PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

29. 9. 2003.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 60
Broj zadataka: 6
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

1.

(i) Proces $W(t)$ definiran je sa $W(t) = -4B(kt)$, gdje je $B(t)$ standardno Brownovo gibanje.

(a) Izračunajte vrijednost od k za koju $W(t)$ ima isto očekivanje i kovarijacijsku funkciju kao i $B(t)$.

(b) Dokažite da je za tu vrijednost od k, W standardno Brownovo gibanje.

[4]

(ii) Navedite Itôvu lemu. [2]

(iii) Pomoću Itôve leme izračunajte $\exp[2B(t) - 2t]$, te zaključite da je taj proces martingal. [4]

[Ukupno 10 bodova]

2. Osiguratelj motornih vozila radi po sustavu bonusa s četiri nivoa. Postotak osnovne premije koju plaća osiguratelj na svakom nivou je kako slijedi:

Nivo	*% naplaćene premije*
4	100
3	80
2	60
1	40

Osiguranici se kreću po nivoima ovisno o broju šteta u protekloj godini. Za svakog osiguranika, broj godišnjih šteta ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem 0.2.
Za osiguranike na nivoima 2, 3, i 4 na početku protekle godine:

- ako nije bilo štete tokom protekle godine, osiguranik se pomiče za jedan nivo nadolje, na primjer, sa nivoa 4 na nivo 3 (osim onih koji su bili na nivou 1 na početku godine i koji ostaju na nivou 1)

- ako je postojala jedna šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče za jedan nivo na gore (osim onih koji su bili na nivou 4 na početku godine i koji ostaju na nivou 4)

- ako su postojale dvije ili više šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče dva nivoa prema gore (osim onih koji su bili na nivou 4 na početku godine i koji ostaju na nivou 4, i onih koji su bili na nivou 3 i koji se pomiču na nivo 4)

(i) Uz pretpostavku da svi osiguranici obnavaljaju svoje police, odredite prijelaznu matricu za ovaj sustav bonusa (zaokružite na tri decimale), te nacrtajte graf pripadnog Markovljevog lanca. [3]

(ii) Osiguranik je na nivou 2 tokom prve godine police. Uz pretpostavku da se polica obnavlja, izračunajte vjerojatnost da će na početku treće godine osiguranik biti na nivou 1. [2]

(iii) (a) Navedite uvjete uz koje vjerojatnost da se osiguranik nalazi u određenom stanju nakon n godina konvergira kada $n \to \infty$ prema nekoj graničnoj vrijednosti nezavisno od početnog stanja.

(b) Provjerite da su ti uvjeti zadovoljeni u gornjem primjeru.

(c) Izračunajte graničnu (asimptotsku) vjerojatnost da će osiguranik biti u stanju 1.

[5]

[Ukupno 10 bodova]

3. U jednostavnom diskretno-vremenskom modelu cijene dionice, pretpostavlja se da je promjena cijene u trenutku t, X_t, nezavisna od svega što se dogodilo prije trenutka t, te da ima distribuciju:

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{s vjerojatnosti } p \\ -1 & \text{s vjerojatnosti } q \\ 0 & \text{s vjerojatnosti } r = 1 - p - q \end{cases}$$

gdje su $p, q, r > 0$.
Neka je $S_0 = m$ početna cijena dionice (m je pozitivan cijeli broj), te neka je $S_n = S_0 + \sum_{t=1}^{n} X_t$ cijena nakon n vremenskih trenutaka. Definiramo:

$$Y_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}.$$

(i) Pokažite da je

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_t}\right] = 1, \quad \text{za sve } t\,.$$

[1]

(ii) Pokažite da je $\{Y_n : n \geq 0\}$ martingal, te da je za svaki prirodan broj n,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \left(\frac{q}{p}\right)^m \,.$$

[3]

(iii) Neka je T prvo vrijeme u kojem cijena dionice dostigne bilo 0 bilo N, gdje je N prirodan broj veći od m.

(a) Pokažite da je $|Y_n| \leq C$ za $n \leq T$, za neku konstantu $C > 0$.

(b) Napišite izraz za $\mathbb{E}(Y_T)$.

[3]

(iv) Uz pretpostavku $p \neq q$, izračunajte vjerojatnost da cijena dionice prije dostigne 0 nego N, tj., izračunajte $\mathbb{P}(Y_T = 0 \mid S_0 = m)$. [2]

[Ukupno 10 bodova]

4.

(i) Dana je slučajna varijabla U uniformno distribuirana na $[0, 1]$. Pokažite da nenegativna slučajna varijabla Y definirana formulom

$$Y = -\frac{1}{\theta}\ln(1-U)\,, \quad \theta > 0\,,$$

ima funkciju gustoće

$$h(x) = \theta e^{-\theta x}\,, \quad x > 0\,.$$

[3]

(ii) Potreban je niz simulacija iz funkcije gustoće

$$f(x) = k(\theta)\frac{e^{-\theta x}}{1+x}, \quad x > 0,$$

gdje je θ nenegativan parametar, a $k(\theta)$ konstanta takva da je integral od $f(x)$ jednak jedan ($k(\theta)$ ne ovisi o x).

(a) Opišite metodu prihvaćanja-odbijanja za simuliranje pseudoslučajnih brojeva.

(b) Primijenite metodu prihvaćanja-odbijanja na danu funkciju gustoće $f(x)$.

(c) Pomoću θ i $k(\theta)$ izvedite izraz za očekivani broj pseudoslučajnih brojeva potrebnih za generiranje jednog pseudoslučajnog broja iz gustoće f.

Uputa: Označimo li sa Y slučajnu varijablu s funkcijom gustoće $h(x)$, tada je je u Core Reading pokazano da je $\mathbb{P}[U \leq g(y)] = C^{-1}$ gdje je C konstanta koja se pojavljuje u metodi prihvaćanja-odbijanja.

[7]

[Ukupno 10 bodova]

5. Shema naknade za onesposobljenost modelirana je vremenski neprekidnim Markovljevim procesom skokova sa stanjima A (aktivan), P (privremeno nesposoban), T (trajno nesposoban) i M (mrtav). Prijelazne stope su kako slijedi:

$$\begin{array}{lll} A \longrightarrow P: \ 3\lambda & P \longrightarrow A: \ 5\lambda & T \longrightarrow M: \ 2\alpha \\ A \longrightarrow T: \ \lambda & P \longrightarrow T: \ 2\lambda & \\ A \longrightarrow M: \ \alpha & P \longrightarrow M: \ \alpha & \end{array}$$

(i) Napišite generatorsku matricu procesa. [2]

(ii) Izračunajte vjerojatnost da proces koji počinje u stanju A ne posjeti stanja P i T do trenutka t. [3]

(iii) Napišite matrični oblik Kolmogorovljevih diferencijalnih jednadžbi unatrag, te ga upotrijebite za izvod diferencijalne jednadžbe za $p_{TM}(t)$, vjerojatnosti da će član sheme u stanju T u trenutku 0 biti u stanju M u trenutku t. [2]

(iv) Riješite jednadžbu za $p_{TM}(t)$, vjerojatnost da će osiguranik, početno trajno nesposoban, biti mrtav do vremena t. [3]

[Ukupno 10 bodova]

6. Razmatrajte autoregresivan proces drugog reda

$$Y_t = -0.9Y_{t-1} - 0.8Y_{t-2} + Z_t$$

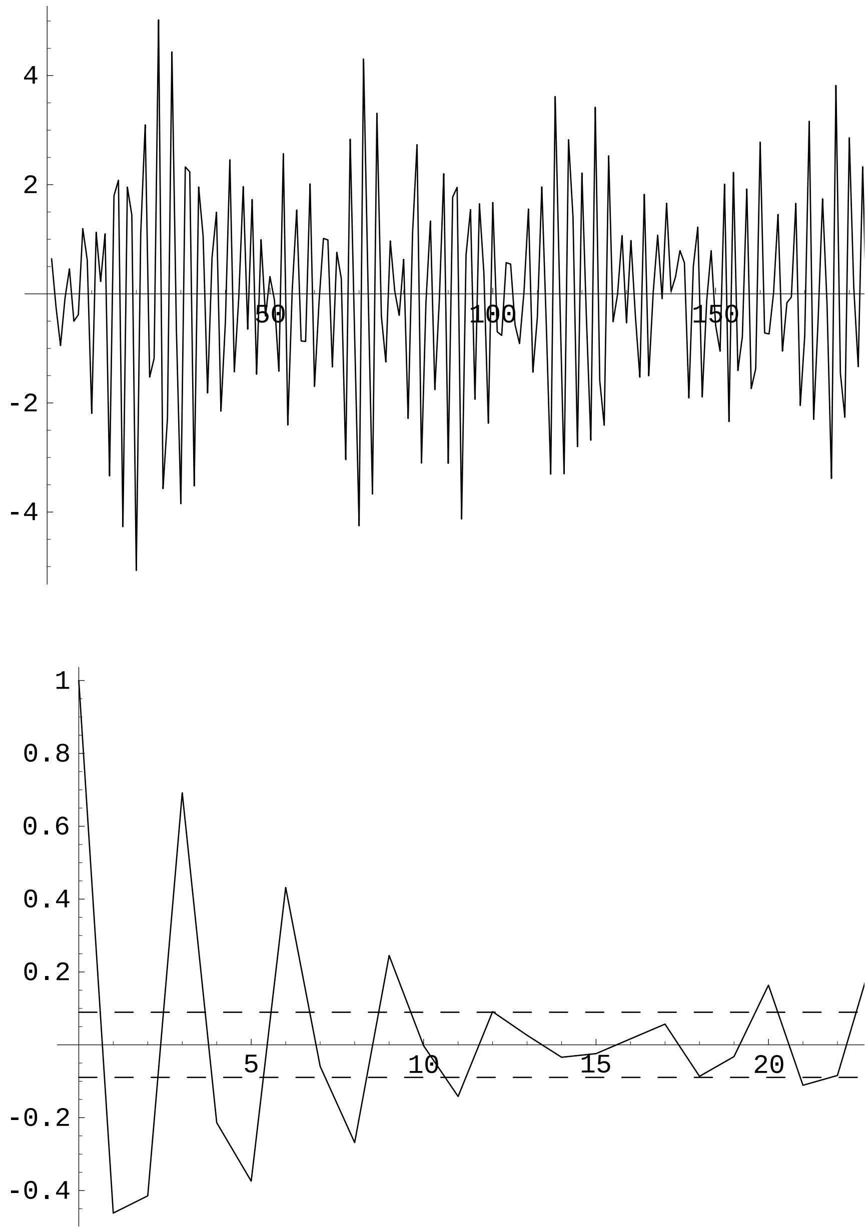
gdje je $\{Z_t\}$ centriran bijeli šum s $\mathrm{Var}(Z_t) = 1$.

(i) Ispitajte da li proces Y može biti stacionaran. [2]

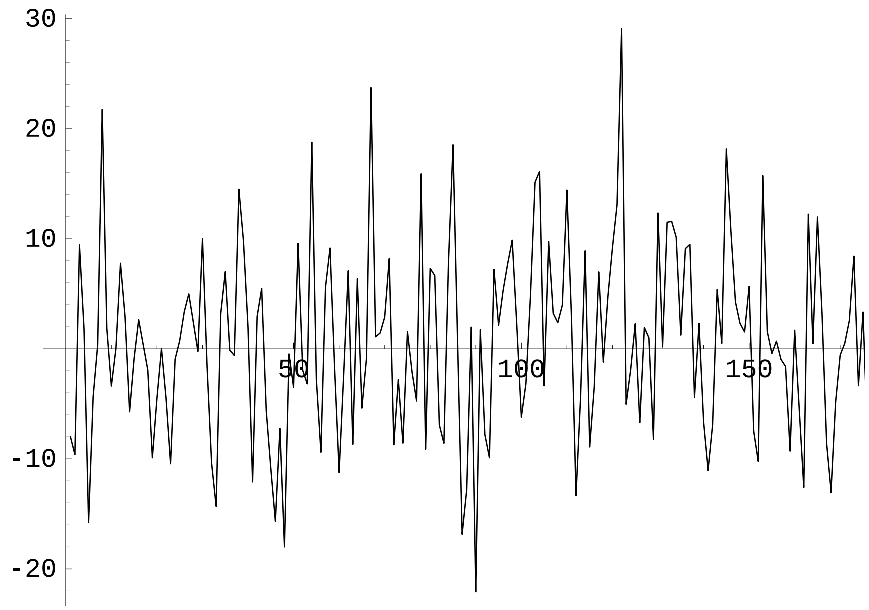
(ii) Izračunajte autokorelacijsku funkciju od Y za razmake 1 i 2 (t.j., izračunajte ρ_1 i ρ_2). [5]

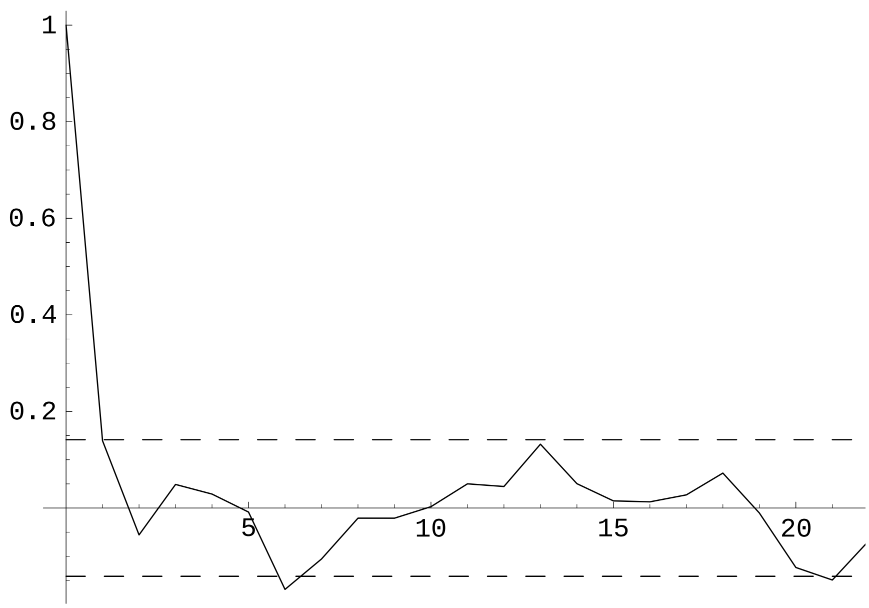
(iii) Na slikama 1 i 2 dane su realizacije i uzoračke autokorelacijske funkcije dva vremenska niza. Koji od ta dva niza je vjerojatnija realizacija AR(2) procesa Y? Objasnite zašto? [3]

[Ukupno 10 bodova]



Slika 1:





Slika 2:

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

29. 9. 2003.

Rješenja

1.

(i) (a) Prisjetimo se: $\mathbb{E}[B(t)] = 0$, $\mathrm{Cov}(B(s), B(t)) = s$ za $s \le t$. Vrijedi: $\mathbb{E}[W(t)] = -4\mathbb{E}[B(kt)] = 0$ bez obzira na k, te za $s \le t$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(W(s), W(t) &= \mathrm{Cov}(-4B(ks), -4B(kt)) \\ &= 16\,\mathrm{Cov}(B(ks), B(kt)) = 16ks\,. \end{aligned}$$

Stoga mora vrijediti $16ks = s$, otkud $k = 1/16$.

(b) Jedan način da se provjeri da je za $k = 1/16$, $W(t)$ standardno Brownvo gibanje je taj da se uoči da je W Gaussovski proces s očekivanjem i kovarijacijskom funkcijom kao i standardno Brownovo gibanje. Drugi način je da se provjeri nezavisnost i stacionarnost prirasta, te izračuna distribucija prirasta $W(t) - W(s) = -4B(t/16) + 4B(s/16)$. Distribucija zadnjeg izraza jednaka je distribuciji od $-4B((t-s)/16)$, a ta je $N(0, t-s)$.

(ii) Neka je X_t, $t \ge 0$, oblika

$$dX_t = Y_t\,dB_t + Z_t\,dt\,,$$

gdje je B_t standardno Brownovo gibanje, te neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna; tada je

$$df(X_t) = f'(X_t)Y_t\,dB_t + [f'(X_t)Z_t + \frac{1}{2}f''(X_t)Y_t^2]\,dt\,.$$

(iii) Itôvu lemu primjenjujemo na proces zadan sa $dX_t = 2dB_t - 2dt$ (t.j., $Y_t = 2$, $Z_t = -2$) i funkciju $f(x) = \exp(x)$:

$$\begin{aligned} df(X_t) &= 2f'(X_t)\,dB_t + [-2f'(X_t) + \frac{1}{2}\,4f''(X_t)]\,dt \\ &= 2\exp(2B_t - 2t)\,dB_t + [-2\exp(2B_t - 2t) + 2\exp(2B_t - 2t)]\,dt \\ &= 2\exp(2B_t - 2t)\,dB_t\,. \end{aligned}$$

Dakle, $\exp(2B_t - 2t) = \int_0^t \exp(2B_s - 2s)\,dB_s$ što je stohastički integral po Brownovom gibanju, dakle martingal.

2.

(i) Označimo $p_i = \mathbb{P}(i \text{ šteta tokom protekle godine}) = \frac{0.2}{i!}\, e^{-0.2}$. Tada je (na tri decimale):

$$\begin{aligned} p_0 &= e^{-0.2} = 0.819 \\ p_1 &= 0.2e^{-0.2} = 0.164 \\ p_{\geq 2} &= \mathbb{P}(2 \text{ ili više šteta}) = 1 - p_0 - p_1 = 0.017 \end{aligned}$$

Prijelazna matrica je

$$P = \begin{pmatrix} 0.819 & 0.164 & 0.017 & 0 \\ 0.819 & 0 & 0.164 & 0.017 \\ 0 & 0.819 & 0 & 0.181 \\ 0 & 0 & 0.819 & 0.181 \end{pmatrix}$$

(ii) Jedini način da osiguranik koji je na nivou 2 u prvoj godini bude na nivou 1 na početku treće godine je da ni u prvoj niti u drugoj godini nema štetu. Vjerojatnost toga je $p_0^2 = 0.891^2 = 0.671$. Isti rezultat se dobije računanjem elementa P_{21}^2 kvadrata prijelazne matrice.

(iii) (a) Dovoljni uvjeti su da je prostor stanja konačan, te da je Markovljev lanac ireducibilan i aperiodičan (Rezultat 4, Core Reading, 103, Markovljevi lanci).

(b) Lanac očito ima konačno mnogo stanja (četiri). Budući da sva stanja komuniciraju (iz svakog stanja se nakon konačno korako može doći u svako drugo stanje), lanac je ireducibilan. Nadalje, $p_{11} = 0.819$, pa je period stanja 1 jednak jedan. Zbog ireducibilnosti, sva stanja imaju period 1, t.j., lanac je aperiodičan.

(c) Granična distribucija jednaka je stacionarnoj distribuciji $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ koja se dobije rješavanjem sustava $\pi = \pi P$. Taj sustav jednadžbi je

$$\begin{array}{rclcccccc} \pi_1 &=& 0.819\pi_1 &+& 0.819\pi_2 & & & & \\ \pi_2 &=& 0.164\pi_1 &+& &+& 0.819\pi_3 & & \\ \pi_3 &=& 0.017\pi_1 &+& 0.0164\pi_2 &+& &+& 0.819\pi_4 \\ \pi_4 &=& &+& 0.017\pi_2 &+& 0.181\pi_3 &+& 0.181\pi_4 \end{array}$$

Sukscesivnim rješavanjem iz prve, druge i treće jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= 0.221\pi_1\\ \pi_3 &= 0.070\pi_1\\ \pi_4 &= 0.021\pi_1\end{aligned}$$

Odavde i iz $\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1$ slijedi $\pi_1=0.762$.

3.

(i)

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_t}\right]=\left(\frac{q}{p}\right)^{1}p+\left(\frac{q}{p}\right)^{-1}q+\left(\frac{q}{p}\right)^{0}r=q+p+r=1\,.$$

(ii) Neka je $\mathcal{F}_n$ filtracija generirana s (X_n) (preciznije, $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,X_2,\ldots,X_n)$). Tada imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n+X_{n+1}}\,|\,\mathcal{F}_n\right)\\ &= Y_n\,\mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\,|\,\mathcal{F}_n\right)\\ &= Y_n\,\mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right)=Y_n\end{aligned}$$

po (i). Slijedi:

$$\mathbb{E}(Y_n)=\mathbb{E}(Y_0)=\left(\frac{q}{p}\right)^{m}.$$

(iii) (a) Uočimo da je za $n\le T$, $0\le S_n\le N$. Zato je za $p\le q$, $1=(q/p)^0\le Y_n\le (q/p)^N$, dok je za $q\le p$, $0\le Y_n\le 1$ (sve za $n\le T$).

(b) Po teoremu o opcionalnom zaustavljanju (primjenjenom na ograničen zaustavljen martingal $Y_{n\wedge T}$) vrijedi

$$\mathbb{E}(Y_T)=\mathbb{E}(Y_0)=\left(\frac{q}{p}\right)^{m}.$$

(iv) Zbog (iii) vrijedi:

$$\begin{aligned}\left(\frac{q}{p}\right)^m &= \mathbb{E}\left(\frac{q}{p}\right)^T \\ &= \mathbb{P}(S_T = 0 \,|\, Y_0 = m)\left(\frac{q}{p}\right)^0 + (1 - \mathbb{P}(S_T = 0 \,|\, Y_0 = m))\left(\frac{q}{p}\right)^N\end{aligned}$$

Riješimo po $\mathbb{P}(S_T = 0 \,|\, Y_0 = m)$. Slijedi:

$$\mathbb{P}(S_T = 0 \,|\, Y_0 = m) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

4.

(i) Računamo $\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(-\ln(1-U)/\theta \leq x) = \mathbb{P}(1 - U \leq e^{-\theta x}) = \mathbb{P}(U \leq 1 - e^{-\theta x}) = 1 - e^{-\theta x}$ što je funkcija distribucije eksponencijalna slučajne varijable s parametrom θ. Funkciju gustoće $h(x)$ dobijemo deriviranjem po x.

(ii) (a) Da bismo metodom prihvaćanja i odbijanja generirali slučajni broj iz funkcije gustoće $f(x)$ prvo moramo reprezentirati $f(x)$ kao

$$f(x) = Ch(x)g(x)\,,$$

gdje je $C \geq 1$ konstanta, $h(x)$ je jednostavnija vjerojatnosna gustoća, i $0 < g(x) < 1$. Uočimo da budući da je $f(x)$ vjerojatnosna gustoća, mora vrijediti $C^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)g(x)\,dx$. Nakon što je pronađena odgovarajuća reprezentacija za $f(x)$, možemo koristiti sljedeći algoritam.

1. Generirati slučajna broj u iz uniformne distribucije na $[0, 1]$.
2. Generirati slučajni broj y iz distribucije s gustoćom $h(x)$.
3. Ako je $u > g(y)$ ići na korak 1, dok ako je $u \leq g(y)$ vratiti $x = y$.

(b) Napišimo $f(x)$ u obliku

$$f(x) = \frac{k(\theta)}{\theta}\,\frac{1}{1+x}\,\theta e^{-\theta x}\,,$$

i stavimo $C = k(\theta)/\theta$, $g(x) = 1/(1+x)$ i $h(x) = \theta e^{-\theta x}$. Tada je $h(x)$ funkcija gustoće, a funkcija g zadovoljava $0 < g(x) < 1$. Još treba provjeriti da je konstanta $C = k(\theta)/\theta \geq 1$. Budući da je $f(x)$ vjerojatnosna funkcija gustoće, vrijedi:

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_0^\infty k(\theta)\frac{e^{-\theta x}}{1+x}\,dx \\
&\leq \int_0^\infty k(\theta)e^{-\theta x}\,dx \\
&= \frac{k(\theta)}{\theta}\int_0^\infty \theta e^{-\theta x}\,dx \\
&= \frac{k(\theta)}{\theta}
\end{aligned}
$$

(c) Po danoj uputi, $\mathbb{P}[U \leq g(Y)] = C^{-1} = \theta/k(\theta)$. Očekivani broj ponanvljana koraka 1 i 2 da bi se dogodilo $u \leq g(y)$ je stoga recipročna vrijednost te vjerojatnosti, t.j., $k(\theta)/\theta$. U svakom takvom ponavljanju, simuliraju se dva pseudoslučajna broja. Zato je očekivani broj generiranih pesudoslučajnih brojeva jednak $2k(\theta)/\theta$.

5.

(i) Generatorska matrica jednaka je

$$
A = \begin{pmatrix} -4\lambda-\alpha & 3\lambda & \lambda & \alpha \\ 5\lambda & -7\lambda-\alpha & 2\lambda & \alpha \\ 0 & 0 & -2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

(ii) Označimo sa B događaj da proces koji počinje u stanju A ne posjeti stanja P i T do trenutka t. Označimo sa T_0 prvo vrijeme zadržavanja (u stanju A). Događaj B će se dogoditi ukoliko proces do trenutka t nije izašao iz stanja A (T.j., $T_0 > t$), ili je izašao i otišao u stanje M (t.j., $T_0 \leq t$ i $X_{T_0} = M$). Slijedi:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[B] &= \mathbb{P}[B, T_0 > t] + \mathbb{P}[B, T_0 \leq t] \\
&= \mathbb{P}[T_0 > t] + \mathbb{P}[T_0 \leq t, X_{T_0} = M] \\
&= e^{-(4\lambda+\alpha)t} + \int_0^t (4\lambda+\alpha)e^{-(4\lambda+\alpha)s}\frac{\alpha}{4\lambda+\alpha}\,ds \\
&= e^{-(4\lambda+\alpha)t} + (1-e^{-(4\lambda+\alpha)t})\frac{\alpha}{4\lambda+\alpha}
\end{aligned}
$$

(iii) Matrični oblik Kolmogorovljevih jednadžbi unatrag je

$$P'(t) = AP(t)\,.$$

Odavde izlazi $p'_{TM}(t) = -2\alpha p_{TM}(t) + 2\alpha p_{MM}(t)$, odnosno

$$p'_{TM}(t) = -2\alpha p_{TM}(t) + 2\alpha\,.$$

(iv) Stavimo $p(t) = p_{TM}(t)$. Rješenje homogene jednadžbe $p'(t) = -2\alpha p(t)$ je $p(t) = Ce^{-2\alpha t}$. Rješenje nehomogene jednadžbe tražimo metodom varijacije konstanti: $p(t) = C(t)e^{-2\alpha t}$. Uvrštavanjem slijedi diferencijalna jednadžba za $C(t)$: $C'(t) = 2\alpha e^{2\alpha t}$, čije je rješenje $C(t) = e^{2\alpha t} + C$. Dakle, $p(t) = (e^{2\alpha t} + C)e^{-2\alpha t} = 1 + Ce^{-2\alpha t}$. Iz početnog uvjeta $p(0) = 0$ slijedi $C = -1$, i konačno $p(t) = 1 - e^{-2\alpha t}$.

6.

(i) Da bi proces bio stacionaran, nužno je da korijeni karakterističnog polinoma $\phi(\lambda)$ leže izvan jediničnog kruga u kompleksnoj ravnini. Za $AR(2)$ proces oblika $Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-2} = Z_t$, karakteristični polinom ima oblik $\phi(\lambda) = 1 - \alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda^2$. U našem slučaju $\alpha_1 = -0.9$, $\alpha_2 = -0.8$, pa je $\phi(\lambda) = 1 + 0.9\lambda + 0.8\lambda^2$. Nul-točke tog polinoma su

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0.9 + i\sqrt{2.39}}{1.6}$$

i jednostavno se vidi da leže izvan jediničnog kruga.

(ii) Uvedimo standardnu oznaku $\gamma_k = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k})$. Zbog centriranosti procesa Y, slijedi $\gamma_k = \mathbb{E}(Y_t Y_{t-k})$. Zbog nezavisnoti Y_{t-1} i Y_{t-2} sa Z_t slijedi da je $\mathbb{E}(Y_t Z_t) = \mathbb{E}(Z_t^2) = 1$. Sada množimo jednadžbu za Y_t redom s Y_t, Y_{t-1} i Y_{t-2}, te računamo očekivanja. Zbog nezavisnosti Y_{t-1} i Y_{t-2} sa Z_t slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_t^2) &= -0.8\mathbb{E}(Y_{t-1}Y_t) - 0.9\mathbb{E}(Y_{t-2}Y_t) + \mathbb{E}(Z_t Y_t) \\
\mathbb{E}(Y_t Y_{t-1}) &= -0.8\mathbb{E}(Y_{t-1}^2) - 0.9\mathbb{E}(Y_{t-1}Y_{t-2}) \\
\mathbb{E}(Y_t Y_{t-2}) &= -0.8\mathbb{E}(Y_{t-1}Y_{t-2}) - 0.9\mathbb{E}(Y_{t-2}^2)
\end{aligned}$$

To daje sustav jednadžbi za γ_0, γ_1 i γ_2:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= -0.9\gamma_1 - 0.8\gamma_2 + 1 \\
\gamma_1 &= -0.9\gamma_0 - 0.8\gamma_1 \\
\gamma_2 &= -0.9\gamma_1 - 0.8\gamma_0
\end{aligned}$$

Rješavanjem iz druge i treće jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -0.5\gamma_0 \\ \gamma_2 &= -0.35\gamma_0\end{aligned}$$

Zbog $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ dobivamo $\rho_1 = -0.5$ i $\rho_2 = -0.35$.

(iii) Ukoliko je točno riješen dio (ii), uzoračka autokorelacija na Slici 1 pokazuje da su vrijednosti za razmake 1 i 2 blizu teoretskih vrijednosti -0.5 i -0.35 (što nije slučaj za Sliku 2). Ako dio (ii) nije riješavan, možemo zaključivati na sljedeći način: vrijednosti uzoračke autokorelacijske funkcije za model na Slici 2 su za sve razmake veće od 1 blizu nule, što sugerira da realizacija dolazi iz MA modela. Zato je vjerojatnija realizacija AR(2) procesa Y ona sa Slike 1.