 B^2 - \cdots - w_r B^r,$$
$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \cdots - \delta_s B^s \,.$$

Redovi r i s polinoma $w(x)$ i $\delta(x)$ trebaju se identificirati tehnikama Box-Jenkinsovog pristupa. To znači da se trebaju nacrtati kovarijacijske funkcije uzorka i vizualno usporediti s teorijskim kovarijacijskim funkcijama za razne vrijednosti od r i s. Nakon toga se trebaju procijeniti parametri $w_1, w_2, \ldots, w_r$ i $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ numeričkim metodama procjene Box-Jenkinsovog pristupa.

Korak 3.

Izračunaju se vrijednosti ostataka $\{\eta_n\}_{n=1}^N$ u preliminarnom modelu prijenosne funkcije. Koristi se Box-Jenkinsov pristup za identificiranje ARMA(p, q) modela

$$\phi(B)\eta_n = \theta(B)e_n$$

za opis $\{\eta_n\}_{n=1}^N$.
Model prijenosne funkcije za opis izlaznog vremenskog niza $\{y_n\}_{n=1}^N$ dan je s

$$\phi(B)\delta(B)U_n = \mu + C\phi(B)w(B)B^l V_n + \theta(B)e_n \,.$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

13 Neki specijalni nestacionarni i nelinearni modeli vremenskih nizova

Bilinearni modeli.
Opća klasa bilinearnih modela uključuje slučajne procese $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ definirane relacijom

$$X_n + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k (X_{n-k} - \mu) = \mu + e_n + \sum_{k=1}^{r} c_k e_{n-k} + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{q} b_{lk} (X_{n-l} - \mu) e_{n-k},$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ bijeli šum. Najjednostavniji predstavnik klase bilinearnih modela je slučajni proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ definiran relacijom

$$X_n + \alpha(X_{n-1} - \mu) = \mu + e_n + c e_{n-1} + b(X_{n-1} - \mu) e_{n-1}\,.$$

Glavna kvalitativna razlika između bilinearnih modela i modela iz ARMA klase je ta da mnogi bilinearni modeli pokazuju “eksplozivno” ponašanje.
Autoregresivni modeli s pragom.
Jednostavan predstavnik klase autoregresivnih modela s pragom je slučajni proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ definiran relacijom

$$X_n = \mu + \begin{cases} \alpha(X_{n-1} - \mu) + e_n, & \text{ako je } X_{n-1} \le d, \\ b(X_{n-1} - \mu) + e_n, & \text{ako je } X_{n-1} > d\,. \end{cases}$$

Granični ciklusi su specifično obilježje nekih modela iz autoregresivne klase s pragom. To čini autoregresivne modele s pragom prikladnim za opis “cikličkih” fenomena.
Autoregresivni modeli sa slučajnim koeficijentima.
Druga modifikacija modela AR klase su autoregresivni modeli sa slučajnim koeficijentima regresije. Jednostavan predstavnik je slučajni proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ definiran relacijom

$$X_n = \mu + \begin{cases} a(X_{n-1} - \mu) + e_n, & \text{s vjerojatnosti } p_1, \\ b(X_{n-1} - \mu) + e_n, & \text{s vjerojatnosti } p_2, \\ e_n, & \text{s vjerojatnosti } 1 - p_1 - p_2\,. \end{cases}$$

Drugi način zapisa definicije slučajnog procesa $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ je

$$X_n = \mu + \alpha_n (X_{n-1} - \mu) + e_n\,,$$

gdje je $\{\alpha_n\}_{n=s}^{\infty}$ niz nezavisnih diskretnih slučajnih varijabli sa zajedničkom distribucijom

$$\mathbb{P}[\alpha = a] = p_1,\ \mathbb{P}[\alpha = b] = p_2,\ \mathbb{P}[\alpha = 0] = 1 - p_1 - p_2\,.$$

Autoregresivni modeli s uvjetnom heteroskedastičnošću.
Klasa autoregresivnih modela s uvjetnom heteroskedastičnošću (engl. autoregressive models with conditional heteroscedasticity) reda p - ARCH(p) modeli - definirana je relacijom

$$X_n = \mu + e_n \sqrt{\alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k (X_{n-k} - \mu)^2}\,,$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ niz nezavisnih standardnih normalnih varijabli. Najjednostavniji predstavnik ARCH(p) klase je ARCH(1) model definiran relacijom

$$X_n = \mu + e_n \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 (X_{n-1} - \mu)^2}\,.$$

ARCH modeli se koriste za modeliranje financijskih vremenskih nizova, gdje se X_n interpretiraju kao dnevni povrati, $X_n = \ln(Z_n/Z_{n-1})$, i Z_n je cijena imovine na kraju n-tog tržnog dana. Značajne promjene u cijeni imovine često su praćene razdobljima visoke promjenljivosti (engl. volatility). ARCH modeli su uhvatili to obilježje. Zaista, značajni otklon od X_{n-1} od srednjeg rasta μ daje više vrijednosti za varijancu uvjetne distribucije od X_n, uz dano X_{n-1}.

Lognormalni, autoregresivni modeli.
Jednostavan predstavnik klase lognormalnih, autoregresivnih modela je slučajni proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ definiran pravilima

$$X_n = \mu + V_n e_n,$$

$$\ln V_n = \alpha + \phi[\ln(V_n) - \alpha] + \epsilon_n\,,$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ niz nezavisnih standardnih normalnih slučajnih varijabli, a $\{\epsilon_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ niz nezavisnih normalnih slučajnih varijabli s očekivanjem nula i varijancom σ^2. Lognormalni, autoregresivni modeli su zamišljeni za modeliranje stohastičke promjenljivosti financijskih vremenskih nizova. Slučajni proces $\{X_n\}_{n=s}^{\infty}$ modelira dnevne povrate $X_n = \ln(Z_n/Z_{n-1})$. Autoregresivni model za $\ln(V_n)$ odražava empirijski uočene (kratke) trendove u promjenljivosti - tržni dan s visokom promjenljivosti vjerojatno će pratiti još jedan dan s visokom promjenljivosti. Dan s mirnim trgovanjem biti će vjerojatno praćen još jednim mirnim danom.

 © Faculty and Institute of Actuaries

14 Primjene linearnih modela vremenskih nizova

Slučajna šetnja.
Sljedeći model se često koristi za opis razvoja dnevnih cijena dionica Z_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$Z_{n+1} = Z_n \exp(v_{n+1})\,,$$

gdje je $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem μ i varijancom σ^2. Taj model ekvivalentan je modelu slučajne šetnje (ili $I(1)$ modelu). Zaista, logaritmi cijena $Y_n = \ln Z_n$ zadovoljavaju jednadžbu

$$Y_{n+1} = Y_n + v_{n+1}\,,$$

koja definira slučajnu šetnju. Potreban je jedan početni uvjet, početna cijena Z_0, za potpunu specifikaciju modela.
Taj model zasnovan je na pretpostavci da su dnevni povrati $\ln(Z_{n+1}/Z_n)$ nezavisni od prijašnjih cijena $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$.
Autoregresivni model.
Jedna od dobro poznatih primjena jednodimenzionalnog autoregresivnog modela je opis razvoja *potrošačkog indeksa cijena* (inflacija) Q_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pretpostavlja se da *intenzitet inflacije*

$$r_n = \ln \frac{Q_n}{Q_{n-1}}\,,$$

slijedi AR(1) proces

$$r_n = \mu + \alpha(r_{n-1} - \mu) + e_n\,.$$

Logaritam potrošačkog indeksa cijena opisan je ARIMA$(1, 1, 0)$ modelom

$$(1 - B)\ln Q_n = \mu + \alpha[(1 - B)\ln Q_{n-1} - \mu] + e_n\,.$$

Potreban je jedan početni uvjet, vrijednost od r_0, za potpunu specifikaciju modela za intenzitet inflacije r_n. Dva početna uvjeta, vrijednosti za Q_{-1} i Q_0 potrebna su za potpunu specifikaciju modela potrošačkog indeksa cijena.
Višedimenzionalni autoregresivni modeli.

Sljedeći jednostavan dinamički Keynesijanski model daje primjer višedimenzionalnog autoregresivnog modela. Označimo sa Y_n nacionalni dohodak kroz neki vremenski period, i označimo sa C_n i I_n ukupnu potrošnju i investicije kroz isti period. Pretpostavlja se da potrošnja C_n ovisi o prihodu u prethodnom periodu

$$C_n = \alpha Y_{n-1} + e_n^{(1)} ,$$

gdje je $\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ centriran bijeli šum. Investicija I_n određena je pomoću mehanizma “ubrzanja”

$$I_n = \beta(C_{n-1} - C_{n-2}) + e_n^{(2)} ,$$

gdje je $\{e_n^{(2)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ centriran bijeli šum. Konačno, svaki dio nacionalnog prihoda se ili potroši ili investira. Dakle,

$$Y_n = C_n + I_n .$$

Eliminiranjem nacionalnog dohotka dolazimo do sljedećeg dvodimenzionalnog autoregresivnog procesa drugog reda

$$\begin{aligned} C_n &= \alpha C_{n-1} + \alpha I_{n-1} + e_n^{(1)}, \\ I_n &= \beta(C_{n-1} - C_{n-2}) + e_n^{(2)}. \end{aligned}$$

Korištenjem matrične notacije gornju jednadžbu možemo zapisat kao

$$\begin{pmatrix} C_n \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n-1} \\ I_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n-2} \\ I_{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n^{(1)} \\ e_n^{(2)} \end{pmatrix} .$$

Kointegrirani model.
Sljedeći jednostavan model razvoja tečajne stope X_n (recimo USD za GBP) daje primjer kointegriranog modela. Pretpostavlja se da tečajna stopa fluktuira oko kupovne moći P_n/Q_n, gdje su P_n, odnosno Q_n, potrošački indeksi cijena za US, odnosno UK. To je opisano sljedećim modelom

$$\begin{aligned} \ln X_n &= \ln \frac{P_n}{Q_n} + \mu + Y_n \\ Y_n &= \alpha Y_{n-1} + e_n + \beta e_{n-1}, \end{aligned}$$

gdje je $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ centriran bijeli šum. Razvoj od $\ln P_n$ i $\ln Q_n$ opisan je ARIMA$(1,1,0)$ modelima

$$\begin{aligned} (1-B)\ln P_n &= \mu_1 + \alpha_1[(1-B)\ln P_{n-1} - \mu_1] + e_n^{(1)}, \\ (1-B)\ln Q_n &= \mu_2 + \alpha_2[(1-B)\ln Q_{n-1} - \mu_2] + e_n^{(2)}, \end{aligned}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

gdje su $\{e_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ i $\{e_n^{(2)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (moguće korelirani) centrirani bijeli šumovi. Logaritmi potrošačkih indeksa cijena su integrirani ARIMA$(1,1,0)$ slučajni procesi. Stoga su logaritmi tečajnih stopa također integrirani slučajni procesi. Međutim, $Y_n \equiv \ln X_n - \ln P_n + \ln Q_n$ je opisan pomoću ARMA$(1,1)$ slučajnog procesa

$$Y_n = \mu + e_n + \beta e_{n-1},$$

te je stoga stacionaran slučajni proces. Zato je niz slučajnih vektora $(\ln X_n, \ln P_n, \ln Q_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, opisan kointegriranim modelom s vektorom kointegriranja $(1, -1, 1)$.

POGLAVLJE 6 - BROWNOVO GIBANJE I DIFUZIJE

Nastavni ciljevi: (vi) Definirati i primjeniti glavne koncepte Gauss-Wienerovog procesa, i biti svjestan drugih Lévyjevih procesa.

1. Objasniti definiciju i osnovna svojstva jednodimenzionalnog Brownovog gibanja ili Wienerovog procesa.
2. Pokazati da diskretno uzorkovanje Wienerovog procesa daje normalno distribuiranu slučajnu šetnju, te pokazati kako je Wienerov proces limes takve slučajne šetnje.
3. Objasniti koncept općenitijeg Gauss-Wienerovog procesa.
4. Objasniti definiciju i osnovna svojstva jednodimenzionalnog Ornestein-Uhlenbeckovog procesa i pokazati odnos između tog procesa i $AR(1)$ vremenskog niza.
5. Objasniti koncept funkcije Wienerovog procesa i pokazati kako se mogu naći derivacija i integral.
6. Objasniti koncept višedimenzionalnog, moguće koreliranog, Wienerovog procesa.
7. Objasniti osnovni koncept lognormalnog Wienerovog procesa.
8. Objasniti osnovne koncepte stabilnih distribucija u primjeni na stohastičke preocese.
9. Opisati jednostavne primjene Lévyjevih procesa, uključujući lognormalan Wienerov proces i Ornstein-Uhlenbeckov proces za varijable investiranja.

1 Uvod u Brownovo gibanje

1.1 Definicija

Brownovo gibanje (zvano također *Wienerov proces*) je stohastički proces B_t, $t \geq 0$, s prostorom stanja $S = \mathbb{R}$ i sljedećim definirajućim svojstvima:

(i) B_t ima *nezavisne priraste*, t.j., $B_t - B_s$ je nezavisno od $\{B_r, r \leq s\}$ za sve $s < t$.

(ii) B_t ima *stacionarne priraste*, t.j., vjerojatnosna distribucija od $B_t - B_s$ ovisi samo o $t - s$.

(iii) B_t ima *Gaussove priraste*, t.j., vjerojatnosna distribucija od $B_t - B_s$ je $N((t-s)\mu, (t-s)\sigma^2)$.

(iv) B_t ima neprekidne trajektorije $t \to B_z(\omega)$.

Nije jednostavan zadatak provjeriti da su gornja svojstva kompatibilna i da u potpunosti karakteriziraju proces. Iznenađujuća činjenica je (što pokazuje kako su napeti uvjeti) da se bilo uvjet (iii) bilo uvjet (iv) mogu ispustiti iz definicije, jer se može pokazati da su posljedica preostala tri svojstva. Specijalno, Brownovo gibanje je *jedini proces sa stacionarnim nezavisnim prirastima i neprekidnim trajektorijama*.
Ime *standardno Brownovo gibanje* rezervirano je za slučaj u kojem je *parametar difuzije* σ jednak 1, parametar drifta μ jednak 0, a početni uvjet je $B_0 = 0$. Brownovo gibanje s danim koeficijentima difuzije i drifta može se konstruirati iz standardnog Brownovog gibanja B_t, $t \geq 0$, formulom

$$W_t = \sigma B_t + \mu t\,. \tag{1}$$

1.2 Vjerojatnosna distribucija vektora $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$

Uočimo da je B_t Markovljev proces, jer ima nezavisne priraste. Upotrebom oznake

$$g_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{2}$$

za centriranu Gaussovu vjerojatnosnu gustoću, *prijelazna gustoća* standardnog Brownovog gibanja je

$$p_{t-s}(x,y) = g_{t-s}(y-x)\,. \tag{3}$$

Drugim riječima, za $t > s$,

$$\mathbb{P}\left[a < B_t < b \,|\, B_s = x\right] = \int_a^b p_{t-s}(x,y)\,dy = \int_a^b g_{t-s}(y-x)\,dy\,.$$

Za opće Brownovo gibanje (1), prijelazna gustoća je $g_{\sigma^2(t-s)}(y - x - \mu(t-s))$.

 © Faculty and Institute of Actuaries

1.3 Zajednička vjerojatnosns gustoća standardnog Brownovog gibanja

Uočavajući da se događaj $\{B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \ldots, B_{t_n} = x_n\}$ sa $t_1 < t_2 < \ldots t_n$ može zapisati pomoću nezavisnih prirasta kao $\{B_{t_1} = x_1, B_{t_2} - B_{t_1} = x_2 - x_1, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1}\}$, zaključujemo da je *zajednička vjerojatnosna gustoća* od $B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}$

$$f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_{t_1}(x_1)\, g_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots g_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})\,. \quad (4)$$

Ta formula omogućava računanje vjerojatnosti svakog događaja definiranog standardnim Brownovim gibanjem u konačno mnogo vremenakih točaka.

1.4 Princip refleksije za standardno Brownovo gibanje

Formula (4) se ne može direktno primjeniti na računanje vjerojatnosti svih događaja. Promatrajmo na primjer *maksimum* standardnog Brownovog gibanja na $[0, t]$

$$M_t = \max_{0 \le s \le t} B_s\,. \quad (5)$$

Događaj $\{M_t \le x\} = \{B_s \le x,\, 0 \le s \le t\}$ uključuje proces u beskonačno mnogo vremenskih trenutaka, u stvari u kontinuumu trenutaka. Pokazujemo jednostavnu metodu računanja vjerojatnosne distribucije od M_t. Uočimo prvo da budući da prirasti $B_t - B_s$ imaju simetričnu distribuciju $N(0, t - s)$, promjena predznaka prirasta nakon nekog fiksnog vremena t_0 ne mijenja vjerojatnosnu distribuciju procesa; drugim riječima

$$X_t = \begin{cases} B_t & t \le t_0 \\ 2B_{t_0} - B_t & t > t_0 \end{cases} \quad (6)$$

je još uvijek standardno Brownovo gibanje. Uočimo kako je X_t konstruiran: nakon t_0 zamijenimo $B_t = B_{t_0} + (B_t - B_{t_0}$ sa $B_{t_0} - (B_t - B_{t_0}$. Geometrijsko značenje toga je da su za $t > t_0$ putovi od X_t dobiveni od putova procesa B_t refleksijom oko horizontalnog pravca kroz B_{t_0}:
Sljedeća generalizacija te ideje je najkorisnija.

Rezultat 1 (princip refleksije)
Neka je τ vrijeme zaustavljanja za Brownovo gibanje, i pretpostavimo da je $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$; tada

$$X_t = \begin{cases} B_t & t \le \tau \\ 2B_\tau - B_t & t > \tau \end{cases}$$

ima istu vjerojatnosnu distribuciju kao i B_t, $t \geq 0$.

Sada se može izračunati vjerojatnosna distribucija od (5); to je ključan korak pri računanju cijena *look-back opcije* i *opcije s barijerom*.

Rezultat 2
Vjerojatnosna gustoća tekućeg maksimuma standarndog Brownovog gibanja definiranog u (5) je

$$f_{M_t}(y) = \begin{cases} 2g_t(y) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} .$$

Dokaz
Prvo, $M_t \geq B_0 = 0$, te je $\mathbb{P}[M_t \leq y] = 0$ za $y < 0$. Nadalje,

$$\mathbb{P}[M_t \geq y] = \mathbb{P}[M_t \geq y,\, B_t > y] + \mathbb{P}[M_t \geq y,\, B_t < y]\,.$$

Upotrijebimo princip refleksije za vrijeme zaustavljanja

$$\tau_y = \inf\{t > 0 : \; B_t = y\} \tag{7}$$

(poznato pod imenom *vrijeme prvog pogađanja* razine y).
Ukoliko je $y > 0$, Rezultat 1 povlači da je

$$\mathbb{P}[M_t \geq y,\, B_t < y] = \mathbb{P}[M_t \geq y,\, B_t > y]\,.$$

Stoga,

$$\mathbb{P}[M_t \geq y] = 2\mathbb{P}[M_t \geq y,\, B_t > y] = 2\mathbb{P}[B_t > y] = 2\int_y^\infty g_t(x)\,dx\,.$$

Druga jednakost vrijedi, jer je $M_t \geq B_t$. Traženi rezultat slijedi deriviranjem.

Vrijedi uočiti da gornji račun daje i vjerojatnosnu gustoću vremena pogađanja τ_y, $y > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_y \leq t] = \mathbb{P}[M_t \geq y] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_y^\infty e^{-x^2/2t}\,dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{y/2t}^\infty e^{-z^2/2}\,dz\,. \end{aligned} \tag{8}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Deriviranje s obzirom na t daje vjerojatnosnu gustoću od τ_y:

$$f_{\tau_y}(t) = \frac{y}{(2\pi t^3)^{1/2}}\, e^{-y^2/2t}\,. \tag{9}$$

Uočimo također da puštanje $t \to \infty$ u (8) pokazuje da je $\mathbb{P}[\tau_y < \infty] = 1$; prema tome će standardno Brownovo gibanje dostići proizvoljnu danu vrijednost $y > 0$ (i zbog simetrije proizvoljni dani $y < 0$) u konačnom vremenu, upravo kao i jednostavna simetrična slučajna šetnja. To nije koincidencija, kao što će pokazati Odjeljak 2.

1.5 Martingalna svojstva Brownovog gibanja

Iz nezavisnosti prirasta slijedi da Brownovo gibanje ima ima dobra martingalna svojstva u odnosu na svoju prirodnu filtraciju $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\, 0 \le s \le t)$.

Rezultat 3
Neka je B_t, $t \ge 0$, standardno Brownovo gibanje. Tada su B_t, $B_t^2 - t$ i $e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ martingali u odnosu na prirodnu filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$.
Dokaz
Da bismo dokazali da je $B_t^2 - t$ martingal, računamo za $s < t$ uvjetno očekivanje od B_t^2 uz dano $\mathcal{F}_s$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t^2 \,|\, \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s) \,|\, \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^2 \,|\, \mathcal{F}_s]\end{aligned}$$

Korištenjem nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja i svojstava uvjetnog očekivanja (vidi rezultat 6, Poglavlje 2), zadnji redak čitamo

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \,|\, \mathcal{F}_s] + 2B_s\mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s^2 = t - s + 0 + B_s^2\,.$$

Zato je $\mathbb{E}[B_t^2 - t \,|\, \mathcal{F}_s] = B_s^2 - s$, što dokazuje rezultat.
Na isti način postupamo sa $e^{\lambda B_t}$:

$$\mathbb{E}[e^{\lambda B_t} \,|\, \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{\lambda(B_t - B_s + B_s} \,|\, \mathcal{F}_s] = e^{\lambda B_s}\mathbb{E}[e^{\lambda(B_t - B_s)}] = e^{\lambda B_s} e^{(t-s)\lambda^2/2}\,.$$

Stoga je

$$\mathbb{E}[e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2} \,|\, \mathcal{F}_s] = e^{\lambda B_s - \lambda^2 s/2}\,.$$

1.6 Brownovo gibanje u više dimenzija

k-dimenzionalno Brownovo gibanje je vektorski proces

$$B_t = \begin{pmatrix} B_t^{(1)} \\ B_t^{(2)} \\ \vdots \\ B_t^{(k)} \end{pmatrix}$$

čije su komponente međusobno nezavisna standardna Brownova gibanja $B_t^{(j)}$, $t \geq 0$, $j = 1, \ldots, k$.
Za svaki dani konstantni k-dimenzionalni vektor μ i $k \times k$ invertibilnu matricu A, proces $W_t = AB_t + \mu t$ je k-dimenzionalno Brownovo gibanje s vektorom drifta μ i matricom difuzije $\Delta = AA^T$.

2 Brownovo gibanje i slučajne šetnje

2.1 Konvergencija konačno-dimenzionalnih distribucija

Brownovo gibanje je vrlo povezano sa slučajnim šetnjama (vidi Poglavlja 2,3 i 5). Uočimo prvo da uzorkovanje Brownovog gibanja u regularnim vremenskim intervalima daje slučajnu šetnju s Gaussovskim prirastima: $X_m = B_{a+mb} = B_a + \sum_{j=0}^{m-1}(B_{a+(j+1)b-Ba+jb})$.
Međutim, važna veza ide u drugom smjeru: počevši od vrlo općenite slučajne šetnje (ne nužno Gaussovske), dobiva se Brownovo gibanje kao limes s neprekidnim vremenom.
Evo nekoliko detalja. Počnimo sa slučajnom šetnjom $X_m = \sum_{j=0}^{m} Y_j$ gdje su koraci Y_j nezavisni s vjerojatnosnom distribucijom koja je proizvoljna izuzev što trebaju biti zadovoljeni uvjeti $\mathbb{E}[Y_j] = 0$, $\mathbb{E}[Y_j^2] = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Prvo linearnom interpolacijom konstruiramo neprekidno vremensku verziju te slučajne šetnje

$$\bar{X}_t = X_{[t]} + (t - [t])Y_{1+[t]}$$

gdje $[t]$ označava *cjelobrojni dio* od t (t.j., najveći cijeli broj koji nije veći od t). Nadalje skaliramo i vrijeme i prostor stanja kako slijedi:

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\bar{X}_{nt}\,. \tag{10}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Konačno, pustimo n u beskonačnost. Što možemo očekivati? Iz gornjih formula

$$\begin{aligned} X_t^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{[nt]} Y_j + (nt-[nt])Y_{1+[nt]}\right) \\ &= \frac{[nt]}{n}\left\{\frac{1}{[nt]}\sum_{j=1}^{[nt]} Y_j\right\} + \frac{nt-[nt]}{\sqrt{n}}Y_{1+[nt]}\,. \end{aligned}$$

Budući da je $0 \leq nt-[nt] < 1$, drugi član konveregira prema nuli po vjerojatnosti kada $n \to \infty$. Zbog istog razloga $\lim_{n\to\infty}[nt]/n = t$, te stoga vjerojatnosna distribucija prvog člana konvergira po centralnom graničnom teoremu prema $\sqrt{t}N(0,\sigma^2) = N(0,t\sigma^2)$ što je vjerojatnosna distribucija od σB_t gdje je B_t standardno Brownovo gibanje. Analogno zaključivanje pokazuje da zajednička distribucija prirasta $X_{t_1}^{(n)}, X_{t_2}^{(n)} - X_{t_1}^{(n)}, \ldots, X_{t_m}^{(n)} - X_{t_{m-1}}^{(n)}$ konvergira kada $n \to \infty$ prema distribuciji od $(\sigma B_{t_1}, \sigma(B_{t_2}-B_{t_1}), \ldots, \sigma(B_{t_m}-\sigma B_{t_{m-1}}))$. Zato konačnodimenzionalne distribucije od $X_t^{(n)}$, $t \geq 0$, konvergiraju kada $n \to \infty$ prema onima od σB_t, $t \geq 0$.

2.2 Funkcionalni centralni granični teorem

Slučajne šetnje konvergiraju u stvari prema Brownovom gibanju u puno jačem smislu nego što je gore navedeno. Mnoga svojstva Brownovog gibanja ovise o putovima Brownovog gibanja, a ne o vrijednostima od B_t u konačno mnogo vremenskih trenutaka. Promotrimo na primjer $\max_{0\leq t\leq T} B_t$ i $\int_0^T B_t\,dt$; to su slučajne varijable koje uzimaju specifične vrijednosti $\max_{0\leq t\leq T} b_t$ i $\int_0^T b_t\,dt$ kada je trajektorija Brownovog gibanja B_t, $t \geq 0$, neprekidna funkcija b_t, $t \geq 0$. Vjerojatnosna distribucija mnogih takvih Brownovskih slučajnih varijabli koje ovise o putu može se dobiti kao limes odgovarajućih veličina aproksimirajuće slučajne šetnje definirane u (9); to je vrlo značajno proširenje prethodnog rezultata o konvergenciji.

Da bismo to preciznije formulirali, definirajmo *funkcional* H kao preslikavanje koje neprekidnoj funkciji b_t, $t \geq 0$, pridružuje broj $H(b_t, t \geq 0)$. Funkcional je *neprekidan*, ako mala promjena funkcije b_t prouzroči malu promjenu u vrijednosti od H u sljedećem smislu:

$$\text{ako je za svaki } a > 0,\ \lim_{n\to\infty}\max_{0\leq t\leq a}|b_t^{(n)} - b_t| = 0\,,$$

$$\text{tada je } \lim_{n\to\infty} H(b_t^{(n)},\, t \geq 0) = H(b_t,\, t \geq 0)\,.$$

Na primjer, $H_1(b_t,\, t \geq 0) = \max_{0\leq t\leq T} b_t$ i $H_2(b_t,\, t \geq 0) = \int_0^T b_t\,dt$ su neprekidni funkcionali; s druge strane, funkcional $H_3(b_t,\, t \geq 0)$ kojidaje duljinu luka grafa od b_t između $t = 0$ i $t = T$ nije neprekidan. To je ilustrirano dolje: sve funkcije $b_t^{(n)}$ imaju duljinu luka $T\sqrt{2}$, dok granična funkcija $b_t = 0$, $0 \leq t \leq T$, ima duljinu luka T.

Rezultat 4 (funkcionalni centralni granični teorem)
Neka su $X_t^{(n)}$, $t \geq 0$, kao u (9). Tada za svaki neprekidni funkcional vjerojatnosna distribucija od $H(X_t^{(n)},\, t \geq 0)$ konvergira prema distribuciji od $H(\sigma B_t,\, t \geq 0)$; gdje je B_t standardno Brownovo gibanje. Ekvivalentno,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[H(X_t^{(n)},\, t \geq 0)\right] = \mathbb{E}\left[H(\sigma B_t,\, t \geq 0)\right]$$

za svaki ograničen neprekidni linearni funkcional H.

Taj jaki rezultat poznat je također kao princip invarijantnosti, jer je granični proces nezavisan od specifične početne slučajne šetnje; to ustanovljuje Brownovo gibanje kao prirodnu neprekidno vremensku aproksimaciju široke klase diskretno vremenskih procesa, na isti način kao što $N(0, \sigma^2)$ služi kao aproksimacija distribucije zbroja velikog broja nezavisnih slučajnih varijabli. Ta metoda upotrijebljena je u sljedeća dva odjeljka.

2.3 Vrijeme pogađanja Brownovog gibanja

Rezultat 4 može se iskoristiti za izvod svojstava vremena prvog pogađanja Brownovog gibanja iz istih svojstava za jednostavne slučajne šetnje.

Rezultat 5
(a) Neka je τ_y vrijeme prvog pogađanja točke $y > 0$ za standardno Brownovo gibanje. Tada je

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_y}\right] = e^{-y\sqrt{2\lambda}} \quad \text{za sve } \lambda \geq 0\,.$$

(b) Neka je τ_y vrijeme prvog pogađanja točke $y > 0$ za Brownovo gibanje s negativnim driftom $X_t = B_t - \mu t$, $\mu > 0$. Tada je

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_y}\right] = e^{-y(\mu+\sqrt{2\lambda+\mu^2})} \quad \text{za sve } \lambda \geq 0\,.$$

Specijalno,

$$\mathbb{P}[\tau_y < \infty] = \lim_{\lambda\to 0} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_y}\right] = e^{-2y\mu}\,.$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Dokaz
(a) Krenimo od formule

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda T_\ell}] = \left(\frac{1}{e^\lambda + \sqrt{e^{2\lambda - 1}}}\right)^\ell$$

za vrijeme pogađanja T_ℓ od ℓ za jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju (vidi odjeljak 4.3 u Poglavlju 2). Zbog skaliranja (10)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_y}\right] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{1}{n}T_{y\sqrt{n}}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\lambda/n} + \sqrt{e^{2\lambda/n - 1}}}\right)^{y\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2\lambda}{n} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})}}\right)^{y\sqrt{n}} = e^{-y\sqrt{2\lambda}}.\end{aligned}$$

(b) Lagano proširenje Rezultata 4 pokazuje da se Brownovo gibanje s driftom $X_t = B_t - \mu t$ može dobiti kao limes jednostavne slučajne šetnje $X_n = \sum_{j=1}^n Y_{j,n}$ gdje koraci imaju n-zavisnu distribuciju

$$\mathbb{P}[Y_{j,n} = 1] = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sqrt{n}} = 1 - \mathbb{P}[Y_{j,n} = -1]\,.$$

Rezultati slijede istom metodom kao gore.

2.4 Vjerojatnost propasti

Prisjetimo se *klasičnog procesa rizika*; sukcesivne štete osigurateljnog društva su nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable Z_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Nadalje, štete dolaze po Poissonovom procesu N_t, $t \geq 0$, (nezavisnom od niza Z_j). S druge strane, društvo ima deterministički prihod ct kroz $[0, t]$, gdje je c *bruto premijska stopa*. *Vjerojatnost propasti* s *početno rezervom* u je

$$\psi(u) = \mathbb{P}[u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Z_j < 0 \text{ za neki } t > 0]\,. \tag{11}$$

Parametri problema su *stopa dolazaka šteta*, $\alpha = \frac{1}{t}\mathbb{E}[N_t]$, *srednja šteta* $\mu = \mathbb{E}[Z_j]$ i *drugi moment šteta* $m = \mathbb{E}[Z_j^2]$. Ukupne štete (do trenutka t)

$$S_t = \sum_{j=1}^{N_t} Z_j \tag{12}$$

imaju očekivanje $\alpha\mu t$ i varijancu $\alpha m t$ što se može provjeriti upotrebom formule potpune vjerojatnosti (uvjetujte na $N_t = n$).
Ako je premijska stopa c izjednačena sa $\alpha\mu$, srednje štete jednake su prihodu; propast je sigurna u tom slučaju. Da bi se to izbjeglo, primjenjuje se *doplatak za sigurnost* ρ u sljedećem smislu:

$$c = (1+\rho)\alpha\mu \quad \text{t.j.} \quad \rho = \frac{c - \alpha\mu}{\alpha\mu}\,. \tag{13}$$

Funkcija $\psi(u)$ ne može se općenito izračunati egzaktno, osim u specijalnim slučajevima distribucija šteta. Mi ćemo, međutim, izvesti aproksimaciju za $\psi(u)$ koja vrijedi uz izvjesne uvjete nezavisno o detaljima distribucije šteta. Ideja je sljedeća: upotrijebimo (12) da bismo zapisali (11) u obliku

$$\psi(u) = \mathbb{P}[\sup_{t>0}(S_t - ct) > u] = \mathbb{P}[\sup_{t>0}(S_{\gamma t - c\gamma t)} > u] \tag{14}$$

gdje je γ proizvoljan. Uz odgovarajuće centriranje i normalizaciju, $S_{\gamma t}$ će konvergirati prema Brownovom gibanju kada $\gamma \to \infty$; u pripremi za to, napišimo (14) u obliku

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left[\sup_{t>0}\left(\frac{S_{\gamma t} - \alpha\mu\gamma t}{\sqrt{\alpha\gamma m}} - \frac{(c-\gamma\mu)t\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha m}}\right) > \frac{u}{\sqrt{\alpha\gamma m}}\right]. \tag{15}$$

Slučajni član u (15) konvergira po distribuciji kao proces prema standardnom Brownovom gibanju kada $\gamma \to \infty$; činjenica da je broj članova u sumi S_t slučajan ne pretstavlja problem budući da je N_t nezavisan od Z_j-ova i $\lim_{\gamma\to\infty} \frac{N_{\gamma t}}{\gamma} = \alpha t$.
Za sada metoda izgleda donekle umjetna; međutim, postoji prirodan velik parametar u problemu, naime omjer u/μ rezerve prema srednjoj šteti. Stoga puštamo da u/μ teži u beskonačnost zajedno s γ. Zbog oblika zadnjeg člana u (15), ispravno skaliranje je

$$\frac{u}{\mu} = \sqrt{\gamma}\,. \tag{16}$$

Pogledamo li sada drift

$$\frac{(c-\gamma\mu)\sqrt{\gamma}\,t}{\sqrt{\alpha m}} = \frac{\rho\mu\sqrt{\alpha\gamma}\,t}{\sqrt{m}}$$

vidimo da doplatak za sigurnost moramo skalirati kao

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{\gamma}} \tag{17}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

ako želimo dobiti netrivijalan limes.
Još uvijek postoji tehnička poteškoća: budući da se supremum u (15) odnosi na beskonačan interval $[0, \infty)$, odgovarajući funkcional nije automatski neprekidan. Poteškoća se može razriješiti korištenjem činjenice da je drift negativan, što nas vodi do *difuzijskog limesa za vjerojatnost propasti*:

$$\psi_D = \lim_{\substack{\gamma \to \infty \\ u = \mu\gamma \\ \rho = \bar{\rho}/\gamma}} \psi_{(u)} = \mathbb{P}\left[\sup_{t \geq 0}\left(B_t - \bar{\rho}\mu\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\, t\right) > \frac{\mu}{\sqrt{\alpha m}}\right]$$

gdje je B_t standardno Brownovo gibanje.
Ekvivalentno,

$$\psi_D = \mathbb{P}[\tau_y < \infty]$$

gdje je $y = \mu/\sqrt{\alpha m}$, a τ_y je vrijeme prvog pogađanja y za Brownovo gibanje s driftom $X_t = B_t - \nu t$, $\nu = \bar{\rho}\mu\sqrt{\alpha/m}$. Posljednja formula u Rezultatu 6 daje

$$\psi_D = e^{-2y\nu} = e^{-2\mu^2\bar{\rho}/m} = e^{-2\rho\mu u/m}\,.$$

Difuzijska aproksimacija vrijedi kada je u/μ velik, a ρ malen na način da je $\rho u/\mu$ umjeren.
Gornja metoda može se proširiti na izračun vjerojatnosti propasti na konačnom vremenskom horizontu, te pokrivanje ne-Poissonovskih dolazaka šteta.

3 Difuzije

U ovom odjeljku poopćavamo Brownovo gibanje i napuštamo pretpostavku o nezavisnosti prirasta, ali zadržavamo Markovljevo svojstvo. Proces X_t, $t \geq 0$, s prostorom stanja $S = \mathbb{R}$ ze zove *proces difuzije* ako

(i) ima Markovljevo svojstvo

(ii) ima neprekidne trajektorije

(iii) postoje funkcije $\mu(t,x)$ i $\sigma^2(t,x)$ takve da kada $h \to 0+$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{t+h} - X_t \,|\, X_t = x] &= h\mu(t,x) + o(h) \\
\mathbb{E}[(X_{t+h} - X_t)^2 \,|\, X_t = x] &= h\sigma^2(t,x) + o(h) \\
\mathbb{E}[|X_{t+h} - X_t|^3 \,|\, X_t = x] &= o(h)\,.
\end{aligned}$$

O difuziji možemo razmišljati kao o lokalno Brownovom gibanju s driftom, ali s varijabilnim koeficijentom drifta $\mu(t,x)$ i koeficijentom difuzije $\sigma^2(t,x)$. Ta dodatna fleksibilnost vrlo je vrijedna pri modeliranju. Promotrimo na primjer *trenutnu kamatnu stopu* R_t; ako je modeliramo kao $R_t = r_t + X_t$ gdje je r_t deterministička centralna stopa, a X_t je slučajna fluktuacija, prirodno je zahtijevati da X_t prikazuje neku tendenciju vraćanja na srednje. To se postiže odabirom za X_t difuzije s koeficijentima

$$\mu(t,x) = -\gamma x,\ \ \sigma^2(t,x) = \sigma^2 \tag{18}$$

za neki $\gamma > 0$. Takav proces poznat je kao *Ornstein-Uhlenbeckov proces*; o njemu možemo misliti kao o neprekidno vremenskoj verziji klase autoregresivnih procesa.

3.1 Jednadžbe unatrag i unaprijed

Koncentriramo li se na vremensko homogene difuzije (za koje je $\mu(t,x) = \mu(x)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$), Markovljevo svojstvo implicira da vrijede *Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe* za njihove prijelazne gustoće:

$$P_{s+t}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(x,z)P_t(z,y)\,dz\,. \tag{19}$$

Te jednadžbe mogu se dalje iskoristiti za izvod parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za $P_t(x,y)$.

Rezultat 6 (jdnadžbe unatrag za difuzije)
Pretpostavimo da us $\mu(x)$ i $\sigma(x)$ neprekidno diferencijabilne i da je $\sigma(x) > 0$ za sve x. Tada za $t > 0$ odgovarajući proces difuzije ima prijelazne vjerojatnosti $P_t(x,y)$ koje su jedanput diferencijabilne po t i dvaput diferencijabilne po x. Nadalje,

$$\frac{\partial}{\partial t}P_t(x,y) = \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}P_t(x,y) + \frac{1}{2}\,\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_t(x,y)\,.$$

Težak dio dokaza je diferencijabilnost od $P_t(x,y)$. Ostatak ide kako slijedi: oduzmemo $P_t(x,y)$ od obje strane u (19), podijelimo sa s i pustimo s u nulu; lijeva strana teži prema $\frac{\partial}{\partial t}P_t(x,y)$. Desna strana se može zapisati kao

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\mathbb{E}[P_t(X_s,y)\,|\,X_0 = x] - P_t(x,y))\,. \tag{20}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Uočimo li da je, za male s, X_s blizu x, možemo primjeniti Taylorov razvoj oko x (za fiksne t, y):

$$P_t(X_s, y) = P_t(x, y) + (X_s - x)\frac{\partial}{\partial x}P_t(x, y) + \frac{1}{2}(X_s - x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_t(x, y) + O(|X_s - x|^3)\,.$$

Upotrebom svojstva (iii) u definiciji difuzije, (20) možemo pročitati kao i što je najavljeno

$$\mu(x)\frac{\partial}{\partial x}P_t(x, y) + \frac{1}{2}\,\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}P_t(x, y)\,.$$

Uz odgovarajuće pretpostavke može se također izvesti i *jednadžba unaprijed* (poznata i kao *Fokker-Planckova jednadžba*):

$$\frac{\partial}{\partial t}P_t(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)P_t(x, y)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(y)P_t(x, y))\,.$$

Ako postoji *stacionarna vjerojatnosna gustoća* $\pi(y)$, ona mora zadovoljavati

$$\frac{d}{dy}\left[\mu(y)\pi(y)\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dy^2}\left[\sigma^2(y)\pi(y)\right]. \tag{21}$$

Za *Ornstein-Uhlenbeckov proces* je $\mu(x) = -\gamma x$ i $\sigma^2(x) = x$, i rješenje jednadžbe unatrag s početnim uvjetom koncentriranim u nuli je

$$P_t(x, y) = g_{\alpha(t)}(y - xe^{-\gamma t})$$

gdje je $\alpha(t) = \frac{\sigma^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t})$. *Asimptotska gustoća*

$$\lim_{t\to\infty} P_t(x, y) = g_{\frac{\sigma^2}{2\gamma}}(y)$$

može se dobiti direktno kao rješenje od (21).
Ako promatramo determinističku funkciju $f(X_t)$ difuzije, dobit ćemo ponovno difuziju u slučaju da je funkcija f invertibilna i dovoljno glatka.
U Poglavlju 2 smo diskutirali da se logaritam cijene dionice može modelirati procesom sa stacionarnim nezavisnim prirastima. Ako tome dodamo zahtjev da krivulje cijena trebaju biti neprekidne, to povlači

$$X_t = \log\frac{S_t}{S_0} = \sigma B_t + \mu t$$

ili

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \mu t} \tag{22}$$

gdje je B_t standardno Brownovo gibanje. Proces cijena S_t dan s (22) poznat je kao *geometrijsko Brownovo gibanje.* To je proces difuzije s koeficijentima $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^2$, $\mu(x) = x(\mu + \sigma/2)$. Broj σ zove se *volatilnost* dionice.

4 Stohastički račun

4.1 Itôv integral

U pokušaju da razvijemo diferencijalni račun za Brownovo gibanje i ostale difuzije, moramo se suočiti s činjenicom da su njihove trajktorije *nigdje diferencijabilne.*

Rezultat 7
Neka je B_t Brownovo gibanje. Tada

$$\mathbb{P}[t \to B_t \text{ je diferencijabilno za neki } t_0] = 0\,.$$

Dokaz ovog rezultata prilično je težak; s druge strane, sljedeću tvrdnju je jednostavno dokazati:
Za svaki $t_0 > 0$, $\mathbb{P}[t \to B_t$ je diferencijabilna u $t_0] = 0$.
Neka je D_{t_0} skup svih Brownovskih putova koji su diferencijabilni u t_0:

$$\begin{aligned} D_{t_0} &= \left\{ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}(B_{t_0+\epsilon} - B_{t_0}) \text{ postoji } \right\} \subset \left\{ \lim_{j\to\infty} 2^j (B_{t_0+1/2^j} - B_{t_0}) \text{ postoji } \right\} \\ &\subset \left\{ \text{postoje } n, m \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } |B_{t_0+1/2^j} - B_{t_0}| \leq \frac{m}{2^j} \text{ za sve } j \geq n \right\}. \end{aligned}$$

Posljednji događaj može se zapisati u obliku $\cup_{n,m}^{\infty} A_{n,m}$ gdje je

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \left\{ |B_{t_0+1/2^j} - B_{t_0}| \leq \frac{m}{2^j} \text{za sve} j \geq n \right\} = \bigcap_{j=n}^{\infty} \left\{ B_{t_0+1/2^j} - B_{t_0}| \leq \frac{m}{2^j} \right\} \\ &\subset \bigcap_{j=n}^{l} \left\{ B_{t_0+1/2^j} - B_{t_0}| \leq \frac{m}{2^j} \right\} \subset \left\{ B_{t_0+1/2^j} - B_{t_0}| \leq \frac{m}{2^j} \right\} \text{ za sve } l \geq n\,. \end{aligned}$$

Stoga za sve $l \geq n$:

$$\mathbb{P}[A_{n,m}] \leq \mathbb{P}\left[|B_{t_0+1/2^j} - B_{t_0}| \leq \frac{m}{2^j} \right] = \mathbb{P}\left[|B_{1/2^l}| \leq \frac{m}{2^j} \right] = \mathbb{P}\left[|B_1| \leq \frac{m}{2^{l/2}} \right]\,.$$

Budući da je $l \geq n$ proizvoljan, možemo pustiti $l \to \infty$ i zaključiti da je $\mathbb{P}[A_{n,m}] = 0$, te zato i $\mathbb{P}[D_{t_0}] = 0$.
S obzirom na gornji rezultat, direktan pristup stohastičkim integralima tipa $\int_0^t Y_s\, dB_s$ je osuđen na propast; međutim, takvim Itôvim integralima može se

 © Faculty and Institute of Actuaries

dati smisao za prikladnu klasu slučajnih integranada Y_s pomoću indirektne metode koju ćemo sada opisati.
Započnimo s jednostavnim procesima adaptiranim u odnosu na prirodnu filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ Brownovog gibanja:

$$Y_s = \begin{cases} Y_0 & 0 \leq s \leq t_1 \\ Y_1 & t_1 \leq s \leq T \end{cases}$$

gdje je Y_0 $\mathcal{F}_0$-izmjeriva, a Y_1 je $\mathcal{F}_{t_1}$-izmjeriva.
Za takve procese zatjevamo da integral ima očigledno svojstvo:

$$\int_0^t Y_s \, dB_s = \begin{cases} Y_0 B_t & \text{ako je } t \leq t_1 \\ Y_0 B_{t_1} + Y_1(B_t - B_{t_1}) & \text{ako je } t \geq t_1 \,. \end{cases}$$

Uočimo sada da dobiveni proces ima sljedeća svojstva:

(i) $\int_0^t Y_s \, dB_s$ je martingal

(ii) $\mathbb{E}[\int_0^t Y_s \, dB_S] = 0$

(iii) $\mathbb{E}[(\int_0^t Y_s \, dB_s)^2] = t_1 \mathbb{E}[Y_0^2] + (T - t_1)\mathbb{E}[y_1^2] = \mathbb{E}[\int_0^t Y_s^2 \, ds]$

(iv) trajektorije od $\int_0^t Y_s \, dB_s$ su neprekidne.

Gornja svojstva je jednostavno provjeriti; nadalje, ona se mogu proširiti do adaptiranih integranada koji se sastoje od konačnog broja slučajnih koraka. Konačno, zbog svojstva čuvanja norme (iii), Itôv integral se može na jedinstven način proširiti do adaptiranih kvadratno integrabilnih integranada (t.j., $\mathbb{E}[Y_s^2 \, ds] < \infty$) tako da svojstva (i)-(iv) ostanu sačuvana.
Na taj način je Itôv integral dobro definiran; neka od njegovih svojstava su jako različita od svojstava običnog integrala. Na primjer, $\int_0^t B_s \, dB_s$ ne može biti jednak $\frac{1}{2}B_t^2$, jer to nije martingal. U stvari, znamo da je $\frac{1}{2}(B_t^2 - t)$ martingal, i može se pokazati pomoću gornje definicije da je

$$\int_0^t B_s \, dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t) \,. \tag{23}$$

Iako pravi stohastički diferencijalni račun ne može postojati zbog Rezultata 6, uobičajeno je u praksi ppisati izraze oblika

$$X_t = X_0 + \int_0^t Y_s \, dB_s + \int_0^t Z_s \, ds \tag{24}$$

u diferencijalnoj oznaci, naime,

$$dX_t = Y_t \, dB_t + Z_t \, dt \,. \tag{25}$$

Naglašavamo da je (25) samo kratica za (24). U toj notaciji (23) glasi

$$B_t \, dB_t = \frac{1}{2} \, d(B_t^2) - \frac{1}{2} \, dt$$

odnosno nakon preuređenja,

$$d(B_t^2) = 2B_t \, dB_t + dt \tag{26}$$

Ključni rezultat stohastičkog računa je

Rezultat 8 (Itôva lema)
Neka je X_t, $t \geq 0$, oblika (25), te neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna; tada je $f(X_t)$ ponovno oblika (25) sa

$$df(X_t) = f'(X_t) Y_t \, dB_t + [f'(X_t) Z_t + \frac{1}{2} f''(X_t) Y_t^2] \, dt \,.$$

Uočite kako je konstruirana desna strana u gornjoj formuli:

- upotrijebite Taylorovu formulu do drugog reda za zapis $df(X_t) = f'(X_t) \, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)(dX_t)^2$
- supstituirajte $dX_t = Y_t \, dB_t + Z_t \, dt$ u gornjoj formuli
- pojednostavnite članove drugog reda upotrebom sljedeće "tablice množenja":

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Može se provjeriti da taj postupak reproducira (26).

 © Faculty and Institute of Actuaries

4.2 Stohastičke diferencijalne jednadžbe

Razmotrimo ponovno Ornstein-Uhlenbeckov proces pomoću Itôve formule; definiramo ga formulom

$$dX_t = -\gamma X_t \, dt + \sigma \, dB_t \tag{27}$$

gdje su γ, σ pozitivni parametri.
Izraz (27) poznat je kao *stohastička diferencijalna jednadžba*, budući da se nepoznat proces X_t pojavljuje na obje strane jednadžbe; naravno, to je kratica za integralnu jednadžbu:

$$X_t = X_0 - \gamma \int_0^t X_s \, ds + \sigma \int_0^t dB_s \, .$$

Rješavamo (27) upotrebom standardnih metoda diferencijalnih jednadžbi: budući da je $ce^{-\gamma t}$ opće rješenje od $dX_t = -\gamma X_t \, dt$, tražimo rješenje od (27) u obliku

$$X_t = U_t e^{-\gamma t} \, .$$

Imamo

$$\begin{aligned} dU_t &= d(e^{\gamma t} X_t) = \gamma e^{\gamma t} X_t \, dt + e^{\gamma t} \, dX_t \\ &= \gamma e^{\gamma t} X_t \, dt + e^{\gamma t}(-\gamma X_t \, dt + \sigma \, dB_t) = \sigma e^{\gamma t} \, dB_t \, . \end{aligned}$$

Stoga je

$$U_t = U_0 + \sigma \int_0^t e^{\gamma s} \, dB_s$$

i konzekventno

$$X_t = e^{-\gamma t} U_t = X_0 \, e^{-\gamma t} + \sigma \int_0^t e^{\gamma(t-s)} \, dB_s \, . \tag{28}$$

Uočite kako nam (28) daje direktnu reprezentaciju Ornstein-Uhlenbeckovog procesa X_t, za razliku od od formule za njegove prijelazne vjerojatnosti iz odjeljka 3. Svojstva od X_t se jednostavno dobivaju iz (28) upotrebom:

Rezultat 9 Neka je $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ deterministička funkcija. Tada vrijedi:

(i) $M_t = \exp\{\int_0^t f(B_s) \, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) \, ds\}$ je martingal,

(ii) $\int_0^t f(B_s)\,dB_s$ ima Gaussovu distribuciju s očekivanjem nula i varijancom $\int_0^t f^2(s)\,ds$.

Dio (i) je jednostavna generalizacija činjenice da je $e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ martingal; dio (ii) odmah slijedi iz (i), jer, zbog toga što martingali imaju konstantno očekivanje, vrijedi

$$\mathbb{E}[\exp\{\lambda \int_0^t f(B_s)\,dB_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t f^2(s)\,ds\}] = 1\,,$$

te stoga

$$\mathbb{E}[e^{\lambda \int_0^t f(B_s)\,dB_s}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t f^2(s)\,ds}$$

što je funkcija izvodnica momenata $N(0, \int_0^t f^2(s)\,ds)$ distribucije.
Kao rezultat slijedi da je vjerojatnosna distribucija od X_t jednaka $N(X_0 e^{-\gamma t}, \frac{\sigma^2}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})$, a asimptotska distribucija je $N(0, \frac{\sigma^2}{2\gamma})$.
Poučno je usporediti ova svojstva sa svojstvima $AR(1)$ procesa oblika

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \beta Y_n$$

gdje je Y_n bijeli šum s očekivanjem nula i varijancom jedan. Taj proces ima očekivanje i varijancu

$$\mathbb{E}[X_n] = \alpha^n X_0, \mathrm{Var}[X_n] = \beta^2 \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}\,.$$

Te vrijednosti odgovaraju vrijednostima OU procesa ukoliko stavimo

$$\alpha = e^{-\gamma},\ \frac{\beta^2}{1-\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{2\gamma}\,.$$

U stvari, veza ide i dublje: Ornstein-Uhlenbeckov proces je neprekidna verzija $AR(1)$ procesa na isti način kao što je Brownovo gibanje neprekidan limes slučajne šetnje.

Često upotrebljavan model trenutne kamatne stope r_t je Vasicekov model:

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\,dB_t\,.$$

Odmah se vidi da je $r_t - b$ (devijacija od središnje stope b) Ornstein-Uhlenbeckov proces.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Za kraj ovog odjeljka, promotrimo stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dS_t = \alpha S_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t \,. \tag{29}$$

Podijelimo sa S_t da bismo separirali varijable:

$$\frac{1}{S_t} \, dS_t = \alpha \, dt + \sigma \, dB_t \,.$$

Kada bismo radili sa običnom diferencijalnom jednadžbom, integracija bi vodila do izraza $\alpha t + \sigma B_t$ za $\log(S_t/S_0)$, te zato do $S_0 \exp\{\alpha t + \sigma B_t\}$ za S_t. Da bismo riješili problem unutar stohastičkog računa, upotrijebimo Itôvu formulu za izračun $d \log S_t$:

$$\begin{aligned} d \log S_t &= \frac{1}{S_t} \, dS_t + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{S_t^2} \right) (dS_t)^2 \\ &= (\alpha - \frac{1}{2} \, \sigma^2) \, dt + \sigma \, dB_t \end{aligned}$$

Napisano u integralnoj formi to postaje

$$\log S_t = \log S_0 + (\alpha - \frac{1}{2} \, \sigma^2) t + \sigma B_t \,,$$

odnosno, konačno,

$$S_t = S_0 \exp \left[(\alpha - \frac{1}{2} \, \sigma^2) t + \sigma B_t \right] \,.$$

Dakle, rješenje od (29) je geometrijsko Brownovo gibanje s parametrima $\mu = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$, usporedite s (22). Obratno, stohastička diferencijalna jednadžba čije s rješenjem (22) je

$$dS_t = (\mu + \frac{\sigma^2}{2}) S_t \, dt + \sigma \, dB_t \,.$$

Jednadžba (22) je standardni model za cijenu rizične imovine kao što je dionica.

Uočimo da je distribucija od S_t *lognormalna*, što znači da je $\log S_t$ normalno distribuirana. Prisjetimo se da ako je S lognormalna s $N(\mu, \sigma^2)$ distribucijom za $\log S$, tada je

$$\mathbb{E}[S^\lambda] = e^{\lambda\mu + \lambda^2 \sigma^2 / 2}$$

tako da je $\mathbb{E}[S] = e^{\mu + \sigma^2}$ i $\mathrm{Var}[S] = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}$.

5 Lévyjevi procesi

U odjeljku 3 generalizirali smo Brownovo gibanje dopuštajući da prirasti ne budu nezavisni ili jednako distribuirani. Ovdje nastavljamo s drugom vrstom proširenja: dopuštamo da proces skače. To može biti prednost pri modeliranju financijskih cijena.

Lévyjev proces X_t, $t \geq 0$, je stohastički proces sa skupom stanja $S = \mathbb{R}$ i sljedećim svojstvima:

(i) X_t ima nezavisne priraste

(ii) X_t ima stacionarne priraste

(iii) trajektorije $t \to X_t$ imaju najviše prekide tipa skok (t.j., neprekidne su zdesna i imaju limese slijeva u svakom vremenskom trenutku).

Gornja definicija uključuje i Brownovo gibanje (kada su dozvoljeni skokovi u stvari odsutni), i Poissonov proces (kada je jedini način na koji se X_t može promijeniti dan jediničnim skokovima prema gore); složeni Poissonovi procesi su također uključeni. U stvari, u smislu koji će biti poslije objašnjen, najopćenitiji Lévyjev proces je zbroj Brownovog gibanja i superpozicije procesa srodnih Poissonovom.

5.1 Beskonačno djeljive i stabilne vjerojatnosne distribucije

Za svaki cijelei broj n možemo pisati

$$X_t - X_s = \sum_{j=0}^{n-1} (X_{s+(j+1)\Delta} - X_{s+j\Delta})$$

gdje je $\Delta = \frac{t-s}{n}$. Tako za svaki dani n, prirast $X_t - X_s$ može biti zapisan kao zbroj nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli (njihova distribucija ovisi o n); takvo svojstvo zove se *beskonačna djeljivost* distribucije prirasta. Beskonačno djeljive vjerojatnosne distribucije temeljito su proučavane; na primjer, postoji reprezentacija karakteristične funkcije (t.j., Fourierove transformacije) najopćenitije beskonačno djeljive distribucije. Gaussova i Poissonova distribucija su beskonačno djeljive.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Specijalan slučaj beskonačno djeljivih vjerojatnosnih distribucija je klasa *stabilnih distribucija*: to je familija svih mogućih graničnih distribucija slučajnih varijabli oblika

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - \alpha_n}{\beta_n}$$

gdje su slučajne varijable X_j nezavisne i jednako distribuirane (nedegenerirane), a α_n, β_n su proizvoljni parametri centriranja i skaliranja. U stvari, može se pokazati da općenitost nije smanjena ako se ograničimo na skalirajuće faktore oblika $\beta_n = n^{1/\alpha}$, $\alpha \in (0, 2]$. Broj α se naziva *indeks* stabilne distribucije.
Najopćenitija stabilna karakteristična funkcija je

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda X}] = e^{ic\lambda - b|\lambda|^\alpha (1 + iH(\operatorname{sgn}(\lambda) w_\alpha(\lambda))} \tag{30}$$

gdje je

$$w_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha\pi}{2} & \text{ako je } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log|\lambda| & \text{ako je } \alpha = 1 \end{cases}$$

a c, b, H su realne konstante i indeks $\alpha \in (0, 2]$.
Za *simetrične distribucije* $\phi(\lambda)$ je realna te je najopćenitija simetrična stabilna karakteristična funkcija:

$$\phi(\lambda) = e^{-b|\lambda|^\alpha} \quad \alpha \in (0, 2]\,. \tag{31}$$

Gaussov slučaj je jednostavno $\alpha = 2$, dok *Cauchyjeva* vjerojatnosna gustoća

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \quad -\infty < x < \infty$$

odgovara slučaju $\alpha = 1$. Usprkos jednostavosti izraza (31) niti jedna druga simetrična stabilna gustoća nije poznata u zatvorenom obliku.
Već smo se susreli s nesimetričnom stabilnom gustoćom: vjerojatnosna distribucija (9) vremena prvog pogađanja za Brownovo gibanje je stabilna s indeksom $\alpha = 1/2$ i parametrom $H = 1$.
Budući da je $\mathbb{E}(X^2) = -\phi''(0)$, iz (30) slijedi da je Gaussova distribucija ($\alpha = 2$) *jedina stabilna distribucija s konačnom varijancom* (činjenica koja nije iznenađujuća u svijetlu centralnog graničnog teorema). Stabilne ne-Gaussovske distribucije se ponekad opisuju kao distribucije "teškog repa": njihova vjerojatnosna gustoća opada suviše polako da bi dopuštala druge momente. Takvo svojstvo je bilo zagovarano za povrat finacijskih imovina.

5.2 Struktura Lévyjevih procesa

Da bismo razumijeli prirodu općeg Lévyjevog procesa X_t, označimo sa $N_t(a,b)$ broj skokova od X_s veličine $x \in (a,b)$ za vrijeme perioda $s \in (0,t]$. Proces $N_t(a,b)$ može se konstruirati kako slijedi: definirajmo *skok od* X_t *u* s sa

$$\Delta X_s = X_s - X_{s-} = X_s - \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} X_{s-\epsilon}$$

i neka je $I_{(a,b)}$ *indikator* od (a,b):

$$I_{(a,b)}(x) = \begin{cases} a < x < b1 & \text{ako je} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Stavimo sada

$$N_t(a,b) = \sum_{0<s\leq t} I_{(a,b)}(\Delta X_s)\,. \tag{32}$$

Uočimo kako je gornja suma, koja na prvi pogled izgleda kao suma po neprekidnim vrijednostima s (te stoga nepropisno definirana), u stvari *konačna suma* ukoliko $0 \notin (a,b)$ (t.j., a i b su istog predznaka); to je zato što zbog neprekidnosti zdesna i postojanja limesa slijeva trajektorija od X_t, postoji samo konačno mnogo skokova veličine koja premašuje a (ako je $a > 0$) u svakom konačnom vremenskom intervalu. Uočite kako (32) funkcionira; $N_t(a,b)$ bilježi ukupan broj skokova specificirane veličine za vrijeme $(0,t]$; kako t raste, $N_t(a,b)$ mijenja se jediničnim skokovima na gore. Nadalje, $N_t(a,b)$ nasljeđuje od X_t svojstva stacionarnosti i nezavisnosti svojih prirasta; rezultat toga je da je $N_t(a,b)$, za sve a,b, $0 \notin (a,b)$ *Poissonov proces* s parametrom $\lambda(a,b)$.
Srodan proces je:

$$J_t(a,b) = \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s I_{(a,b)}(\Delta X_s)\,. \tag{33}$$

To je doprinos Lévyjevom procesu X_t onih skokova čija je veličina u (a,b). Fundamentalno opažanje je:

Rezultat 10
Neka je X_t, $t \geq 0$, Lévyjev proces i definiramo proces skokova $J_t(a,b)$ pomoću (33). Tada su $J_t(a,b)$ i $X_t - J_t(a,b)$ nezavisni Lévyjevi procesi.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Gornja dekompozicija može se profiniti u $J_t(a,b)$, $J_t(c,d)$, $X_t - J_t(a,b) - J_t(c,d)$ i svako komponenta nezavisna je od preostalih ako je $(a,b) \cap (c,d) = \emptyset$. I tako dalje u beskonačnost, sve dok se ne dobije zbroj Lévyjevog procesa bez skokova, što je Brownovo gibanje, i (neprekidno indeksirane) superpozicije procesa skokova; svaka komponenta takve dekompozicije nezavisna je od ostalih.

Prepostavka da je logaritam cijena dionica proces s nezavisnim stacionarnim (ali ne nužno Gaussovim) prirastima, vodi nas da (22) zamijenimo s

$$S_t = S_o e^{X_t} \tag{34}$$

kso modelom cijena dionica, gdje je X_t, $t \geq 0$, neki Lévyjev proces.

Mogućnost modeliranja skokova u krivulji cijena glavna je prednost modela (34) u odnosu na (22).

POGLAVLJE 7 - "MONTE CARLO" SIMULACIJA STOHASTIČKOG PROCESA

Nastavni ciljevi: (vii) Objasniti koncepte "Monte Carlo" simiulacije stohastičkog procesa upotrebom niza pseudoslučajnih brojeva.

1. Opisati kako se prividno pseudosučajni brojevi mogu generirati pomoću računala.
2. Opisati kako se može generirati pseudoslučajan izbor iz specificirane distribucije.
3. Objasniti kako se može generirati niz skupova koreliranih normalnih slučajnih brijeva.
4. Objasniti nedostatke upotrebe istinskih slučajnih brojeva u odnosu na pseudoslučajne brojeve.
5. Objasniti okolnosti u kojima bi se isti skup slučajnih brojeva upotrijebio za dva skupa simulacija, te okolnosti u kojima bi se koristili različiti skupovi.
6. Diskutirati kako odlučiti koliko se simulacija treba provesti za pojedinu specifičnu svrhu.

0 Uvod

S dolaskom brzih personalnih računala "Monte Carlo" simulacije postale su jedan od najkorisnijh alata u aktuarskoj profesiji. Jedan od razloga široke upotrebe "Monte Carlo" metoda je činjenica da velika većina važnih problema nije podložna analitičkom rješenju. Drugi razlog je taj da je relativno lagano savladati (barem) osnovne koncepte tehnika "Monte Carlo" simulacija. Bez sumnje se snaga "Monte Carlo" metoda silno poveća va kada se simulacije kombiniraju s analitičkim tehnikama.
Sljedeća standardna terminologija koristit će se kroz ovo poglavlje.
Slučajni broj je realizacija slučajne varijable generirane računalom iz $\mathcal{U}_{[0,1]}$ distribucije (uniformna distribucija na $[0,1]$).
Velika masna slova (kao $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$) koriste se za označavanje *slučajnih varijabli.*
Mala slova (kao x_1, y_{10}, z) sa ili bez indeksa koriste se (ali ne ekskluzivno) za označavanje *realizacija* slučajnih varijabli.

1 Generiranje pseudoslučajnih brojeva pomoću računala

Daleko najuspješniji generatori slučajnih brojeva danas su *linearni kongruentni generatori* (LKG). LKG je specificiran izborom tri pozitivna cijela broja:

a, multiplikator;

c, prirast;

m, modul; $m > a, m > c$

Da bismo dobili željeni niz slučajnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_N$, prvo generiramo niz cijelih brojeva $X_1, X_2, \ldots, X_N$ počevši od početne vrijednosti X_0 (koja se naziva *sjeme*). Niz cijelih brojeva generiran je upotrebom rekurzivnog pravila

$$X_{n+1} = (aX_n + c)(\text{mod } m), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1\,.$$

Nakon toga, x_k se definira kao X_k/m, $k = 1, 2, \ldots, N$.
Jasno je da svaki LKG proizvodi deterministički niz, t.j., svaki broj X_k (te stoga i x_k) unaprijed je poznat čim specificiramo X_0, a, c, i m. Nadalje, LKG uvijek proizvodi periodičan niz s periodom $p \leq m$. Usprkos tomu, kada su parametri a, c, m odgovarajuće odabrani, niz $\{x_n = X_n/m\}_{n=1}^N$ (gdje je N manji od, recimo, $0.1p$) prolazi sve standardne statističke testove za realizaciju niza nezavisnih slučajnih varijabli uniformno distribuiranih na intervalu $[0, 1]$.
Da bismo dobili veliki period p, modul m se obično bira blizu maksimalnog cijelog broja računala. Popularni izbor je $m = 2^{31} - 1$. Da bi se osigurala visoka kvaliteta pseudoslučajnih brojeva, multiplikator a mora se pažljivo izabrati. Jedan od mogućih izbora za multiplikator kada je $m = 2^{31} - 1$ je $a = 16807$. Da bi se ubrzalo generiranje niza $X_1, X_2, \ldots, X_n$, prirast c često se stavlja jednak 0. Na sreću, izbor $c = 0$ ne reducira značajnije "slučajnost" generiranog niza (ako $X_0 \neq 0$). Specificirani LKG (kojeg su prvi predložili Lewis, Goodman i Miller 1969.)

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (16807X_n)(\text{mod } 2^{31} - 1)\,, \\ x_{n+1} &= \frac{X_{n+1}}{2^{31} - 1}\,, \end{aligned}$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

primjer je često korištenog generatora pseudoslučajnih brojeva. Period p ovog LKG je $2^{31}-2$.
Produkt a i X_n u LKG prelazi maksimalnu vrijednost 32-bitnog cijelog broja ako je $X_n > 2^{31}/a$. Stoga je nemoguća direktna implementacija LKG sa $m = 2^{31}-1$ u naprednom jeziku. Schrage je predložio sljedeći algoritam koji omogućava zaobilaženje tog problema. Prvo, modul se reprezentira u obliku $m = aq + r$, gdje je $r < q$, te se tada $aX_n (\text{mod } m)$ računa upotrebom identiteta

$$aX_n(\text{mod } m) = \begin{cases} a(X_n(\text{mod } q)) - r[X_n/q]\,, & a(X_n(\text{mod } q)) \geq r[X_n/q]\,, \\ a(X_n(\text{mod } q)) - r[X_n/q] + m\,, & \text{inače}\,, \end{cases}$$

gdje je $[X_n/q]$ cijeli dio od X_n/q. Taj izraz ni u jednom trenutku ne uključuje brojeve veće od m. Moguć izbor brojeva q i r za LKG s $m = 2^{31}-1$ i $a = 16807$ dan je s $q = 127773$ i $r = 2836$.
Dva druga moguća izbora za multiplkator LKG s $m = 2^{31}-1$ i $c = 0$ su $a = 48271$ (sa, recimo, $q = 44488$ i $r = 3399$), i $a = 69621$ (sa, recimo, $q = 30845$ i $r = 23902$). Osim ovih ne bi se trebala koristiti niti jedna druga vrijednost multiplikatora a.

2 Generiranje slučajnih brojeva iz specificirane distribucije

Glavne opće metode generiranja slučajnih brojeva su:

- metoda inverzne transformacije,
- metoda prihvaćanja i odbijanja.

Postoje specijalni algoritmi za generiranje slučajnih brojeva iz važnih distribucija. Na primjer, Box-Mullerov algoritam i polarni algoritam koriste se za generiranje slučajnih brojeva iz standardne normalne distribucije.
U ovom odjeljku uvijek pretpostavljamo da su nam dostupni slučajni brojevi iz $\mathcal{U}_{[0,1]}$ distribucije - uniformne distribucije na intervalu $[0,1]$. Zaista, mnogi standardni kompjutorski programi su sposobni generirati takve slučajne brojeve.

2.1 Metoda inverzne transformacije

Pretpostavimo da nam je potreban algoritam za generiranje nezavisnih slučajnih brojeva iz distribucije $\mathcal{F}$, te neka je $F(x)$ odgovarajuća funkcija distribucije. Neka je $F^{-1}(y)$ inverzna funkcija od $F(x)$, definirana za sve y između 0 i 1. Ako je slučajna varijabla $\mathbf{U}$ uniformno distribuirana na intervalu $[0,1]$, tada slučajna varijabla $\mathbf{X} = F^{-1}(\mathbf{U})$ ima funkciju distribucije $F(x)$. Zaista,

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq x) = \mathbb{P}[F^{-1}(\mathbf{U}) \leq x] = \mathbb{P}[\mathbf{U} \leq F(x)] = F(x)\,.$$

Dakle, za generiranje slučajnog broja x iz distribucije $\mathcal{F}$, možemo koristiti sljedeći dvokoračni algortiam.

1. Generirati slučajna broj u iz $\mathcal{U}_{[0,1]}$.
2. Vratiti $x = F^{-1}(u)$.

Primjer. Slučajna varijabla $\mathbf{X}$ ima Weibullovu distribuciju (s parametrima $\alpha > 0$ i $\beta > 0$) ako je njezina vjerojatnosna gustoća dana sa

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}\exp[-(x/\beta)^{\alpha}], & \text{za } 0 \leq x < \infty \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Funkcija distribucije od $\mathbf{X}$ dana je sa

$$F(x) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} d\tau\, f(\tau) = 1 - \exp[-(x/\beta)^{\alpha}]\,.$$

Da bismo pronašli inverznu funkciju od $F(x)$ moramo riješiti jednadžbu $y = F(x)$ po varijabli x. Zato je inverzna funkcija $F^{-1}(y)$ rješenje jednadžbe

$$y = 1 - \exp[-(x/\beta)^{\alpha}]\,,$$

i dana je sa

$$F^{-1}(y) = \beta[-\log(1-y)]^{1/\alpha}\,.$$

Dakle, da bismo generirali slučajni broj iz Weibullove distribucije, možemo koristiti sljedeći algoritam

1. Generirati slučajna broj u iz $\mathcal{U}_{[0,1]}$.
2. Vratiti $x = \beta[-\log(1-u)]^{1/\alpha}$.

 © Faculty and Institute of Actuaries

Glavni nedostatak metode inverzne transformacije je potreba za eksplicitnim izrazom za inverz funkcije distribucije $F(x)$. Na primjer, za generiranje slučajnog broja iz standardne normalne distribucije upotrebom metodom inverzne transformacije, treba nam inverz funkcije distribucije

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt\,.$$

Međutim, u ovom slučaju ne može se naći eksplicitno rješenje jednadžbe $y = F(x)$.

2.2 Metoda inverzne transformacije za diskretne slučajne varijable

Neka je $\mathbf{X}$ diskretna slučajna varijabla koja poprima samo vrijednosti $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_N$, gdje je $\chi_1 < \chi_2 < \ldots \chi_N$. Distribucija $\mathcal{P}$ slučajne varijable $\mathbf{X}$ dana je sa

$$\mathbb{P}[\mathbf{X} = \chi_i] = p_i\,, \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, N\,,$$

gdje je $p_i > 0$ za sve i, i $\sum_{i=1}^{N} = 1$.
Funkcija distribucije slučajne varijable $\mathbf{X}$ dana je s

$$F(x) = \mathbb{P}[\mathbf{X} \leq x] = \sum_{i:\, \chi_i \leq x} p_i\,,$$

gdje se sumira po indeksima i takvim da je $\chi_i \leq x$. Ako je $x < \chi_1$, tada je $\sum_{i:\, \chi_i \leq x} p_i = 0$.
Sljedeći algoritam generira slučajni broj iz distribucije $\mathcal{P}$.

1. Generirati slučajna broj u iz $\mathcal{U}_{[0,1]}$.
2. Naći pozitvni cijeli broj i takav da je $F(\chi_{i-1} < u \leq F(\chi_i)$.
3. Vratiti $x = \chi_i$.

Očigledno je da algoritam može dati samo slučajne brojeve iz skupa $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_N\}$. Vjerojatnost da je vraćena određena vrijednost $x = \chi_n$ dana je s

$$\mathbb{P}[\text{“}x = \chi_n \text{ je vraćeno”}] = \mathbb{P}[F(\chi_{n-1}) < u \leq F(\chi_n)] = F(\chi_n) - F(\chi_{n-1})] = p_n\,.$$

Stoga gornji algoritam zaista generira diskretni slučajni broj iz distribucije $\mathcal{P}$.

2.3 Metoda prihvaćanja i odbijanja

Da bismo metodom prihvaćanja i odbijanja generirali slučajni broj iz distribucije $\mathcal{F}$ s gustoćom $f(x)$ prvo moramo reprezentirati $f(x)$ kao

$$f(x) = Ch(x)g(x)\,,$$

gdje je $C \geq 1$ konstanta, $h(x)$ je jednostavnija vjerojatnosna gustoća, i $0 < g(x) < 1$. Uočimo da budući da je $f(x)$ vjerojatnosna gustoća, mora vrijediti $C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)g(x)\,dx$. Nakon što je pronađena odgovarajuća reprezentacija za $f(x)$, možemo koristiti sljedeći algoritam.

1. Generirati slučajna broj u iz $\mathcal{U}_{[0,1]}$.
2. Generirati slučajni broj y iz distribucije s gustoćom $h(x)$.
3. Ako je $u > g(y)$ ići na korak 1, dok ako je $u \leq g(y)$ vratiti $x = y$.

Da bismo pokazali da gornji algoritam zaista generira slučajni broj iz distribucije s gustoćom $f(x)$ trebamo pokazati da je x realizacija slučajne varijable $\mathbf{X}$ s vjerojatnosnom gustoćom $f(x)$. Prva dva koraka algoritma uključuju generiranje slučajnih brojeva u i y, koji su realizacije slučajnih varijabli $\mathbf{U}$ i $\mathbf{Y}$. Realizacija x slučajne varijable $\mathbf{X}$ je generirana ako i samo ako se dogodi događaj $\mathbf{U} \leq g(\mathbf{Y})$, u kojem slučaju je $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Stoga je funkcija distribucije od $\mathbf{X}$ jednaka uvjetnoj distribuciji slučajne varijable $\mathbf{Y}$ uz dan događaj $\mathbf{U} \leq g(\mathbf{Y})$. To znači,

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \mathbb{P}[\mathbf{X} \leq x] = \mathbb{P}[\mathbf{Y} \leq x \,|\, \mathbf{U} \leq g(\mathbf{Y})] = \frac{\mathbb{P}[\mathbf{Y} \leq x, \mathbf{U} \leq g(\mathbf{Y})]}{\mathbb{P}[\mathbf{U} \leq g(\mathbf{Y})]}\,.$$

Upotrebom formule potpune vjerojatnosti dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathbf{Y} \leq x, \mathbf{U} \leq g(\mathbf{Y})] &= \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \mathbb{P}[\mathbf{Y} \leq x, \mathbf{U} \leq g(\mathbf{Y}) \,|\, \mathbf{Y} = s]h(s) \\ &= \int_{-\infty}^{x} ds\, \mathbb{P}[\mathbf{U} \leq g(s)]h(s) = \int_{-\infty}^{x} ds\, g(s)h(s)\,.\end{aligned}$$

Na isti način

$$\mathbb{P}[\mathbf{U} \leq g(\mathbf{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty} ds\, g(s)h(s) = C^{-1}\,.$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Zato je

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \mathbb{P}[\mathbf{X} \leq x] = C \int_{-\infty}^{x} ds\, g(s)h(s)\,.$$

Slijedi da je vjerojatnosna gustoća slučajne varijable $\mathbf{X}$ dana s

$$\frac{dF_{\mathbf{X}}(x)}{dx} = C\, g(x)h(x)\,,$$

što se podudara s željenom vjerojatnosnom gustoćom $f(x)$.

Primjer. Generirajte slučajnu varijablu x iz distribucije $\mathcal{F}$ s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}\,, & \text{za } x > 0\,, \\ 0\,, & \text{inače}\,, \end{cases}$$

upotrebom metode prihvaćanja i odbijanja.

Izaberimo

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{za } 0 < x \leq 1\,, \\ x^{-1/2}, & \text{za } 1 < x < \infty \\ 0 & \text{inače}\,, \end{cases}$$

i

$$h(x) = \begin{cases} x^{-1/2}(2+e^{-1})^{-1}\,, & \text{za } 0 < x \leq 1\,, \\ e^{-x}(2+e^{-1})^{-1}\,, & \text{za } 1 < x < \infty \\ 0 & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Da bismo imali $f(x) = C\, h(x)g(x)$ moramo staviti $C = (2+e^{-1})/\sqrt{\pi}$. Sljedeći algoritam (metoda inverzne transformacije) može se koristiti za generiranje slučajnog broja y iz distribucije $\mathcal{H}$ - distribucije s gustoćom $h(x)$.

1. Generirati slučajna broj u iz $\mathcal{U}_{[0,1]}$.
2. Ako je $u < 2/(2+e^{-1})$ vratiti $y = 4(2+e^{-1})u^2$, a ako je $u > 2/(2+e^{-1})$ vratiti $-\log[(1-u)(2+e^{-1})]$.

Algoritam za generiranje slučajnog broja iz distribucije $\mathcal{F}$ je dan sa

1. Generirati u iz $\mathcal{U}_{[0,1]}$.
2. Generirati y iz $\mathcal{H}$.
3. Ako je $u > g(y)$ ići na korak 1, a ako je $u < g(y)$ vratiti $x = y$.

2.4 Box-Mullerov algoritam

Sljedeći algoritam može se koristiti za generiranje slučajnih brojeva iz standardne normalne distribucije.

1. Generirati dva slučajna broja u_1 i u_2.

2. Vratiti

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{-2\log u_1}\,\cos(2\pi u_2)\,, \\ z_2 &= \sqrt{-2\log u_1}\,\sin(2\pi u_2)\,. \end{aligned}$$

Nedostatak Box-Mullerovog algoritma je potreba za računanjem $\sin(\cdot)$ i $\cos(\cdot)$ što je vremenski zahtjevno. Sljedeći algoritam koristi u biti iste transformacije kao i Box-Mullerov algoritam, ali izbjegava računanje $\sin(\cdot)$ i $\cos(\cdot)$ upotrebom metode prihvaćanja i odbijanja.

2.5 Polarni algoritam

1. Generirati dva slučajna broja u_1 i u_2.

2. Staviti $v_1 = 2u_1 - 1$, $v_2 = 2u_2$ i $s = v_1 - 32 + v_2 - 32$.

3. Ako je $s > 1$ ići na korak 1.

   Inače, vratiti

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{-2\log s}{s}}\,v_1\,, \\ z_2 &= \sqrt{\frac{-2\log s}{s}}\,v_2\,. \end{aligned}$$

Analogno Box-Mullerovom algoritmu, polarni algoritam generira par slučajnih brojeva iz standardne normalne distribucije.
Različite rutine za generiranje slučajnih brojeva mogu se naći u knjizi “Numerical Recipes in C: the art of scientific computing”, W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling, B.P.Flannery, Cambridge University Press, 1992.

 © Faculty and Institute of Actuaries

3 Generiranje niza skupova koreliranih normalnih slučajnih brojeva

Zajednička distribucija skupa od n normalnih slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \ldots, \mathbf{X}_n$ potpuno je specificirana vektorom srednjih vrijednosti $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, gdje je

$$\mu_1 = \mathbb{E}(\mathbf{X}_1), \mu_2 = \mathbb{E}(\mathbf{X}_2),\ dots, \mu_n = \mathbb{E}(\mathbf{X}_n)\,,$$

i $n \times n$ (simetričnom) kovarijacijskom matricom

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elementi matrice $\widehat{C}$ su varijance i kovarijance

$$c_{jk} = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_j - \mu_j)(\mathbf{X}_k - \mu_k)],\ \text{za } j = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Zaista, zajednička vjerojatnosna gustoća slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$, s vektorom srednjih vrijednosti μ i kovarijacijskom matricom $\widehat{C}$ dana je sa

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \widehat{C}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{jk}(x_j - \mu_j)(x_k - \mu_k)\right] \tag{1}$$

gdje su s_{jk} elementi matrice $\widehat{S} = \widehat{C}^{-1}$ - matrice inverzne kovarijacijskoj matrici $\widehat{C}$. Ako se koristi alternativni opis distribucije skupa $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$, tada treba naći srednje vrijdnosti i kovarijacijsku matricu prije nego što se koristi dolje opisani algortiam za generiranje koreliranih normalnih slučajnih brojeva.

Da bismo generirali skup normalnih slučajnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iz distribucije (1), upotrebljavamo sljedeću strategiju. Prvo generiramo nezavisne standardne slučajne brojeve $z_1, z_2, \ldots, z_n$ upotrebom jednog od algoritama opisanih u prethodnim odjeljcima. Tada računamo slučajne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ korištenjem relacije

$$x_j = \sum_{k=1}^{j} l_{jk} z_k + \mu_j\,, \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

gdje je trokutasta matrica

$$\begin{array}{lllll} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{array} \tag{2}$$

odabrana tako da se kovarijacijska matrica slučajnih varijabli

$$\mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}\mathbf{Z}_k + \mu_j \, ,$$

podudara s matricom $\widehat{C}$, ukoliko su $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_n$ nezavisne standardne slučajne varijable. Uočite da slučajne varijable $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ sigurno imaju ispravne srednje vrijednosti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, budući da je $\mathbb{E}(\mathbf{Z}_k) = 0$ za $k = 1, 2, \ldots, n$.

Elemente trokutaste matrice (2) možemo računati rekurzivno, red po red, počevši s vrha. Prvi element l_{11} nalazimo iz uvjeta $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_1) = c_{11}$, što povlači $l_{11}^2 = c_{11}$, ili $l_{11} = \sqrt{c_{11}}$. Prvi element drugog retka nalazimo iz uvjeta $\mathrm{cov}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1) = c_{21}$, što povlači

$$\mathbb{E}[l_{11}\mathbf{Z}_1(l_{21}\mathbf{Z}_1 + l_{22}\mathbf{Z}_2)] = c_{21} \text{ ili } l_{21} = c_{21}/l_{11} \, .$$

Drugi element drugog retka nalazimo iz uvjeta $\mathrm{Var}(X_2) = c_{22}$, što povlači $l_{11}^2 + l_{22}^2 = c_{22}$, ili $l_{22} = \sqrt{c_{22} - l_{11}^2}$.

Općenito, ako su elementi retka

$$l_{k-1,1}, l_{k-1,2}, \ldots, l_{k-1,k-1} \, ,$$

već izračunati, elemente sljedećeg retka

$$l_{k1}, l_{k2}, \ldots, l_{kk}$$

računamo kako slijedi. Koeficijenti $l_{k1}, l_{k2}, \ldots, l_{k,k-1}$ nalaze se iz uvjeta

$$\mathrm{cov}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_j) = c_{kj} \text{ za } j = 1, 2, \ldots, k-1 \, ,$$

što daje

$$l_{k1} = \frac{c_{k1}}{l_{11}} \text{ i } l_{kj} = \frac{c_{kj} - \sum_{m=1}^{j-1} l_{km} l_{lm}}{l_{jj}} \, \text{, za } j = 2, \ldots, k-1 \, .$$

 © Faculty and Institute of Actuaries

Konačno, koeficijent l_{kk} se nalazi iz uvjeta $\mathrm{Var}(\mathbf{X}_k) = c_{kk}$, što povlači

$$l_{11}^2 + l_{22}^2 + \cdots + l_{kk}^2 = c_{kk} \text{ ili } l_{kk} = \sqrt{c_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{jj}^2}\,.$$

Ako su koeficijenti l_{jk} odabrani kao gore, tada slučajne varijable

$$\mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}\mathbf{Z}_k + \mu_j\,,\ j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

imaju srednje vrijednosti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, i njihova kovarijacijska matrica se podudara s matricom $\widehat{C}$. Zato je zajednička distribucija slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ dana jednadžbom (1).
Na taj način proizlazi da se sljedeći algoritam može koristiti za generiranje skupa normalnih slučajnih varijabli iz distribucije s kovarijacijskom matricom $\widehat{C}$ i srednjim vrijednostima $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

1. Za $j = 1, 2, \ldots, n$, izračunati koeficijente $l_{j1}, l_{j2}, \ldots, l_{jj}$ upotrebom relacija

$$l_{j1} = \frac{c_{j1}}{l_{11}}\,,\ l_{j,k} = \frac{c_{jk} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{jm}l_{km}}{l_{kk}}\,,\ \text{za } k = 2, 3, \ldots, j-1\,;$$

   i

$$l_{jj} = \sqrt{c_{jj} - \sum_{m=1}^{j-1} l_{mm}^2}\,.$$

2. Generirati nezavisne standardne slučajne brojeve $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (upotrebom jednog od algoritama opisanog u prethodnom odjeljku).

3. Izračunati slučajne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pomoću

$$x_j = \sum_{k=1}^{l} l_{jk}z_k + \mu_j\,,\ \text{za } j = 1, 2, \ldots, n\ ,.$$

Trokutasta matrica koeficijenata l_{jk} definira donju trokutastu matricu $\widehat{L}$ - svi elementi matrice $\widehat{L}$ iznad glavne dijagonale su nule. Čitatelj može provjeriti da je produkt matrice $\widehat{L}$ i njene transponirane matrice $\widehat{L}^T$ jednak kovarijacijskoj matrici $\widehat{C}$. Reprezentacija $\widehat{C} = \widehat{L}\widehat{L}^T$ zove se *Choleskyjeva dekompozicija* matrice $\widehat{C}$.

4 Nedostaci korištenja istinski slučajnih brojeva, u odnosu na pseudoslučajne brojeve

Brojevi za koje možemo reći da su slučajni u strogom smislu, mogu se generirati fizikalnim procesima (upotrebom raznih elektronskih naprava). RAND korporacija je 1955 publicirala tablicu s milijun slučajnih brojeva dobivenih pomoću takve naprave. Ubačeni u memoriju računala, ti su očigledno istinski slučajni brojevi prikladni za upotrebu isto kao i pseudoslučajni brojevi generirani pomoću LKG. Međutim, *tablica može biti prekratka.* Zaista, nije neuobičajeno da znanstvene Monte-Carlo simulacije zahtijevaju nekoliko milijardi slučajnih brojeva. S druge strane, kombinacija LKG-ova može proizvesti niz pseudoslučajnih brojeva koji je usprkos toga što ima konačan period, za sve praktične potrebe dobar kao i beskonačan niz.

Specijalna naprava (slična onoj koja je generirala tablice RAND korporacije) mogla bi se pridodati računalu. Iako bi takva naprava dopuštala generiranje proizvoljno dugačkog niza slučajnih brojeva, još uvijek ne bi bila u poptunosti zadovoljavajuća, jer *bi bilo nemoguće reproducirati potpuno isti niz slučajnih brojeva.*

Velika prednost LKG-ova je reproducibilnost slučajnih brojeva. Ako je isto sjeme specificirano na početku dva niza, tada će se proizvest isti niz pseudoslučajnih brojeva.

Kritički čitatelj mogao bi predložiti da se niz slučajnih brojeva proizvedenih elektronskom napravom spremi na disk, te učita s diska ukoliko je poslije potreban isti niz slučajnih brojeva. Zaista, niz dug 1 milijun cijelih brojeva zahtijeva 4 MBytea memorije, tako da se oko 100 milijuna slučajnih brojeva može lako pohraniti na disk modernog PC-ja. Međutim, očito je velika prednost da je dovoljno pohraniti jedan jedini broj (sjeme) kada se opetovano koriste pseudoslučajni brojevi, umjesto pohranjivanja cijelog niza slučajnih brojeva.

Konačno, samo je stranica kompjutorskog koda (dostupna besplatno) potrebna za generiranje pseudoslučajnih brojeva. U slučaju slučajnih brojeva trebamo bilo dugačku tablicu, bilo dodatak hardware-u računala. Niti jednog od toga najvjerojatnije neće biti besplatno.

 © Faculty and Institute of Actuaries

5 Zajednički skupovi slučajnih brojeva nasuprot nezavisnih skupova slučajnih brojeva

Monte Carlo simulacija se najčešće upotrebljava za određivanje očekivanja $\mathbb{E}(\mathbf{X})$ slučajne varijable $\mathbf{X}$ vezane uz specifičan stohastički model. Simulacija modela rezultira u izlaznom podatku x_1, realizaciji slučajne varijable $\mathbf{X}$. Druga simulacija (s nezavisnim skupom slučajnih brojeva) daje novi izlaz x_2. Simulacija se nastavlje sve dok ne akumuliramo dovoljno veliki broj n izlaza $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Aritmetička sredina tih izlaznih podataka $\widehat{Q} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_k$ se tada upotrebljava kao procjenitelj za $\widehat{Q}$.
Drugi skup Monte Carlo simulacija može se provoditi bilo s istim bilo s nezavisnim skupom slučajnih brojeva. Isti skup slučajnih brojeva koristi se za:

1. Analizu osjetljivosti.
2. Numeričko računanje derivacija.
3. Komparatvne simulacije, vrednovanje izvedbe.

5.1 Analiza osjetljivosti

Ako distribucija slučajne varijable $\mathbf{X}$ ovisi o parametru modela, recimo α, tada je očekivanje od $\mathbf{X}$ funkcija parametra α, t.j., $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = Q(\alpha)$. Jedan od važnijih dijelova analize modela simulacije je analiza osjetljivosti.
Analiza osjetljivosti koristi se za određivanje da li se rezultati simulacije, u našem slučaju očekivanje $Q(\alpha)$, značajno mijenjanju kada se promijeni vrijednost parametra α. Dva skupa simulacija se provode za dvije različite vrijednosti, recimo α_1 i α_2, parametra α. Važno je upotrijebiti zajednički skup slučajnih brojeva za obje simulacije, jer se inače efekt promjene parametra može pomiješati s promjenom slučajnih brojeva.

5.2 Numeričko računanje derivacija

U slučaju da je potrebna derivacija $Q'(\alpha)$, često se upotrebljava aproksimacija konačnim razlikama

$$Q'(\alpha) \approx \frac{Q(\alpha + \delta) - Q(\alpha)}{\delta} \,,$$

kada je δ dovoljno mali broj. Značenje derivacije je stopa promjene od $Q(\alpha)$ po α kada su vrijednosti ostalih parametara fiksne. Stoga je važno koristiti isti skup slučajnih brojeva za računanje izlaznih podataka $x_k(\alpha+\delta)$ i $x_k(\alpha)$ slučajnih varijabli $\mathbf{X}(\alpha+\delta)$ i $\mathbf{X}(\alpha)$. U suprotnom će rezultat biti značajno poremećen varijacijom slučajnih brojeva.

5.3 Komparatvne simulacije, vrednovanje izvedbe

Dva skupa simulacija mogu se izvesti u dvije različite situacije danog modela, ili za dvije različite konfiguracije modela. U takvim simulacijama treba koristiti zajednički skup slučajnih brojeva.
Slijedi objašnjenje za upotrebu zajedničkog skupa slučajnih brojeva. Komparativna simulacija obično uključuje računanje razlike

$$\Delta = Q(\alpha_1) - Q(\alpha_2)\,.$$

Uočite da kako se povećava broj simulacija n, tako se smanjuje varijanca procjenitelja $\widehat{Q}(\alpha_1)$, $\widehat{Q}(\alpha_2)$ i $\widehat{\Delta}$. Međutim, broj simulacija n je uvijek konačan, te stoga procjenitelj

$$\widehat{\Delta} = \widehat{Q}(\alpha_1) - \widehat{Q}(\alpha_2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(\alpha_1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(\alpha_2)$$

ima konačnu varijancu

$$\mathrm{Var}(\widehat{\Delta}) = n^{-1}(\mathrm{Var}[\mathbf{X}(\alpha_1)] + \mathrm{Var}[\mathbf{X}(\alpha_2)] - 2\mathrm{cov}[\mathbf{X}(\alpha_1), \mathbf{X}(\alpha_2)])\,.$$

Jasno je da što je veća kovarijanca od $\mathbf{X}(\alpha_1)$ i $\mathbf{X}(\alpha_2)$, to je manja varijanca procjenitelja $\widehat{\Delta}$. Razumno je pretpostaviti da zajednički skup slučajnih brojeva proizvodi pozitivnu korelaciju za $|\alpha_1 - \alpha_2|$ malo.
Zaključujemo da koristimo isti skup slučajnih brojeva kada je potrebna pozitivna korelacija.

6 Koliko simulacija provesti za određenu potrebu?

Kao što je već bilo spomenuto u prethodnom odjeljku, Monte Carlo simulacija se obično koristi kada treba odrediti očekivanje $Q = \mathbb{E}(\mathbf{X})$ slučajne varijable

 © Faculty and Institute of Actuaries

$\mathbf{X}$ vezane uz određeni stohastički model. Simulacija modela rezultira izlaznim podatkom x_1, realizaciji slučajne varijable $\mathbf{X}$. Druga nezavisna simulacija daje drugi izlazni podatak x_2. Simulacije se nastavljaju sve dok ne sakupimo ukupno n izlaznih podataka $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Aritmetička sredina tih izlaza $\widehat{Q} = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} x_k$ koristi se kao procjenitelj za Q.

U tipičnim numeričkim simulacijama unaprijed se odredi nivo tolerancije ϵ (maksimalna dopuštena vrijednost greške). Zbog stohastičke prirode Monte Carlo simulacija, potrebno je također prije provođenja simulacija specificirati nivo pouzdanosti $1-\alpha$ (vjerojatnost da je stvarna greška manja od nivoa tolerancije). Problem se sada sastoji u tome da se odredi vrijednost od n tako da je neslaganje između $\widehat{Q}$ i Q manja od ϵ s vjerojatnošću (barem) $1-\alpha$. Postoje dva uobičajena načina mjerenja neslaganja: apsolutna greška $|\widehat{Q}-Q|$, i relativna greška $|\widehat{Q}-Q|/|Q|$.

Ako se koristi apsolutna greška kao mjera neslaganja, tada se može upotrijebiti sljedeći argument za potreban broj simulacija. Budući da su simulacije nezavisne, centralni granični teorem nam kaže da je za velike vrijednosti od n, distribucija od $n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - Q)$ približno normalna s očekivanjem nula i varijancom v^2. To jest,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(x_k - Q) \approx \mathcal{N}(0, v^2)\,,$$

gdje je $\mathcal{N}(a,b)$ normalna slučajna varijabla s očekivanjem a i varijancom b. Zakon velikih brojeva nam kaže da je uzoračka varijanca

$$\widehat{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{Q})^2$$

blizu nepoznate varijance v^2 za dovoljno velike vrijednosti od n. Stoga,

$$\frac{n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - Q)}{\sqrt{(n-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{Q})^2}} \approx \mathcal{N}(0,1)\,.$$

U tablicama normalne distribucije (ili pomoću prikladnog kompjutorskog paketa) možemo pronaći vrijednost z_α takvu da je

$$\mathbb{P}[-z_\alpha \le \mathcal{N}(0,1) \le z_\alpha] = 1-\alpha\,.$$

Tada

$$\mathbb{P}\left[-z_\alpha\widehat{\sigma} \le \sum_{k=1}^{n}(x_k - Q) \le z_\alpha\widehat{\sigma}\right] \approx 1 - \alpha\,,$$

ili

$$\mathbb{P}\left[|\widehat{Q} - Q| \le z_\alpha\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{Q})^2}\,\right] \approx 1 - \alpha\,.$$

Zato možemo koristiti sljedeću proceduru da bismo odlučili da li je dostignuta željena točnost ili ne.

1. Generirati $n_0 = 30$ izlaznih podataka $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$.

2. Ako je

$$z_\alpha\sqrt{\frac{1}{n_0(n_0-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{Q})^2} \le \epsilon\,,$$

   tada je dostignuta tražena točnost.

   U suprotnom, generirati izlazne podatke x_k sve dok

$$z_\alpha\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{Q})^2} \le \epsilon\,.$$

Primjedba. Centralni granični teorem i zakon velikih brojeva daju ispravne rezultate samo za velike vrijednosti od n. Zbog tog razloga ke sigurnosni korak 1 uključen u gornju proceduru.
Kao što je već prije spomenuto, procjenitelj $\widehat{\sigma}^2$ je blizu nepoznate varijance v^2, te se zato ne mijenja značajno sa n za $n \ge n_0$. Stoga bi broj simulacija potrebnih za željenu točnost trebao biti blizu

$$n_* = \frac{z_\alpha^2}{\epsilon^2(n_0-1)}\sum_{k=1}^{n_0}(x_k - \widehat{Q})^2\,.$$

Sličan argument može se primjeniti ako se relativna greška $|\widehat{Q}-Q|/|Q|$ koristi kao mjera točnosti. Kao rezultat možemo koristiti sljedeću proceduru da bismo odlučili da li je dostignuta željena točnost ili ne u slučaju kada se koristi kao mjera točnosti.

 © Faculty and Institute of Actuaries

1. Generirati $n_0 = 30$ izlaznih podataka $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$.

2. Ako je

$$\frac{z_\alpha}{|\widehat{Q}|}\sqrt{\frac{1}{n_0(n_0-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\widehat{Q})^2} \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,,$$

   tada je dostignuta tražena točnost.

   U suprotnom, generirati izlazne podatke x_k sve dok

$$\frac{z_\alpha}{|\widehat{Q}|}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\widehat{Q})^2} \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,.$$