Stohastičko modeliranje

Zadaci

POGLAVLJE 2

1. $\{N(t) : t \geq 0\}$ je Poissonov proces s parametrom λ, a $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ je filtracija pridružena procesu N.

   (i) Napišite uvjetnu distribuciju od $N(t+s) - N(t)$ uz dano $\mathcal{F}_t$, gdje je $s > 0$, te pomoću toga izračunajte $\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)} \,|\, \mathcal{F}_t]$.

   (ii) Nađite proces oblika $M(t) = \eta(t)\,\theta^{N(t)}$ koji je martingal.

   Rješenje:

   (i) Budući da Poissonov proces ima nezavisne priraste, to je uvjetna distribucija od $N(t+s) - N(t)$ uz dano $\mathcal{F}_t$ jednaka bezuvjetnoj distribuciji od $N(t+s) - N(t)$. Zbog stacionarnosti prirasta, $N(t+s) - N(t)$ ima jednaku distribuciju kao i $N(s)$, a to je Poissonova distribucija s parametrom λs.

   Nadalje,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)} \,|\, \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\theta^{N(t+s)-N(t)}\theta^{N(t)} \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= \theta^{N(t)}\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)-N(t)}] \\
&= \theta^{N(t)}e^{(\theta-1)\lambda s}\,.
\end{aligned}
$$

   (ii) Treba vrijediti $\mathbb{E}[\eta(t+s)\theta^{N(t+s)} \,|\, \mathcal{F}_t] = \eta(t)\theta^{N(t)}$. Iz dijela (i), $\mathbb{E}[\eta(t+s)\theta^{N(t+s)} \,|\, \mathcal{F}_t] = \eta(t+s)\theta^{N(t)}e^{(\theta-1)\lambda s}$. Izjednačavanjem desnih strana slijedi $\eta(t+s)e^{(\theta-1)\lambda s} = \eta(t)$. Stavimo $t = 0$ i dobivamo da je $\eta(s) = \eta(0)e^{(1-\theta)\lambda s}$.

2. Cijena dionice $\{S_t : t = 1, 2, \dots\}$ modelirana je kao

$$
S_t = S_0 \exp\left(\sum_{j=1}^{t} X_j\right)\,,
$$

   gdje je $X_1, X_2, \dots$ niz nezavisnih normalnih slučajnih varijabli sa $\mathbb{E}(X_j) = \mu_j$, $\mathrm{Var}(X_j) = \sigma_j^2$.

   Da bi se provela martingalna analiza nužno je pronaći niz konstanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ takvih da je $Y_t = \alpha_t S_t$ martingal.

(i) Izvedite rekurentnu jednadžbu koju zadovoljavaju konstante $\{\alpha_t : t = 1, 2, \dots\}$. [Možete iskoristiti činjenicu da je funkcija izvodnica momenata od $N(\mu, \sigma^2)$ jednaka $M(s) = \exp(\mu s + 1/2\, \sigma^2 s^2)$.]

(ii) Navedite, s kratkim obrazloženjem, da li bi se dobio isti odgovor u slučaju da X_j imaju distribuciju koja nije normalna, a očekivanje i varijanca su i dalje μ_j i σ_j^2.

Rješenje:

(i) Neka je $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_1, X_2, \dots, X_t\} = \sigma\{Y_1, Y_2, \dots, Y_t\}$. Da bi Y bio martingal mora vrijediti $\mathbb{E}[Y_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = Y_t$, $t = 1, 2, \dots$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] &= \alpha_{t+1}\mathbb{E}[S_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= \alpha_{t+1}\mathbb{E}[S_t e^{X_{t+1}} \,|\, \mathcal{F}_t] \\
&= \alpha_{t+1} S_t \mathbb{E}[e^{X_{t+1}}] \\
&= Y_t \, \frac{\alpha_{t+1}}{\alpha_t} \, e^{\mu_{t+1} + \sigma_{t+1}^2/2} \, .
\end{aligned}$$

Da bi zadnji izraz bio jednak Y_t, treba vrijediti

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t e^{-\mu_{t+1} - \sigma_{t+1}^2/2} \, .$$

(ii) Odgovor bi bio drugačiji, jer rješenje koje smo dobili ovisi o obliku funkcije izvodnice momenata normalne slučajne varijable.

POGLAVLJE 3

1. Kompanija kvartalno određuje kreditnu sposobnost različitih firmi; rejtinzi su, u padajućem poretku, A, B, C i D (default). Povijesni podaci podržavaju hipotezu da kreditni rejting tipične firme slijedi Markovljev lanac s prijelaznom matricom

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha-\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1-2\alpha-\alpha^2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

za neki parametar α.

(i) Nacrtajte prijelazni graf lanca.

(ii) Odredite skup vrijednosti od α za koje je matrica P prijelazna matrica.

(iii) Obrazložite da li je lanac ireducibilan i aperiodički.

(iv) Izvedite stacionarnu vjerojatnosnu distribuciju lanca i ustanovite da li je jedinstvena.

(v) Za vrijednost $\alpha = 0.1$, izračunajte vjerojatnost da je rejting firme u trećem kvartalu, X_3, u default stanju D:

   (a) u slučaju da je rejting firme u prvom kvartalu, X_1, jednak A

   (b) u slučaju $X_1 = B$

   (c) u slučaju $X_1 = C$

   (d) u slučaju $X_1 = D$

Rješenje:

(ii) Svi elementi matrice P trebaju biti između 0 i 1, t.j., mora biti zadovoljeno: $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \alpha^2 \leq 1$, $0 \leq 1 - \alpha - \alpha^2 \leq 1$ i $0 \leq 1 - 2\alpha - \alpha^2 \leq 1$.
Vrijedi $1-\alpha-\alpha^2 = 0$ za $\alpha_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{5})/2$, te je $0 \leq 1-\alpha-\alpha^2 \leq 1$ za $\alpha \in [0, (-1+\sqrt{5})/2]$.
Vrijedi $1-2\alpha-\alpha^2 = 0$ za $\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, pa je $0 \leq 1-2\alpha-\alpha^2 \leq 1$ za $\alpha \in [0, -1+\sqrt{2}]$.
Zbog $-1+\sqrt{2} < (-1+\sqrt{5})/2$, dozvoljen skup vrijednosti od α je interval $[0, \sqrt{2}-1]$.

(iii) Lanac ima jedno apsorbirajuće stanje (stanje D), pa ne može biti ireducibilan. Međutim, lanac je aperiodički, što se odmah vidi iz prijelazne matrice.

(iv) Stacionarna vjerojatnost $\pi = (\pi_A, \pi_B, \pi_C, \pi_D)$ zadovoljava $\pi = \pi P$, što vodi do sustava

$$
\begin{aligned}
\pi_A &= (1-\alpha-\alpha^2)\pi_A + \alpha\pi_B + \alpha^2\pi_C \\
\pi_B &= \alpha\pi_A + (1-2\alpha-\alpha^2)\pi_B + \alpha\pi_C \\
\pi_C &= \alpha^2\pi_A + \alpha\pi_B + (1-2\alpha-\alpha^2)\pi_C \\
\pi_D &= \alpha^2\pi_B + \alpha\pi_C + \pi_D
\end{aligned}
$$

Iz zadnje jednadžbe slijedi $\alpha\pi_B + \pi_C = 0$, odnosno $\pi_B = \pi_C = 0$. Odavde slijedi $\pi_A = 0$, te $\pi_D = 1$. Dakle, $\pi = (0, 0, 0, 1)$. Budući da je rješenje sustava jedinstveno, i stacionarna distribucija je jedinstvena.

(v) Za $\alpha = 0.1$ kvadriramo matricu P što daje prijelazne vjerojatnosti u dva koraka. Računanjem dobijemo:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.8022 & 0.169 & 0.0268 & 0.002 \\ 0.169 & 0.6441 & 0.159 & 0.0279 \\ 0.0268 & 0.159 & 0.6342 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tražene vjerojatnosti su u zadnjem stupcu.

2. Osiguratelj motornih vozila radi po sustavu bonusa s pet nivoa. Postotak osnovne premije koju plaća osiguratelj na svakom nivou je kako slijedi:

Nivo	*% naplaćene premije*
5	100
4	90
3	80
2	70
1	60

Osiguranici se kreću po nivoima ovisno o broju šteta u protekloj godini. Za svakog osiguranika, broj godišnjih šteta ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem 0.25.

Za osiguranike na nivoima 2, 3, 4 i 5 na početku protekle godine:

- ako nije bilo štete tokom protekle godine, osiguranik se pomiče za jedan nivo nadolje (npr., sa nivoa 4 na nivo 3)
- ako je postojala jedna šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče za jedan nivo na gore (osim onih koji su bili na nivou 5 na početku godine i koji ostaju na nivou 5)
- ako su postojale dvije štete u protekloj godini, osiguranik se pomiče dva nivoa prema gore (osim onih koji su bili na nivou 5 na početku godine i koji ostaju na nivou 5, i onih koji su bili na nivou 4 i koji se pomiču na nivo 5)

- ako su postojale tri ili više šteta tokom protekle godine, osiguranik se pomiče na nivo 5

Za osiguranike na nivou 1 bonus sustav ih štiti tako da ostaju na nivou 1 u slučaju jedne štete. U slučaju dvije štete, pomiču se na nivo 2, a u slučaju tri ili više šteta idu na nivo 5. Ako nemaju štete ostaju na nivou 1.

(i) Odredite prijelaznu matricu za ovaj sustav bonusa (uz pretpostavku da svi osiguranici obnavaljaju svoje police).

(ii) Osiguranik je na nivou 3 tokom prve godine police. Uz pretpostavku da se polica obnavlja, izračunajte vjerojatnost da će na početku treće godine osiguranik biti (a) na nivou 1, (b) na nivou 3.

(iii) (a) Navedite uvjete uz koje vjerojatnost da se osiguranik nalazi u određenom stanju nakon n godina konvergira kada $n \to \infty$ prema nekoj graničnoj vrijednosti nezavisno od početnog stanja.

(b) Provjerite da su ti uvjeti zadovoljeni u gornjem primjeru.

(c) Izračunajte granične (asimptotske) vjerojatnosti da će osiguranik biti u stanju 1.

(iv) Osiguratelj sumnja da je upotrebljavan model možda previše pojednostavljen. Uz dane godišnje podatke broja šteta po polici, navedene po nivoima popusta, navedite koji bi test bio najprikladniji za testiranje pretpostavke da je distribucija broja godišnjih šteta po polici Poissonova s očekivanjem 0.25.

Rješenje:

(i) Izračunajmo prvo vjerojatnosti nula, jedne, dvije ili više šteta. Stavimo p_k = vjerojatnost k šteta. Tada je

$$\begin{aligned}
p_0 &= e^{-0.25} &&= 0.7788 \\
p_1 &= 0.25e^{-0.25} &&= 0.1947 \\
p_2 &= (0.25^2)/2e^{-0.25} &&= 0.0243 \\
p_{\geq 3} &= 1 - p_0 - p_1 - p_2 &&= 0.0022\,.
\end{aligned}$$

Slijedi da je prijelazna matrica

$$P = \begin{pmatrix} 0.9735 & 0.0243 & 0 & 0 & 0.0022 \\ 0.7788 & 0 & 0.1947 & 0.0243 & 0.0022 \\ 0 & 0.7788 & 0 & 0.1947 & 0.00265 \\ 0 & 0 & 0.7788 & 0 & 0.2212 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7788 & 0.2212 \end{pmatrix}$$

gdje su nivoi poredani po redoslijedu 1,2,3,4,5.

(ii) Treba izračunati elemente $p_{31}^{(2)}$ i $p_{33}^{(2)}$ matrice P^2 prijelaznih vjerojatnosti u dva koraka. Imamo: $p_{31}^{(2)} = 0.7788 \times 0.7788 = 0.6065$, $p_{33}^{(2)} = 0.7788 \times 0.1947 + 0.1947 \times 0.7788 = 0.3033$

(iii) (a) Dovoljan uvjet za postojanje granične distribucije je da je lanac ireducibilan i periodičan.

(b) Ireducibilnost lanca vidi se iz grafa Markovljevog lanca, jer iz svakog stanja postoji niz strelica do svakog drugog stanja. Zbog $p_{11} > 0$, stanje 1 je aperiodičko. Budući da je lanac ireducibilan, sva su stanja aperiodička.

(c) Granična distribucija jednaka je stacionarnoj distribuciji π koja je rješenje jednadžbe $\pi = \pi P$. Sustav je sljedeći:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.9735\pi_1 + 0.7788\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.0243\pi_1 + 0.7788\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.1947\pi_2 + 0.7788\pi_4 \\ \pi_4 &= 0.0243 + 0.1947\pi_3 + 0.7788\pi_5 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 \end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi $\pi_1 = 0.9440$

(iv) Najbolji bi bio χ^2-test.

3. Promatrajte homogeni Markovljev lanac s prostorom stanja $S = \{1, 2, 3\}$ i prijelaznom matricom

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Izračunajte prijelaznu matricu za tri koraka.

(ii) Izračunajte, za svaki od sljedećih početnih uvjeta, vjerojatnost da će lanac biti u stanju 3 kada je opažen u vremenu $n = 3$ uz dano:

  (a) lanac je u stanju 1 u trenutku nula

  (b) lanac je u stanju 1 u trenutku nula, i u stanju 2 u trenutku 1

  (c) vjerojatnosti nalaženja u stanjima 1, 2, i 3 u trenutku nula su dane s 14/31, 9/31, odnosno 8/31.

(iii) Na koji način bi se Vaši odgovori na (a), (b) i (c) promijenili da je vrijeme opažanja bilo $n = 300$ umjesto $n = 3$?

Rješenje:

(i) Prijelazna matrica u tri koraka jednaka je

$$\begin{aligned} P^3 = P \cdot P^2 &= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/16 & 3/16 & 5/16 \\ 8/16 & 6/16 & 8/16 \\ 5/16 & 6/16 & 5/16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29/64 & 21/64 & 14/64 \\ 26/64 & 18/64 & 20/64 \\ 32/64 & 15/64 & 17/64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) (a) $\mathbb{P}[X_3 = 3 \,|\, X_0 = 1] = 14/64.$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_3 = 3 \,|\, X_0 = 1, X_1 = 2] &= \mathbb{P}[X_3 = 3 \,|\, X_1 = 2] \\ &= \mathbb{P}[X_2 = 3 \,|\, X_0 = 2] = 1/8\,. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, p_3^{(3)}) &= (\frac{14}{31}, \frac{9}{31}, \frac{8}{31}) \cdot P^3 \\ &= (\frac{14}{31}, \frac{9}{31}, \frac{8}{31}) \cdot \begin{pmatrix} 29/64 & 21/64 & 14/64 \\ 26/64 & 18/64 & 20/64 \\ 32/64 & 15/64 & 17/64 \end{pmatrix} \\ &= (\frac{14}{31}, \frac{9}{31}, \frac{8}{31}) \end{aligned}$$

(iii) Nakon $n = 300$ koraka možemo pretpostaviti da se lanac približno nalazi u stacionarnom stanju. To znači da je vjerojatnost nalaženje u nekom konkretnom stanju približno jednaka vrijednost stacionarne distribucije za to stanje. Iz (ii)(c) se vidi da je $(\frac{14}{31}, \frac{9}{31}, \frac{8}{31})$ stacionarna distribucija.

POGLAVLJE 4

1. Markovljev lanac s neprekidnim vremenom za model bolesti i smrti ima četiri stanja: Z (zdrav), B (bolestan), N (neizlječivo bolestan) i M (mrtav). Iz stanja zdrav prijelaz je moguć u stanja B i M, svako po stopi 0.05 godišnje. Bolesna osoba se oporavlja po stopi 1.0 godišnje; drugi mogući prijelazi su u M i N, svaki sa stopom 0.1 godišnje. Samo jedan prijelaz je moguć iz stanja neizlječivo bolestan i to u stanje M sa stopom 0.4 godišnje.

   (i) Nacrtajte prijelazni graf tog procesa.

   (ii) Definiramo $P(t) = \{p_{ij}(t) : i, j = Z, B, N, M\}$ gdje p_{ij} označava vjerojatnost boravljenja u stanju j u trenutku t ako je osoba bila u stanju i u trenutku 0. Navedite Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed za matricu $P(t)$, specificirajući elemente matrice A koja se pojavljuje.

   (iii) Izračunajte vjerojatnost da je osoba zdrava kroz deset neprekinutih godina uz dano da je zdrava sada.

   (iv) Neka je d_j vjerojatnost da život koji je trenutno u stanju j nikada neće biti neizlječivo bolestan. Promatrajući prvi prijelaz iz stanja Z, pokažite da je $d_Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} d_B$, i izvedite slično da je $d_B = \frac{1}{12} + \frac{5}{6} d_Z$. Iz toga izrčunajte d_Z i d_B.

   (v) Napišite očekivano trajanje neizlječive bolesti, počevši od trenutka prvog prijelaza u stanje N. Upotrijebite rezultat (iv) i izvedite očekivanje budućeg vremena koje će trenutno zdrava osoba provesti neizlječivo bolesna.

   Rješenje:

(ii) Radi se o vremenski homogenom Markovljevom procesu skokova, pa Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed glase: $P'(t) = P(t)A$. Generatorska matrica A jednaka je

$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.05 & 0 & 0.05 \\ 1.0 & -1.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gdje retci, odnosno stupci odgovaraju stanjima Z, B, N, M.

(iii) Traži se vjerojatnost da je vrijeme zadržavanja T u stanju Z veće od 10 godina. Budući da T ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda_Z = 0.1$, ta vjerojatnost je jednaka $\int_{10}^{\infty} 0.1\, e^{-0.1t}\, dt = e^{-1}$.

(iv) Označimo sa A događaj da osoba nikada neće biti neizlječivo bolesna. Tada je

$$\begin{aligned} d_Z = \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[A, \text{prvi skok u } M] + \mathbb{P}[A, \text{prvi skok u } N] \\ &+ \mathbb{P}[A, \text{prvi skok u } B] \\ &= \mathbb{P}[\text{prvi skok u } M]\mathbb{P}[A \,|\, \text{prvi skok u } M] \\ &+ \mathbb{P}[\text{prvi skok u } N]\mathbb{P}[A \,|\, \text{prvi skok u } N] \\ &+ \mathbb{P}[\text{prvi skok u } B]\mathbb{P}[A \,|\, \text{prvi skok u } B] \\ &= \frac{0.05}{0.1} + \frac{0.05}{0.1} d_B \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} d_B \end{aligned}$$

Slično, $d_B = \frac{1}{12} + \frac{10}{12} d_Z$. Rješavanjem sustava jednadžbi slijedi $d_Z = \frac{13}{14}$ i $d_B = \frac{6}{7}$.

(v) Očekivano trajanje neizlječive bolesti jednako je očekivanom vremenu boravka u stanju N (prije prelaska u stanje M). Budući da to vrijeme ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom 0.4, očekivanje je $1/0.4 = 2.5$ godina.

Očekivano vrijeme koje će trenutno zdrava osoba provesti neizlječivo bolesna jednaka je vjerojatnosti da će zdrava osoba ikada postati neizlječivo bolesna (što je po (iv) jednako 1-13/14=1/14) pomnoženo s očekivanim vremenom koje neizlječiva osoba ima prije nego što umre. Dakle, traženo vrijeme je $1/14 \times 2.5 = 5/28$.

2. Shema naknade za onesposobljenost modelirana je vremenski neprekidnim Markovljevi procesom skokova sa stanjima A (aktivan), P (privremeno nesposoban), T (trajno nesposoban) i M (mrtav). Prijelazne stope su kako slijedi:

$$\begin{array}{lll} A \longrightarrow P: \ 3\lambda & P \longrightarrow A: \ 5\lambda & T \longrightarrow M: \ 2\alpha \\ A \longrightarrow T: \ \lambda & P \longrightarrow T: \ 2\lambda & \\ A \longrightarrow M: \ \alpha & P \longrightarrow M: \ \alpha & \end{array}$$

(i) Napišite generatorsku matricu procesa.

(ii) Izračunajte vjerojatnost da proces koji počinje u stanju A ne posjeti stanja P i T do trenutka t.

(iii) Napišite matrični oblik Kolmogorovljevih diferencijalnih jednadžbi unatrag, te ga upotrijebite za izvod diferencijalne jednadžbe za $p_{TM}(t)$, vjerojatnosti da će član sheme u stanju T u trenutku 0 biti u stanju M u trenutku t.

(iv) Riješite jednadžbu za $p_{TM}(t)$, vjerojatnosti da će osiguranik, početno trajno nesposoban, biti mrtav do vremena t.

Rješenje:

(i) Generatorska matrica jednaka je

$$A = \begin{pmatrix} -4\lambda - \alpha & 3\lambda & \lambda & \alpha \\ 5\lambda & -7\lambda - \alpha & 2\lambda & \alpha \\ 0 & 0 & -2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Označimo sa B događaj da proces koji počinje u stanju A ne posjeti stanja P i T do trenutka t. Označimo sa T_0 prvo vrijeme zadržavanja (u stanju A). Događaj B će se dogoditi ukoliko proces do trenutka t nije izašao iz stanja A (T.j., $T_0 > t$), ili je izašao i otišao u stanje M (t.j., $T_0 \leq t$ i $X_{T_0} = M$). Slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B] &= \mathbb{P}[B, T_0 > t] + \mathbb{P}[B, T_0 \leq t] \\ &= \mathbb{P}[T_0 > t] + \mathbb{P}[T_0 \leq t, X_{T_0} = M] \\ &= e^{-(4\lambda+\alpha)t} + \int_0^t (4\lambda + \alpha) e^{-(4\lambda+\alpha)s} \frac{\alpha}{4\lambda + \alpha} \, ds \\ &= e^{-(4\lambda+\alpha)t} + (1 - e^{-(4\lambda+\alpha)t}) \frac{\alpha}{4\lambda + \alpha} \end{aligned}$$

(iii) Matrični oblik Kolmogorovljevih jednadžbi unatrag je

$$P'(t) = AP(t)\,.$$

Odavde izlazi $p'_{TM}(t) = -2\alpha p_{TM}(t) + 2\alpha p_{MM}(t)$, odnosno

$$p'_{TM}(t) = -2\alpha p_{TM}(t) + 2\alpha\,.$$

(iv) Stavimo $p(t) = p_{TM}(t)$. Rješenje homogene jednadžbe $p'(t) = -2\alpha p(t)$ je $p(t) = Ce^{-2\alpha t}$. Rješenje nehomogene jednadžbe tražimo metodom varijacije konstanti: $p(t) = C(t)e^{-2\alpha t}$. Uvrštavanjem slijedi diferencijalna jednadžba za $C(t)$: $C'(t) = 2\alpha e^{2\alpha t}$, čije je rješenje $C(t) = e^{2\alpha t} + C$. Dakle, $p(t) = (e^{2\alpha t} + C)e^{-2\alpha t} = 1 + Ce^{-2\alpha t}$. Iz početnog uvjeta $p(0) = 0$ slijedi $C = -1$, i konačno $p(t) = 1 - e^{-2\alpha t}$.

3. Promatrajte model doživljenja s dva stanja "živ" (Z) i "mrtav" (M), s vremenski zavisnom prijelaznom stopom iz Z u M jednakoj $\mu(t) = \mu t$. Vremenski parametar t predstavlja dob pojedinca koji se promatra.

(i) Izračunajte prijelaznu vjerojatnost $P_{ZZ}(s,t)$, definiranu s

$$P_{ZZ}(s,t) = \mathbb{P}(X(t) = Z \mid X(s) = Z)\,.$$

(ii) Pokažite upotrebom formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}[X \geq x]\,dx$$

za pozitivnu slučajnu varijablu X, da je očekivani budući život pojedinca dobi s jednak

$$\mathbb{E}[R_s] = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\frac{1 - G(s\sqrt{\mu})}{g(s\sqrt{\mu})}\,,$$

gdje je G standardna Gaussova funkcija distribucije, a g je njena gustoća.

(iii) Poželjno je kalibrirati gornji model tako da je očekivani budući život pojedinca dobi 70 jednak 6 godina. Izvedite aproksimaciju odgovarajuće vrijednosti od μ koristeći dvostruku nejednakost

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leq \frac{1 - G(x)}{g(x)} \leq \frac{1}{x}\,.$$

(iv) Kompanija želi testirati valjanost gornjeg modela. Pretpostavljaju da je stvarna stopa smrtnosti od dobi 70 nadalje oblika $\mu(t) = a + bt$, te namjeravaju testirati da li je $a = 0$. Metoda testiranja sastojat će se u simuliranju jednog uzorka veličine 1000 kada je $a = 0$, te drugog kada je $a \neq 0$, te pogledati koji od njih više sliči podacima koje je kompanija sakupila.

Objasnite kako simulirati vrijednost iz predložene distribucije, za proizvoljne vrijednosti a i b.

Rješenje:

(i) Po formuli (16) (Core Reading),

$$P_{ZZ}(s,t) = \exp\{-\int_s^t \mu u \, du\} = \exp\{-(\mu/2)(t^2 - s^2)\}\,.$$

(ii) Vrijedi $\mathbb{P}[R_s > w] = \mathbb{P}[X_{s+w} = Z \mid X_s = Z] = P_{ZZ}(s, s+w)$. Zato je po dijelu (i) i danoj formuli

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_s] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[R_s > w]\, dt \\
&= \int_0^\infty \exp\{-(\mu/2)((s+w)^2 - s^2)\}\, dw \\
&= \exp\{(\mu/2)s^2\} \int_s^\infty \exp\{-(\mu/2)w^2\}\, dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{1 - G(s\sqrt{\mu})}{g(s\sqrt{\mu})}
\end{aligned}$$

(iii) Iz (ii) i iz danih ocjena imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_s] &\leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}} = \frac{1}{s\mu}\,, \\
\mathbb{E}[R_s] &\geq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{1}{\mu\sqrt{\mu}} - \frac{1}{s^3 \mu^{3/2}} \right) = \frac{1}{s\mu} - \frac{1}{s^3\mu^2}\,.
\end{aligned}$$

Iz prve nejednakosti slijedi

$$\mu \leq \frac{1}{s\mathbb{E}[R_s]} = \frac{1}{70 \times 6} = 0.00238/\text{godina}^2\,.$$

Druga nejdnakost može se zapisati kao

$$\mu^2 \mathbb{E}[R_s] - \frac{\mu}{s} + \frac{1}{s^3} \geq 0\,,$$

odnosno,

$$6\mu^2 - \frac{1}{70}\mu + \frac{1}{70^3} \geq 0\,.$$

Rješenja pripadne kvadratne jednadžbe su 0.00023 i 0.00216, te μ treba ležati izvan intervla $(0.00023, 0.00216)$. U stvari, budući da je $\mu \approx 1/(s\mathbb{E}[R_s])$, slijedi da je μ u intervalu $[0.00216, 00238]$.

(iv) Po pretpostavci je

$$P_{ZZ}(70,t) = \exp\{-\int_{70}^{t} (a+bs)\, ds\} = \exp\{-a(t-70) - \frac{1}{2}(t^2-70^2)\}\,.$$

Označimo li sa $F(t)$ uvjetnu distribuciju preostalog vremena života, uvjetno na doživljenje dobi 70, tada je gornji izraz upravo jednak $1-F(t)$. Trebamo simulirati slučajnu varijablu X iz distribucje F. Koristimo metodu inverzne transformacije po kojoj je distribucija od $F^{-1}(U)$ jednaka F, gdje je $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, a F^{-1} je inverzna funkcija od F. Rješavanje jednadžbe $F(x) = u$, daje

$$\begin{aligned} x = F^{-1}(u) &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2b(-\log(1-u) + 70^2 b/2 + 70a)}}{b} \\ &= -r + \sqrt{70^2 + 140r + r^2 - 2b^{-1}\log(1-u)} \end{aligned}$$

gdje je $r = ab^{-1}$.

4. Promatrajte vremensko homogeni Markovljev proces skokova $\{X(t) : t \geq 0\}$ s dva stanja označena s 0 i 1, i prijelaznim stopama $\sigma_{0,1} = \lambda$, $\sigma_{1,0} = \mu$.

   (i) Navedite Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed za vjerojatnost $P_{0,0}(t)$ da je X u stanju 0 u trenutku t, uz dano da kreće iz stanja 0.

   (ii) Pokažite da je $P_{0,0}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$.

(iii) Neka O_t označava ukupni iznos vremena provedenog u stanju 0 do trenutka t, što se može izraziti kao

$$O_t = \int_0^t I_s\,ds, \quad \text{gdje je } I_s = \begin{cases} 1 & \text{ako je } X_s = 0 \\ 0 & \text{ako je } X_s \neq 0\,. \end{cases}$$

Pomoću rezultata dijela (ii), izvedite izraz za $\mathbb{E}[O_t \,|\, X(0) = 0]$, očekivano vrijeme boravka u stanju 0 do trenutka t za vremenski neprekidan Markovljev lanac s dva stanja koji kreće iz stanja 0.

(iv) Napišite očekivano vrijeme boravka u stanju 1 do trenutka t za vremenski neprekidan Markovljev lanac s dva stanja koji kreće iz stanja 0.

(v) Shema zdravstvenog osiguranja označava članove kao "zdrav" (stanje 0) ili "bolestan" (stanje 1). Kada su u stanju 0, članovi plaćaju doprinos po stopi α; kada su u stanju 1, članovi primaju naknadu po stopi β. Troškovi iznose konstantu γ po članu po jedinici vremena.

(a) Objasnite kako se može iskoristiti model za izračun α pomoću β i γ.

(b) Navedite pretpostavke koje ste napravili pri primjeni modela.

(c) Diskutirajte da li je vjerojatno da te pretpostavke vrijede u praksi.

Rješenje:

(i) U matričnom obliku Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed glase $P'(t) = P(t)A$ gdje je

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

generatorska matrica. Specijalno je $P'_{00}(t) = P_{00}(t)(-\lambda) + P_{01}(t)\mu$, odnosno $P'_{00}(t) = \mu P_{01}(t) - \lambda P_{00}(t)$.

(ii) Vrijedi $P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t)$, te se jednadžba u (i) može napisati kao $P'_{00}(t) = \mu(1 - P_{00}(t)) - \lambda P_{00}(t) = -(\mu + \lambda)P_{00}(t) + \mu$. Direktno se provjeri da funkcija

$$t \mapsto \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\, e^{-(\lambda+\mu)t}$$

zadovoljava jednadžbu, i početni uvjet $P_{00}(0) = 1$.

(iii) Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[O_t \,|\, X(0)=0] &= \mathbb{E}[\int_0^t 1_{(X(s)=0)}\, ds \,|\, X(0)=0] \\
&= \int_0^t \mathbb{E}[1_{(X(s)=0)} \,|\, X(0)=0]\, ds \\
&= \int_0^t \mathbb{P}[X(s)=0 \,|\, X(0)=0]\, ds \\
&= \int_0^t P_{00}(s)\, ds \\
&= \int_0^t (\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)s})\, ds \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\, t + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}(1-e^{-(\lambda+\mu)t})
\end{aligned}
$$

(iv) Očekivano vrijeme jednako je t minus očekivano vrijeme boravka u stanju 0. Dakle, traženo očekivano vrijeme jednako je

$$
\begin{aligned}
t - \mathbb{E}[O_t \,|\, X(0)=0] &= t - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\, t + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}(1-e^{-(\lambda+\mu)s}) \right) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, t + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}(1-e^{-(\lambda+\mu)t})\,.
\end{aligned}
$$

(v) (a) Uz pretpostavku daje zdrav ušao u shemu zdravstvenog osiguranja, osiguranik će uplatiti prosječan doprinos do trenutka t u iznosu $\alpha\mathbb{E}[O_t \,|\, X(0)=0]$. Prosječni troškovi osiguravajućeg društva do trenutka t iznose $\beta(t - \mathbb{E}[O_t \,|\, X(0)=0]) + \gamma t$. Izjednačavanjem slijedi:

$$
\begin{aligned}
&\alpha \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\, t + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}(1-e^{-(\lambda+\mu)t}) \right) = \\
&\qquad = \beta\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, t + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}(1-e^{-(\lambda+\mu)t}) + \gamma t\,.
\end{aligned}
$$

Podijelimo s t i pustimo $t \to \infty$ da bismo dobili jednakost nakon dovoljno proteklog vremena. Slijedi:

$$
\alpha\mu = \beta\lambda + \gamma(\lambda+\mu)\,.
$$

(b) Pretpostavka je da je model vremenski homogen, t.j., da stope ozdravljenja i oboljenja ne ovise o dobi.

(c) To sigurno neće biti ispunjeno za pojedinog člana. Međutim, ako shema uključuje velik broj članova, te ako je dobni profil članstva konstantan (zbog ulaska novih članova u shemu i "izlaska" starih), model bi mogao biti razumna aproksimacija.

POGLAVLJE 5

1. (i) Izvedite izraze za ρ_1 i ρ_2, autokorelacijsku funkciju od X za razmake 1 i 2, u slučaju kada je X stacionarni proces koji zadovoljava rekurziju:

$$X_t = \alpha X_{t-1} + e_t + \beta e_{t-1}\,,$$

gdje je $\{e_t\,:\, t = 1, 2, \dots\}$ niz nekoreliranih slučajnih varijabli s očekivanjem 0 i varijancom σ^2.

(ii) Rezultati mjesečnih prodaja kompanije, korigirani za trend i sezonski faktor, pokazuju uzoračku autokorelacijsku funkciju za razmake 1 i 2, $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.4$. Metodom momenata nađite procjenitelje za α i β modela (i).

Rješenje:

(i) Prvo uočimo da je $\mathrm{Cov}(e_t, e_t) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(e_t, e_{t-1}) = 0$, te $\mathrm{Cov}(X_{t-1}, e_t) = \mathrm{Cov}(X_{t-2}, e_t) = 0$ i (zbog kauzalnosti). Prvo računamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t, e_t) &= \alpha\mathrm{Cov}(X_{t-1}, e_t) + \mathrm{Cov}(e_t, e_t) + \beta\mathrm{Cov}(e_{t-1}, e_t) = \sigma^2\,,\\
\mathrm{Cov}(X_t, e_{t-1}) &= \alpha\mathrm{Cov}(X_{t-1}, e_{t-1}) + \mathrm{Cov}(e_t, e_{t-1}) + \beta\mathrm{Cov}(e_{t-1}, e_{t-1})\\
&= \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2\,.
\end{aligned}$$

Na isti način, upotrebom gornjih izraza, redom računamo:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-2}) = \alpha\gamma_1\\
\gamma_1 &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \alpha\gamma_0 + \beta\sigma^2\\
\gamma_0 &= \mathrm{Cov}(X_t, X_t) = \alpha\gamma_1 + \sigma^2 + \beta(\alpha+\beta)\sigma^2
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem γ_1 u treću jednadžbu, i rješavanjem po γ_0 slijedi

$$\gamma_0 = \frac{1+2\alpha\beta+\beta^2}{1-\alpha^2}\,\sigma^2\,.$$

Zbog $\rho_1 = \gamma_1/\gamma_0$ i $\rho_2 = \gamma_2/\gamma_0$, direktnim računom slijedi:

$$\rho_1 = \frac{(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)}{1+2\alpha\beta+\beta^2}\,,\ \rho_2 = \alpha\rho_1\,.$$

(ii) Parametre α i β dobivamo iz sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} 0.5 &= \frac{(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)}{1+2\alpha\beta+\beta^2} \\ 0.4 &= \alpha\tfrac{(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)}{1+2\alpha\beta+\beta^2} \end{aligned}$$

Odmah slijedi da je $\alpha = r_2/r_1 = 0.8$. Uvrštavamo u prvu jednadžbu, te dobijemo kvadratnu jednažbu za β: $0.3\beta^2+0.8\beta+0.3 = 0$. Rješenja su $\beta = -1.4 \pm \sqrt{0.96} = -1.4 \pm 0.98$. Rješenje s negativnim korijenom otpada, jer ne daje invertibilan proces.

2. (i) Objasnite ukratko što se misli pod *linearnim trendom* i *sezonalnom varijacijom* za niz opaženih vrijednosti $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ koje tvore vremenski niz.

(ii) Opišite operaciju koja se može primjeniti na podatke da bi se uklonila aditivna sezonalna varijacija perioda 2.

(iii) Izvedite odgovarajuću operaciju koja primjenjena na proces

$$X_t = \exp(a + bt + Z_t)\,,$$

daje stacionaran proces Y_t. Ovdje je Z $I(1)$ proces.

Rješenje:

(iii) Logaritmiranjem procesa X_t dobivamo proces $V_t = a + bt + Z_t$ konstantne varijabilnosti. Diferenciranje procesa Z_t uklanja istovremeno linearni trend $a+bt$, i efekt integriranja kod Z_t. Dakle, $Y_t = \nabla \log X_t = b + \nabla Z_t$.

3. Razmatrajte autoregresivan proces drugog reda

$$Y_t = -2\alpha Y_{t-1} + \alpha^2 Y_{t-2} + Z_t$$

gdje je $\{Z_t\}$ centriran bijeli šum s $\mathrm{Var}(Z_t) = \sigma^2$.

(i) Odredite skup vrijednosti od α za koje proces Y može biti stacionaran.

(ii) Izvedite autokovarijance γ_1 i γ_2 od Y pomoću α i σ.

Rješenje:

(i) Jednadžbu koja definira proces Y možemo pomoću operatora pomaka unatrag zapisati kao

$$(1 + 2\alpha B - \alpha^2 B^2) Y = Z\,.$$

Da bi proces Y bio stacionaran (i kauzalan), nul-točke pripadajućeg polinoma $1+2\alpha x-\alpha^2 x^2$ moraju ležati izvan jediničnog kruga. Korijeni jednadžbe su $\frac{1}{\alpha}(1 \pm \sqrt{2})$. Dakle, mora vrijediti

$$\frac{\sqrt{2}+1}{|\alpha|} > 1 \quad \text{i} \quad \frac{\sqrt{2}-1}{|\alpha|} > 1\,,$$

t.j., $|\alpha| < \sqrt{2} - 1$.

Napomena: doputimo li nekauzalna stacionarna rješenja, tada korijeni karakteristične jednadžbe ne smiju biti na jediničnoj kružnici, što povlači $|\alpha| \neq \sqrt{2} - 1$ i $|\alpha| \neq \sqrt{2} + 1$.

(ii) Prvo uočimo da vrijedi $\mathrm{Cov}(Y_{t-1}, Z_t) = \mathrm{Cov}(Y_{t-0}, Z_t) = 0$ i $\mathrm{Cov}(Y_t, Z_t) = \sigma^2$. "Množimo" jednadžbu $Y_t = -2\alpha Y_{t-1} + \alpha^2 Y_{t-2} + Z_t$ redom s Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2} i računamo kovarijance. Slijedi:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= -2\alpha\gamma_1 + \alpha^2\gamma_2 + \sigma^2 \\
\gamma_1 &= -2\alpha\gamma_0 + \alpha^2\gamma_1 \\
\gamma_2 &= -2\alpha\gamma_1 + \alpha^2\gamma_0
\end{aligned}$$

Rješavanjem ovog linearnog sustava dobivamo:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{(1-\alpha^2)\sigma^2}{(1+\alpha^2)(1-6\alpha^2+\alpha^4)}\\ \gamma_1 &= \frac{-2\alpha\sigma^2}{(1+\alpha^2)(1-6\alpha^2+\alpha^4)}\\ \gamma_2 &= \frac{(5\alpha^2-\alpha^4)\sigma^2}{(1+\alpha^2)(1-6\alpha^2+\alpha^4)}\end{aligned}$$

4. Klijent želi modelirati ponašanje stohastičkog procesa $\{X_t : t \geq 0\}$ koji predstavlja srednji godišnji povrat za određenu klasu imovine. Nakon većeg broja opažanja, klijent je zaključio da je $\text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = 0.7$ i $\text{Corr}(X_t, X_{t-2}) = 0.5$. On misli da će jedan od sljedeća dva modela

   I: $X_t = \mu + 0.7(X_{t-1} - \mu) + 0.5(X_{t-2} - \mu) + e_t$

   II: $X_t = \mu + e_t + 0.7e_{t-1} + 0.5e_{t-2}$

   biti bolji, ali ne može odlučiti koji. Simulirao je oba procesa od vremena $t = 1$ do vremena $t = 200$, ali nije dobio očekivane rezultate, pa traži Vaš savjet.

   (i) (a) Izložite prikladnu metodu simulacije autoregresije drugog reda, uz pretpostavku da Vam je na raspolaganju pouzdan niz $\{u_k : k \geq 0\}$ pseudoslučajnih brojeva uniformno distribuiranih na $[0, 1]$.

   (b) Objasnite zašto bi moglo biti poželjno osigurati da se niz $\{u_k : k \geq 0\}$ može ponovno upotrijebiti ukoliko bi to bilo potrebno.

   (ii) Navedite zašto niti jedan od predloženih modela nije prikladan.

   (iii) (a) Izvedite autokorelacije ρ_1 i ρ_2 za razmake 1 i 2 autoregresivnog procesa drugog reda

   $$X_t = \mu + \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \alpha_2(X_{t-2} - \mu) + e_t\,.$$

   (b) Nađite vrijednosti parametara α_1 i α_2 koji bi dali odgovarajući $AR(2)$ model za $\{X_t : t = 0, 1, 2, \ldots\}$.

   Rješenje:

(i) (a) Autoregresija drugog reda je proces oblika $X_t = \mu + aX_{t-1} + bX_{t-2} + e_t$ gdje je e_t bijeli šum. Za simulaciju procesa X_t najvažnije je simulirati bijeli šum. Uz odabir dviju početnih vrijednosti procesa X, ostale vrijednosti procesa računaju se rekurzivno. Budući da nije specificirana distribucija bijelog šuma, kanonski izbor je Gaussov bijeli šum, t.j., niz nekoreliranih centriranih normalnih slučajnih varijabli s nekom varijancom σ^2. Niz normalnih slučajnih brojeva možemo dobiti iz niza u_t jednom od metoda opisanom u Poglavlju 7. Na primjer,

$$\begin{aligned} e_{2t} &= \sigma\sqrt{-2\log u_{2t}}\,\sin(2\pi u_{2t+1})\,, \\ e_{2t+1} &= \sigma\sqrt{-2\log u_{2t}}\,\cos(2\pi u_{2t+1})\,. \end{aligned}$$

(b) Mogućnost upotrebe istog niza pseudoslučajnih brojeva važna je prilikom usporedbe dva ili više simuliranih modela.

(ii) Za niti jedan od predloženih modela ne vrijedi $\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-1}) = 0.7$ i $\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-2}) = 0.5$

(iii) (a) Stavimo $Y_t = X_t - \mu$. Isto kao u prethodnom zadatku slijedi sustav jednadžbi za autokovarijacije γ_0, γ_1 i γ_2:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma^2 \\ \gamma_1 &= \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_1 \\ \gamma_2 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_0 \end{aligned}$$

Dijeljenjem druge i treće jednadžbe s γ_0, slijedi da autokorelacije $\rho_1 = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t-1})$ i $\rho_2 = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t-2})$ zadovoljavaju sustav:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\rho_2 \\ \rho_2 &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi:

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\,, \quad \rho_2 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2\,.$$

(b) Rješavamo sustav:

$$0.7 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\,, \quad 0.5 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2\,.$$

Slijedi: $\alpha_1 = \frac{35}{51}$, $\alpha_2 = \frac{1}{51}$.

5. Porodica se složila s ciljanom potrošnjom, Y_n, u godini n, na način da je godišnji porast ciljane potrošnje proporcionalan porastu dohotka porodice u proteklој godini. Pretpostavlja se da je stvarna potrošnja kroz godinu, X_n, vezana uz ciljanu potrošnju, ali da uključuje element slučajnosti i faktor koji uzima u obzir težnju porodice za većim trošenjem. Pretpostavlja se da dohodak porodice, I_n, raste po konstantnoj godišnjoj stopi prije nego što se uračuna slučajnost.

   Glava porodice vjeruje da sljedeće tri jednadžbe predstavljaju odgovarajuću reprezentaciju gornje informacije:

$$\begin{aligned} Y_n &= Y_{n-1} + \beta(I_{n-1} - I_{n-2}) \\ X_n &= (1+\pi)Y_n + e_n^{(1)} \\ I_n &= (1+\alpha)I_{n-1} + e_n^{(2)} \end{aligned}$$

   gdje je $\{(e_n^{(1)}, e_n^{(2)}) : n = 1, 2, \dots\}$ niz centriranih dvodimenzionalnih normalnih slučajnih varijabli, a α, β i π su pozitivni parametri (sa $\beta < 1$).

   (i) Izrazite prvu jednadžbu pomoću operatora pomaka unatrag, B, i izvedite da između Y_n i I_{n-1} postoji linearni odnos.

   (ii) Pokažite da je proces $\mathbf{Z}_n = (X_n, I_n)$ multivarijatni autoregresivni proces prvog reda.

   (iii) Obrazložite da li je $\{I_n : n \geq 1\}$ stacionarni vremenski niz, te odredite da li je $\{\mathbf{Z}_n : n \geq 1\}$ $I(0)$, $I(1)$ ili niti jedan od ta dva.

   (iv) Nađite procjenitelj za α minimizirajući veličinu $\sum_{t=2}^{n}(e_t^{(2)})^2$.

   (v) Glava porodice želi provesti simulaciju ne bi li ustanovio neće li težnja za prekomjernim trošenjem rezultirati negativnom neto uštedom. Pretpostavlja se da je $\mathrm{Var}(e_n^{(1)}) = \sigma_1^2$, $\mathrm{Var}(e_n^{(2)}) = \sigma_2^2$ i $\mathrm{Cov}(e_n^{(1)}, e_n^{(2)}) = \rho\sigma_1\sigma_2$, gdje je $-1 < \rho < 1$,

(a) Opišite metodu simulacije opažanja para $(e_n^{(1)}, e_n^{(2)})$ počevši od dva uniformno distribuirana pseudoslučajna broja U_1, U_2.

(b) Opišite ulogu analize osjetljivosti u donošenju zaključaka iz simulacije.

(vi) Predložen je alternativan model koji uključuje logaritme veličina I_n, X_n i Y_n:

$$\begin{aligned}\log Y_n &= \log Y_{n-1} + \log I_{n-1} - \log I_{n-2} \\ \log X_n &= \theta + \log Y_n + e_n^{(1)} \\ \log I_n &= \phi + \log I_{n-1} + e_n^{(2)}\end{aligned}$$

Diskutirajte da li je ovaj model prikladniji od originalnog modela.

Rješenje:

(i) Vrijedi $(1-B)Y_n = (1-B)\beta I_{n-1}$, otkud slijedi $Y_n = \beta I_{n-1} + c$ gdje je c konstanta.

(ii) Iz (i), $X_n = (1+\pi)\beta I_{n-1} + c + e_n^{(1)}$, te je

$$\begin{pmatrix} X_n \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (1+\pi)\beta \\ 0 & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ I_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n^{(1)n} \\ e_n^{(2)n} \end{pmatrix}$$

Dakle, Z_n je bivarijatni autoregresivni proces prvog reda.

(iii) Budući da se rješenje karakteristične jednadžbe $1/(1+\alpha)$ nalazi unutar jedinične kružnice, I_n nije (po strogoj definiciji) stacionarni vremenski proces. Iz $I_n = (1+\alpha)I_{n-1} + e_n^{(2)}$ slijedi $I_n - I_{n-1} = \alpha I_{n-1} + e_n^{(2)}$, odnosno $\nabla I = \alpha BI + e^{(2)}$. Buduq'ci da je BI pomaknut proces I, to niti on nije stacionaran, pa zato ni ∇I. Dakle, I_n nije niti $I(0)$ ni $I(1)$ proces, pa to isto vrijedi i za Z_n.

(iv) Vrijedi: $\sum_{t=2}^n (e_t^{(2)})^2 = \sum_{t=2}^n [I_t - (1+\alpha)I_{t-1}]^2$. Deriviranjem po α i izjednačavanjem s nulom slijedi:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=2}^n I_{t-1}(I_t - I_{t-1})}{\sum_{t=2}^n I_{t-1}^2}\,.$$

(v) Simulacija koreliranih normalnih slučajnih varijabli objašnjena je u Poglavlju 7, isto kao i uloga analize osjetljivosti.

POGLAVLJE 6

1. Evolucija cijene dionica S_t modelirana je pomoću

$$S_t = e^{\mu t + \sigma B_t},$$

gdje B_t označava standardno Brownovo gibanje, μ i σ su fiksni parametri, i početna vrijednost dionice je $S_0 = 1$.

(i) Izvedite izraz za $\mathbb{P}(S_t \leq x)$.

(ii) Izvedite izraze za medijan od S_t i očekivanje od S_t.

(iii) (a) Odredite izraz za uvjetno očekivanje $\mathbb{E}(S_t \,|\, \mathcal{F}_s)$ gdje je $s < t$ i gdje $\{\mathcal{F}_s : s \geq 0\}$ označava filtraciju generiranu procesom S.

(b) Nađite uvjete na μ i σ uz koje je proces $\{S_t : t \geq 0\}$ martingal.

(c) Obrazložite da li bi dionica bila dobra za dugoročnu investiciju u tom slučaju.

Rješenje:

(i)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_t \leq x) &= \mathbb{P}(\log S_t \leq \log x) \\
&= \mathbb{P}(\mu t + \sigma B_t \leq \log x) \\
&= \mathbb{P}\left(B_t \leq \frac{\log x - \mu t}{\sigma}\right) \\
&= (\text{zbog } B_t \sim N(0,t) = \sqrt{t}N(0,1)) \\
&= \mathbb{P}\left(N(0,1) \leq \frac{\log x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

(ii) Medijan od S_t je broj m takav da je $\mathbb{P}(S_t \leq m) = \mathbb{P}(S_t \geq m) = 1/2$. Zbog (i), i zbog $\Phi(0) = 1/2$, slijedi da za medijan m vrijedi $\log m - \mu t = 0$. Dakle $m = e^{\mu t}$.

Vrijedi: $\mathbb{E}[S_t] = e^{\mu t}\mathbb{E}[e^{\sigma B_t}]$. Budući da je $\sigma B_t \sim N(0, t\sigma^2)$, rezultat o očekivanju lognormalne distribucije kaže da je $\mathbb{E}[e^{\sigma B_t}] = e^{t\sigma^2/2}$. Dakle, $\mathbb{E}[S_t] = e^{t(\mu+\sigma^2/2)}$.

(iii) (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t \,|\, \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{\mu t + \sigma B_t} \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= e^{\mu t}\mathbb{E}[e^{\sigma B_s} e^{\sigma(B_t - B_s)} \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= e^{\mu t} e^{\sigma B_s}\mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)}] \\
&= e^{\mu t} e^{\sigma B_s} e^{\sigma^2 (t-s)/2} \\
&= S_s e^{(\mu + \sigma^2/2)(t-s)} .
\end{aligned}$$

(b) S_t je martingal, ako vrijedi $\mathbb{E}[S_t \,|\, \mathcal{F}_s] = S_s$. Dakle, drugi faktor u (a) mora biti jednak 1, t.j., $\mu + \sigma^2/2 = 0$.

(c) U tom slučaju bi cijena dionica bila jednaka $S_t = e^{-(\sigma^2/2)t + \sigma B_t}$. Vrijedi, $\mathbb{E}[S_t] = 1$ za svaki t, što ne sugerira naročito povoljnu investiciju. Gledamo li medijan, vidimo da je jednak $e^{-t\sigma^2/2}$ što teži prema nuli eksponencijalno brzo (za $t \to \infty$). To jasno pokazuje da je investicija loša. Može se pokazati da vrijedi $\lim_{t\to\infty} S_t = 0$, što jasno govori o lošoj investiciji. U stvari, $\log S_t = -(\sigma^2/2)t + \sigma B_t$ je Brownovo gibanje sa negativnim driftom, pa teži u $-\infty$ za $t \to \infty$.

2. Analitičar želi upotrijebiti model zasnovan an Brownovom gibanju, ali koji ne postaje prevelik i pozitivan za velike t. Predložen model je

$$X_t = B_t e^{-cB_t} ,$$

gdje je B_t standardno Brownovo gibanje, a c je pozitivna konstanta.

(i) Provjerite da postoji gornja ograda koju X nikada ne prelazi.

(ii) Upotrijebite Itôvu lemu i nađite dX_t.

(iii) Navedite, s kratkim objašnjenjem, da li je predložen model odgovarajući za proces koji je asimptotski stacionaran.

Rješenje:

(i) Stavimo $f(x) = xe^{-cx}$ za $x \in \mathbb{R}$. Deriviramo: $f'(x) = e^{-cx} - cxe^{-cx} = (1-cx)e^{-cx}$. Stacionarna točka je $x = 1/c$. Druga derivacija je $f''(x) = -ce^{-cx} - (1-cx)ce^{-cx}$, što izračunato u $x = 1/c$ daje $f''(1/c) = -ce^{-1} < 0$. Dakle, f u $1/c$ ima maksimum jednak $f(1/c) = e^{-1}/c$.
Zaključujemo da je $X_t \leq e^{-1}/c$ za sve $t \geq 0$.

(ii) Računamo za $f(x) = xe^{-cx}$

$$\begin{aligned} dX_t &= df(B_t) \\ &= f'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)\,dt \\ &= (1 - cB_t)e^{-cB_t}\,dB_t + (\frac{c^2}{2}B_t - c)e^{-cB_t}\,dt \end{aligned}$$

(iii) Proces X nije asimptotski stacionaran, jer za velike negativne vrijednosti od B, X poprima jako velike negativne vrijednosti.

3. (i) Navedite Lévyjev teorem dekompozicije koji opisuje sastavne dijelove Lévyjevog procesa.

(ii) Neka je $M_t = \exp(-2ab + 2bB_t - 2b^2t)$, gdje je B_t standardno Brownovo gibanje, i gdje su a i b pozitvne konstante. Definirajte T kao prvi trenutak kada je $M_t = 1$, uz definiciju $T = \infty$ ako M nikada ne pogodi točku 1. Možete pretpostaviti da $M_t \to 0$ kada $t \to \infty$, tako da

$$M_T = \begin{cases} 1 & \text{ako } M \text{ pogodi } 1 \\ 0 & \text{ako } M \text{ nikada ne pogodi } 1 \end{cases}$$

(a) Pokažite da je M martingal i da je $0 \le M_t \le 1$ za sve $0 \le t \le T$.

(b) Navedite teorem o opcionalnom zaustavljanju, te ga primjenite za dokaz da je vjerojatnost da Brownovo gibanje ikada pogodi pravac $a + bt$ jednaka e^{-2ab}.

(iii) Osigurateljno društvo dobiva dohodak od premije po konstantnoj stopi c po jedinici vremena. Štete dolaze po Poissonovom procesu s intenzitetom λ; može se pretpostaviti da je svaka šteta fiksnog iznosa k. Neka X_t označava ukupnu vrijednost svih šteta do trenutka t, i označite sa S_t višak kompanije u trenutku t,

$$S_t = s_0 + ct - X_t\,,$$

gdje je s_0 pozitivna konstanta. Pokažite da je $\{S_t : t \ge 0\}$ Lévyjev proces, te identificirajte komponente Lévyjeve dekompozicije od S.

(iv) Izračunajte očekivanje i varijancu od S_t.

Rješenje:

(i) $X_t = x + \mu t + \sigma B_t + N_t$ gdje je B_t standardno Brownovo gibanje, a N_t je Lévyjev proces skokova.

(ii) (a) Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathcal{F}_s] &= e^{-2ab-2b^2t}\mathbb{E}[e^{2bB_t} \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= e^{-2ab-2b^2t}e^{2bB_s}\mathbb{E}[e^{2b(B_t-B_s)}] \\
&= e^{-2ab-2b^2t}e^{2bB_s}e^{2b^2(t-s)} \\
&= e^{-2ab+2bB_s-2b^2s} = M_s
\end{aligned}$$

Očito je $M_t \geq 0$. Zbog $M_0 = e^{-2ab} \leq 1$, slijedi da je $M_t \leq 1$ prije prvog pogađanja točke 1, t.j., za $0 \leq t \leq T$.

(b) Ako je martingal omeđen, ili ako je vrijeme zaustavljanja omeđeno, tada vrijedi $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$. Teorem primjenimo na zaustavljem martingal M^T. Slijedi $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$, odnosno $\mathbb{E}[M_T, T < \infty] = e^{-2ab}$. Zbog $M_T = 1$ na $\{T < \infty\}$, lijeva strana je jednaka $\mathbb{P}[T < \infty]$. Dakle, $\mathbb{P}[T < \infty] = e^{-2ab}$. Međutim, $M_t = 1$ ekvivalentno je (nakon kraćeg računa) s $B_t = a + bt$, što znači da je $T = \inf\{t : \, B_t = a + bt\}$.

(iii) Ukupne štete tvore složeni Poissonov proces: $X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Z_j = \sum_{j=1}^{N_t} k = kN_t$, budući da su pojedinačni iznosi šteta $Z_j = k$. Znamo da je složeni Poissonov proces Lévyjev proces. Sada je $S_t = s_0 + ct - kN_t$ zbroj konstante s_0, determinističkog drifta ct i Lévyjevog procesa skokova X_t, pa je prema tome i sam Lévyjev proces. Brownovske komponente nema.

(iv)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t] &= s_0 + ct + k\mathbb{E}[N_t] = s_0 + ct - k\lambda t \\
\mathrm{Var}[S_t] &= k^2\mathrm{Var}[N_t] = k^2\lambda t
\end{aligned}$$

4. (i) Navedite Itôvu lemu u obliku u kojem se primjenjuje na stohastički proces $\{X_t : \, t \geq 0\}$ i funkciju $f(X_t)$ koja ne ovisi eksplicitno o t.

(ii) Upotrijebite Itôvu lemu sa $f(x) = x^4$ za izrčun stohastičkog diferencijala $d(B_t^4)$, gdje je B_t standardno Brownovo gibanje.

(iii) Izrazite Itôv integral $\int_0^t B_s^3\,dB_s$ pomoću B_t i običnog integrala koji uključuje B_s.

Rješenje:

(i) Itôva lema kaže da akoje $dX_t = Y_t\,dB_t + Z_t\,dt$, tada je

$$df(X_t) = f'(X_t)Y_t\,dB_t + (f'(X_t) + 1/2 f''(X_t)Y_t^2)\,dt\,.$$

(ii) $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$. Slijedi:

$$d(B_t^4) = 4B_t^3\,dB_t + 6B_t^2\,dt\,.$$

(iii) Napišemo li (ii) u integralnom obliku $B_t^4 = 4\int_0^t B_s^3\,dB_s + 6\int_0^t B_s^2\,ds$, slijedi da je

$$\int_0^t B_s^3\,dB_s = \frac{B_t^4}{4} - \frac{3}{2}\int_0^t B_s^2\,ds\,.$$

5. Pretpostavimo da evolucija cijene neke imovine slijedi lognormalni model $\log(S_t) = Y_t = y + \mu t + \alpha B_t$ gdje B_t označava standardno Brownovo gibanje, a μ je negativan drift. Imovina će biti likvidirana u vremenu zaustavljanja $T_a = \inf\{t : Y_t = a\}$ kada se njena vrijednost svodi na e^a, gdje je a broj manji od y. Promatrajte sada $V_t = \exp(uY_t - c(u)t)$.

   (i) Izvedite uvjet na $c(u)$ uz koji je $\{V_t : t \geq 0\}$ martingal.

   (ii) Navedite teorem o opcionalnom zaustavljanju i objasnite kako se koristi.

   (iii) Izvedite funkciju izvodnicu momenata $f(y, v) = \mathbb{E}[e^{-vT_a} \mid Y_0 = y]$ vremena bankrota za pozitivan v primjenom teorema o opcionalnom zaustavljanju na martingal V_t.

   Rješenje:

   (i) Da bi $V_t = \exp(uY_t - c(u)t)$ bio martingal, mora vrijediti $\mathbb{E}[V_t \mid \mathcal{F}_s] = V_s$ za sve $s < t$. Za filtraciju $(\mathcal{F}_t)$ možemo uzeti prirodnu filtraciju

Brownovog gibanja B_t. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V_t \,|\, \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{uY_t - c(u)t} \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= e^{-c(u)t}\mathbb{E}[e^{u(y+\mu t+\alpha B_t)} \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= e^{-c(u)t}e^{u(y+\mu t)}e^{u\alpha B_s}\mathbb{E}[e^{u\alpha(B_t-B_s)} \,|\, \mathcal{F}_s] \\
&= e^{-c(u)t}e^{u(y+\mu t)}e^{u\alpha B_s}\mathbb{E}[e^{u\alpha(B_t-B_s)}] \\
&= e^{-c(u)t}e^{u(y+\mu t)}e^{uB_s}e^{u^2\alpha^2(t-s)/2} \\
&= e^{u(y+\mu s+B_s)-c(u)s}e^{(-c(u)+u\mu+u^2\alpha^2/2)(t-s)} \\
&= V_s e^{(-c(u)+u\mu+u^2\alpha^2/2)(t-s)} \,.
\end{aligned}$$

Da bi desna stran bila jednaka V_s, mora vrijediti $-c(u) + u\mu + u^2\alpha^2/2 = 0$, odnosno, $c(u) = u\mu + u^2\alpha^2/2$.

Jednostavnije, da bi V_t bio martingal, očekivanje od V_t mora biti konstantno i jednako očekivanju od V_0. Dakle, $\mathbb{E}[V_t] = \mathbb{E}[V_0] = V_0 = e^{uy}$. Račun daje gornji izraz za $c(u)$.

(ii) Teorem o opcionalnom zaustavljanju: ako je $(M_t : t \geq 0)$ martingal i ako je T vrijeme zaustavljanja, tada uz određene uvjete (npr., M_t ograničen, ili T ograničeno, ili $M_{t\wedge T}$ ograničen) vrijedi

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0] \,.$$

Teorem služi za računanje očekivanja funkcija od T (npr., funkcija izvodnica momenata od T), ili za računanje očekivanja od M_T, odnosno odgovarajućih posljedica.

(iii) Stavimo $c(u) = u\mu + u^2\alpha^2/2$. Tada je $V_t = \exp(uY_t - c(u)t)$ martingal s početnom vrijednošću $V_0 = e^{uy}$. Računamo upotrebom teorema o opcionalnom zaustavljanju:

$$\begin{aligned}
e^{uy} &= \mathbb{E}[V_{T_a}] \\
&= \mathbb{E}[e^{uY_{T_a} - c(u)T_a}] \\
&= e^{ua}\mathbb{E}[e^{-c(u)T_a}] \,.
\end{aligned}$$

Slijedi: $\mathbb{E}[e^{-c(u)T_a}] = e^{u(y-a)}$. Da bismo izračunali $\mathbb{E}[e^{-vT_a}]$, riješimo jednadžbu $c(u) = v$ po u. Rješenja od $u\mu + u^2\alpha^2/2 = v$ su

$$u_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2\alpha^2 v}}{\alpha^2} \,.$$

Tvrdimo da pozitivno rješenje otpada. Jedan mogući argument je da u tom slučaju nisu ispunjene pretpostavke teorema o opcionalnom zaustavljanju. Drugi argument je da za je $\lim_{v\to\infty} \mathbb{E}[e^{-vT_a}] = 0$, što nije ispunjeno za pozitivno rješenje. Dakle:

$$\mathbb{E}[e^{-vT_a}] = \exp\left\{(y-a)\frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\alpha^2 v}}{\alpha^2}\right\}.$$

POGLAVLJE 7

1. (i) Pokažite da slučajna varijabla

$$X = -\frac{1}{4}\log(U)$$

ima eksponencijalnu distribuciju s očekivanjem $1/4$ kada je U uniformno distribuirana na $(0,1)$.

(ii) (a) Objasnite kako se gornja činjenica može upotrijebiti za simuliranje trajektorije Poissonovog procesa s parametrom 4.

(b) Izvedite metodu za simuliranje Poissonove slučajne varijable s očekivanjem 4.

(iii) Opišite alternativnu metodu generiranja Poissonove slučajne varijable s očekivanjem 4 zasnovane na (kumulativnoj) funkciji distribucije.

(iv) Obrazložite koja bi od dviju metoda (ii) i (iii) bila efikasnija ako treba simulirati velik broj Poissonovih slučajnih varijabli s očekivanjem 4.

Rješenje:

(i)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \le x] &= \mathbb{P}[-(1/4)\log(U) \le x] = \mathbb{P}[\log(U) \ge 4x] \\
&= \mathbb{P}[U \ge e^{-4x}] = 1 - e^{-4x}
\end{aligned}$$

što je funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable s očekivanjem $1/4$.

(ii) (a) Vremena čekanja kod Poissonovog procesa s parametrom (intenzitetom) 4 su nezavisne i eksponencijalno distribuirana s parametrom 4. Simuliramo niz slučajnih brojeva $U_1, U_2, \ldots$. Računamo $X_j = -(1/4)\log(U_j)$. Zbrajamo: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Poissonov proces $N(t)$ jednak je najvećem indeksu n takvom da je $S_n \leq t$.

(b) Distribucija Poissonove slučajne varijable s paramterom 4 jednaka je distribuciji od $N(1)$. Dakle, dovoljno je u (a) uzeti $t = 1$.

(iii) Generira se slučajan broj u iz unifromne distribucije. Neka je n najveći nenegativan cijeli broj takav da je $F(n) \leq u$. Poissonovu slučajnu varijablu simuliramo s n.

(iv) Efikasnija je metoda iz (iii), jer za svaku realizaciju Poissonove slučajne varijable potreban nam je samo jedan slučajan broj.

MJEŠOVITI ZADACI

1. Standardni Ornstein-Uhlenbeckov proces može se definirati kao stacionaran centrirani Gaussov proces $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ s autokovarijacijskom funkcijom danom s

$$\mathrm{Cov}(U_s, U_t) = \frac{\tau^2}{2\theta}\, e^{-\theta|t-s|} \quad (s, t \in \mathbb{R})\,.$$

(i) Pokažite da je proces $\{U_n : n = 1, 2, \ldots\}$, dobiven opažanjem procesa U samo u cjelobrojnim vremenima, autoregresija prvog reda.

(ii) Izvedite izraze za parametre α i σ^2 autoregresije pomoću θ i τ^2.

Rješenje:

(i) Proces $(U_n : n \geq 1)$ je Gaussov i stacionaran, te je stoga u potpunosti određen svojim očekivanjem (koje je 0) i autokovarijacijskom funkcijom. Vrijedi:

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(U_n, U_{n-k}) = \frac{\tau^2}{2\theta}\, e^{-\theta k}\,, \quad k > 0\,,$$

pa je autokorelacijska funkcija procesa U_n jednaka $\rho_k = e^{-\theta k}$, $k \geq 0$.

(ii) Za $AR(1)$ proces vrijedi $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$ i $\rho_k = \alpha^k$. Dakle mora vrijediti:

$$\alpha = e^{-\theta}, \quad \sigma^2 = (1 - e^{-2\theta})\frac{\tau^2}{2\theta}.$$

2. Neka je X_n autoregresivni vremenski niz visoke frekvencije modeliran sa:

$$X_{n+1} = (1-\alpha)X_n + \theta + \tau e_n,$$

gdje je $e_n = \pm 1$ s jednakom vjerojatnošću, a α, θ, τ su konstantni parametri. Analitičar želi istražiti da li se taj niz može aproksimirati nekom vremenski neprekidnom difuzijom, t.j., $X_n \approx Y_{nh}$, gdje Y_t zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dY_t = \mu(Y_t)\,dt + dB_t$$

i B_t označava standardno Brownovo gibanje.

(i) Navedite očekivanje i varijancu od $dY_t = Y_{t+h} - Y_t$, prirasta procesa Y_t na malom vremenskom intervalu veličine h, uvjetno na $Y_t = y$.

(ii) Izračunajte očekivanje i varijancu prirasta $X_{n+1} - X_n$ autoregresije, uvjetno na $X_n = y$.

(iii) Izjednačavajući prve i druge momente prirasta u (i) i (ii), nađite izraz za drift $\mu(y)$ aproksimirajuće difuzije u obliku koji ne uključuje vremenski prirast h.

(iv) Navedite uvjet uz koji je aproksimirajući proces u (iii) Brownovo gibanje s driftom.

(v) Navedite uvjet uz koji je aproksimirajući proces u (iii) Ornstein-Uhlenbeckov proces.

Rješenje:

(i)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(dY_t \,|\, Y_t = y) &= \mathbb{E}(Y_{t+h} \,|\, Y_t = y) = \mu(y)h + o(h) \\
\mathrm{Var}(dY_t \,|\, Y_t = y) &= \mathrm{Var}(Y_{t+h} - Y_t \,|\, Y_t = y) = h + o(h) \quad (\sigma = 1)
\end{aligned}$$

(ii) $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid X_n = y) = \theta - \alpha y$, $\mathrm{Var}(X_{n+1} - X_n \mid X_n = y) = \tau^2$

(iii) Zbog $X_{n+1} - X_n \approx Y_{nh+h} - Y_{nh}$, vrijedi

$$\mu(y)h = \theta - \alpha y \;\text{ i }\; h = \tau^2 \quad \Longrightarrow \quad \mu(y) = \frac{\theta - \alpha y}{\tau^2}$$

(iv) Kod Brownovog gibanja s driftom, $\mu(y)$ ne ovisi o y, što je moguće samo ako je $\alpha = 0$.

(v) Ornstein-Uhlenbeckov proces ima drift oblika $\mu(y) = -\gamma y$ za neki $\gamma > 0$. Uspoređujući s (iii), slijedi da je $\theta = 0$ (i $\gamma = \alpha$).