PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

# ISPIT

# STOHASTIČKO MODELIRANJE

# 14. 4. 2003.

---

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 60
Broj zadataka: 6
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

**1.** Neka je $\{N(t) : t \geq 0\}$ Poissonov proces s parametrom $\lambda > 0$, te neka je $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ prirodna filtracija pridružena procesu $N$.

(a) Nađite uvjetnu distribuciju od $N(t+s) - N(t)$ uz dano $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0, s > 0$, te pomoću toga izračunajte $\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)} \mid \mathcal{F}_t]$, $\theta > 0$. [3]

(b) Pokažite da je proces

$$M(t) = e^{(1-\theta)\lambda t}\theta^{N(t)}$$

martingal. [3]

(c) Navedite teorem o opcionalnom zaustavljanju. [2]

(d) Za prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, neka je $T_n = \inf\{t \geq 0 : N(t) = n\}$ prvo vrijeme kada Poissonov proces dođe u $n$. Upotrijebite teorem o opcionalnom zaustavljanju na martingal $M(t)$ i pokažite da slučajna varijabla $T_n$ ima gama distribuciju s parametrima $n$ i $1/\lambda$. (Uputa: funkcija izvodnica momenata $\Gamma(n, 1/\lambda)$-distribucije jednaka je $(1 - u/\lambda)^{-n}$). [2]

[Ukupno 10 bodova]

**2.** Članovi sheme naknade za onesposobljenot klasificirani su kao "aktivni" $(A)$, "privremeno onesposobljeni" $(P)$, "trajno onesposobljeni" $(T)$ ili "mrtvi" $(M)$. Članovi dobivaju naknadu kada se nalaze u stanjima $P$ ili $T$. Stanje svakog člana sheme bilježi se jednom godišnje i to 1. veljače svake godine. Ustanovljeno je da se povijest tipičnog člana odvija u vremenu kao diskretno vremenski Markovljev lanac s prijelaznom matricom

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.1 & 0.05 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gdje su stanja po retcima i stupcima poredana kao $A, P, T, M$.

(a) Nacrtajte prijelazni graf Markovljevog lanca i nađite stacionarnu distribuciju. [3]

(b) Izračunajte očekivano trajanje (u godinama) naknade za trajnu onesposobljenost. [2]

(c) Izračunajte vjerojatnost da će početno aktivan član sheme nakon tri godine nakon početka sheme biti privremeno ili trajno onesposbljen. Iskoristite činjenicu da je kvadrat prijelazne matrice jednak

$$\begin{pmatrix} 0.6125 & 0.105 & 0.0875 & 0.195 \\ 0.525 & 0.14 & 0.135 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.64 & 0.36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[2]

(d) Izračunajte vjerojatnost da početno aktivan član sheme neće nikad dobiti bilo kakvu naknadu. [3]

[Ukupno 10 bodova]

**3.** Investitor vjeruje da cijena zlata raste kada je volatilnost na tržištu dionica velika, i pada kada je volatilnost mala. Investitor zaključuje da bi sljedeći model za cijenu zlata $X_t$ bio dobar:

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s \, dB_s + \int_0^t V_s^2 \, ds \,,$$

gdje je $X_0$ početna cijena zlata, $B_t$ je standardno Brownovo gibanje, a $V_t$ je mjera volatilnosti tržišta izračunata iz informacije o cijeni dionica dostupne do trenutka $t$.

(a) Pokažite da je $\mathbb{E}(X_t) \geq X_0$ bez obzira na početnu cijenu zlata $X_0$. [2]

(b) Komentirajte ukratko prikladnost predloženog modela, osvrnuvši se posebno na ponašanje od $X_t$ kada je $V_t$ veliko, odnosno kada je $V_t$ malo. Što možete reći o prikladnosti modela s obzirom na rezultat iz dijela (a)? [2]

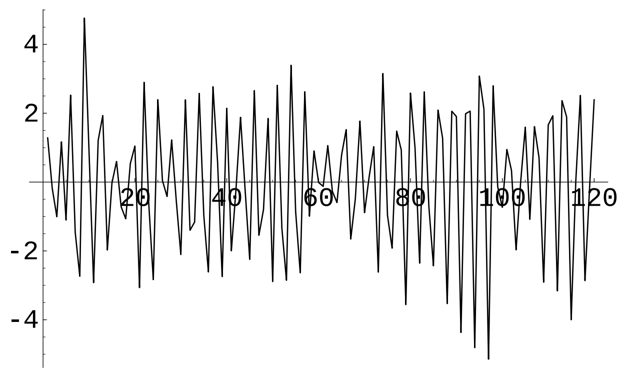
(c) Navedite Itôvu lemu. [2]

(d) Upotrijebite Itôvu lemu i nađite izraz za $dM_t$ gdje je $M_t = e^{-2X_t}$. [3]

(e) Zaključite da je $M_t$ martingal. [1]

[Ukupno 10 bodova]

**4.** Klijent želi predviđati ponašanje vremenskog niza $X_t$ koji predstavlja srednji mjesečni povrat za određenu klasu imovine. Povijesni podaci u prošlih 10 godina pokazuju sljedeću sliku:




Slika 1: Realizacija vremenskog niza

Klijent je čuo da su za analizu potrebne autokorelacijska funkcija uzorka i parcijalna autokorelacijska funkcija uzorka, te ih je točno nacrtao (Slike 2 i 3 na sljedećoj stranici). Ne znajući što dalje, dolazi k Vama po savjet.

(a) Nakon što pogledate grafove autokorelacijske funkcije uzorka i parcijalne autokorelacijske funkcije uzorka, sugerirati klijentu da realizacija dolazi iz modela $AR(2)$. Objasnite zašto je ta sugestija dobra. [2]

(b) Klijent se nakon nekog vremena vraća, te Vam kaže da je na osnovu izračunatih vrijednosti autokorelacijske funkcije uzorka za razmake 1 i 2, $\widehat{\rho}_1 = -0.48$ i $\widehat{\rho}_2 = -0.40$, zaključio da je traženi $AR(2)$ model jednak

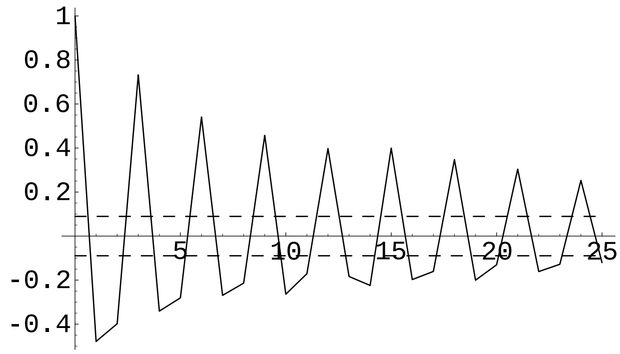
$$X_t = -0.48X_{t-1} - 0.40X_{t-2} + e_t \,.$$

gdje je $e_t$ bijeli šum. Odmah uvjeravate klijenta da su koeficijenti u modelu neispravni. Zašto? [2]

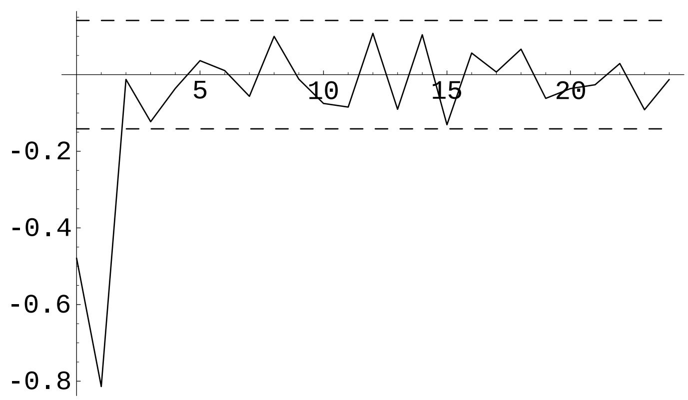
(c) Izvedite autokorelacije $\rho_1$ i $\rho_2$ za razmake 1 i 2 $AR(2)$ procesa

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + e_t \,.$$

[3]




Slika 2: Autokorelacijska funkcija uzorka $\widehat{\rho}_k$




Slika 3: Parcijalna autokorelacijska funkcija uzorka $\widehat{\phi}_k$

(d) Metodom momenata nađite vrijednosti parametara $\alpha_1$ i $\alpha_2$ koji bi Vašem klijentu dali odgovarajući $AR(2)$ model. [3]

[Ukupno 10 bodova]

**5.** Promotrimo sljedeći pojednostavljen model kreditnog rejtinga kompanija u neprekidnom vremenu. Kompanija može imati tri rejtinga, $A$, $B$ i $D$ (default). Mogući prijelazi su kako slijedi:

- iz $A$ u $B$ sa stopom 0.4
- iz $B$ u $A$ sa stopom 0.1
- iz $B$ u $D$ sa stopom 0.3
- iz $D$ je nemoguć prijelaz u neko drugo stanje

(a) Napišite generatorsku matricu, te navedite matrični oblik Kolmogorovljevih jednadžbi unaprijed. [2]

Može se pokazati da je sljedeća prijelazna funkcija rješenje Kolmogorovljevih jednadžbi:

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{-0.2t} + \frac{1}{2}\,e^{-0.6t} & e^{-0.2t} - e^{-0.6t} & 1 - \frac{3}{2}\,e^{-0.2t} + \frac{1}{2}\,e^{-0.6t} \\ \frac{1}{4}\,e^{-0.2t} - \frac{1}{4}\,e^{-0.6t} & \frac{1}{2}\,e^{-0.2t} + \frac{1}{2}\,e^{-0.6t} & 1 - \frac{3}{4}\,e^{-0.2t} + \frac{1}{4}\,e^{-0.6t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Kompanija počinje u stanju $A$. Nađite vrijeme $\tau$ nakon kojeg je vjerojatnije da će kompanija biti u stanju $D$ nego u stanju $A$. [3]

(c) Nađite očekivano vrijeme boravka kompanije u stanju $A$ prije prijelaza u stanje $B$. [2]

(d) Odredite vjerojatnost da kompanija koja počinje u stanju $B$ ne posjeti stanje $A$ do trenutka $t$. [3]

[Ukupno 10 bodova]

**6.**

(a) Opišite tri elementa linearnog kongruentnog generatora, te navedite rekurzivnu relaciju za generiranje niza pseudoslučjanih brojeva. [2]

(b) Prva tri broja dobivena linearnim kongruentim generatorom su 0.550, 0.757 i 0.472. Upotrijebite te brojeve za generiranje tri pseudoslučajna broja iz Pareto distribucije s parametrima $\alpha = 3$ i $\lambda = 1$.
(Gustoća Pareto distribucije je $f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\,, x > 0$.) [4]

(c) Eksponencijalna slučajna varijabla $T$ s parametrom $\lambda$ može se simulirati pomoću formule

$$T = -\frac{1}{\lambda} \log U \,,$$

gdje je $U$ uniformno distribuirana na $[0, 1]$, Objasnite kako se to može iskoristiti za simuliranje trajektorije Markovljevog procesa skokova $\{X_t : t \geq 0\}$ sa dva stanja, $Z$ (zdrav) i $B$ (bolestan), sa prijelaznim stopama $\sigma$ iz $Z$ u $B$, te $\rho$ iz $B$ u $Z$. Pretpostavite $X_0 = Z$. [4]

[Ukupno 10 bodova]

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

# ISPIT

# STOHASTIČKO MODELIRANJE

14. 4. 2003.

## Rješenja

**1.**

(a) Budući da Poissonov proces ima nezavisne priraste, uvjetna distribucija od $N(t+s)-N(t)$ uz dano $\mathcal{F}_t$ jednaka je (bezuvjetnoj) distribuciji od $N(t+s)-N(t)$. Zbog stacionarnosti prirasta Poissonovog procesa distribucija od $N(t+s)-N(t)$ jednaka je distribuciji od $N(s)$ koja je Poissonova s parametrom $\lambda s$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)}\,|\,\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\theta^{N(t+s)-N(t)}\,\theta^{N(t)}\,|\,\mathcal{F}_t] \\
&= \theta^{N(t)}\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)-N(t)}] \\
&= \theta^{N(t)}e^{(\theta-1)\lambda s}\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M(t+s)\,|\,\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[e^{(1-\theta)\lambda(t+s)}\,\theta^{N(t+s)}\,|\,\mathcal{F}_t] \\
&= e^{(1-\theta)\lambda(t+s)}\mathbb{E}[\theta^{N(t+s)}\,|\,\mathcal{F}_t] \\
&= e^{(1-\theta)\lambda(t+s)}e^{(\theta-1)\lambda s}\theta^{N(t)} \\
&= e^{(1-\theta)\lambda t}\theta^{N(t)} \\
&= M(t)
\end{aligned}$$

(c) Neka je $X_t, t \geq 0$ martingal. Za vrijeme zaustavljanja $T$ vrijedi $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ u slučaju da je ispunjena jedna od sljedećih pretpostavki:

(i) $T$ je ograničeno, tj. $T \leq K$ za neku konstantu $K$.

(ii) $X$ je ograničen, tj. $|X_t| \leq K$ za neku konstantu $K$.

(d) Po teoremu o opcionalnom zaustavljanju vrijedi $\mathbb{E}[M(T_n)] = \mathbb{E}[M(0)]$. Zbog $M(0) = 1$ slijedi

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}[M(T_n)] \\
&= \mathbb{E}[e^{(1-\theta)\lambda T_n}\theta^{N(T_n)}] \\
&= \mathbb{E}[e^{(1-\theta)\lambda T_n}\theta^{n}] \quad (\text{zbog } N(T_n) = n) \\
&= \theta^n\mathbb{E}[e^{(1-\theta)\lambda T_n}]
\end{aligned}$$

Stavimo $u = (1-\theta)\lambda$, i riješimo po $\theta$. Dobivamo $\theta = 1-u/\lambda$. Uvrstimo u gornji račun i dobivamo

$$\mathbb{E}[e^{uT_n}] = (1-\frac{u}{\lambda})^{-n}$$

što je funkcija izvodnica momenata $\Gamma(n, 1/\lambda)$-distribucije.

**2.**

(a) Označimo sa $\mathbf{P}$ prijelaznu matricu Markovljevog lanca. Stacionarna distribucija je vektor $\pi = (\pi_A, \pi_P, \pi_T, \pi_M)$ koji zadovoljava $\pi = \pi\mathbf{P}$. Četvrta jednadžba ovog sustava linearnih jedmadžbi glasi:

$$\pi_M = 0.1\pi_A + 0.1\pi_P + 0.2\pi_T + \pi_M\,.$$

Odavde slijedi da je $\pi_A = \pi_P = \pi_T = 0$. Zbog $\pi_A + \pi_P + \pi_T + \pi_M = 1$ vrijedi $\pi_M = 1$. Dakle, stacionarna distribucija je $\pi = (0, 0, 0, 1)$.

(b) Označimo sa $\tau$ trajanje (u godinama) naknade za trajnu onesposobljenost. Računamo distribuciju od $\tau$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau = k] &= \mathbb{P}[\text{član sheme je kroz } k \text{ godina trajno onesposobljen,} \\
&\qquad \text{i u } k+1\text{-voj godini umire }] \\
&= \mathbb{P}[k-1 \text{ uzastopnih prijekaza is stanja } T \text{ u stanje } T, \\
&\qquad \text{te prijelaz iz stanja } T \text{ u stanje } M] \\
&= 0.8^{k-1}\,0.2
\end{aligned}$$

Dakle, $\tau$ ima geometrijsku distribuciju s parametrom 0.2. Slijedi,

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ godina.}$$

(c) Vrijedi:

$$\begin{aligned}
p_{AP}^{(3)} = \mathbf{P}_{AP}^3 &= 0.75 \times 0.105 + 0.1 \times 0.14 = 0.09275 \\
p_{AT}^{(3)} = \mathbf{P}_{AT}^3 &= 0.75 \times 0.0875 + 0.1 \times 0.135 + 0.05 \times 0.64 = 0.111125
\end{aligned}$$

Rješenje je $0.09275 + 0.111125 = 0.203875$.

(d) Neka je $B = \{\text{aktivan član nikada neće dobiti nagradu}\}$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B] &= \mathbb{P}[B, \text{prvi korak u } A] + \mathbb{P}[B, \text{prvi korak u } M] \\
&= \mathbb{P}[\text{prvi korak u } A]\,\mathbb{P}[B \,|\, \text{prvi korak u } A] \\
&+ \mathbb{P}[\text{prvi korak u } M]\,\mathbb{P}[B \,|\, \text{prvi korak u } M] \\
&= 0.75\mathbb{P}[B] + 0.1 \quad \text{(zbog Markovljevog svojstva)}
\end{aligned}$$

Rješavanjem jednadžbe slijedi $\mathbb{P}[B] = 0.4$.

Alternativno rješenje: Vjerojatnost da aktivan član nikada ne dobije naknadu jednaka je vjerojatnosti da aktivan član nikada ne posjeti stanja $P$ i $T$. To će se dogoditi ako član sheme prelazi iz stanja $A$ u stanje $A$ sve dok konačno ne prijeđe u stanje $M$. Vjerojatnost tog događaja je

$$\begin{aligned} & 0.1 + 0.75 \times 0.1 + 0.75^2 \times 0.1 + 0.75^3 \times 0.1 + \cdots \\ = \; & 0.1 \sum_{k=0}^{\infty} 0.75^k \\ = \; & 0.1 \frac{1}{1 - 0.75} \\ = \; & 0.4 \end{aligned}$$

**3.**

(a) Očekivanje stohastičkog integrala $\int_0^t V_s\, dB_s$ jednako je 0. Budući da je $V_s^2 \geq 0$, slijedi da je $\mathbb{E}[\int_0^t V_s^2\, ds] \geq 0$. Zato je

$$\mathbb{E}[X_t] = X_0 + \mathbb{E}[\int_0^t V_s^2]\, ds \geq X_0\,.$$

(b) Vrijedi $dX_t = V_t\, dB_t + V_t^2\, dt$. Kada je volatilnost $V_t$ velika, član $V_t^2\, dt$ utječe na povećanje od $X_t$, što je u skladu s pretpostavkom. Kada je volatilnost $V_t$ mala, jedino što možemo reći je da je promjena cijene zlata, $dX_t$, mala, ali ne možemo zaključiti da je cijena $X_t$ mala.

Slično kao u (a) zaključujemo da za vremena $s \leq t$ vrijedi $\mathbb{E}[X_s] \leq \mathbb{E}[X_t]$, odnosno da očekivana cijena zlata uvijek raste, neovisno o volatilnosti.

Zaključujemo da predloženi model **nije** prikladan.

(c) Neka je $X_t$, $t \geq 0$, oblika

$$dX_t = Y_t\, dB_t + Z_t\, dt\,,$$

gdje je $B_t$ standardno Brownovo gibanje, te neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna; tada je

$$df(X_t) = f'(X_t) Y_t\, dB_t + [f'(X_t) Z_t + \frac{1}{2} f''(X_t) Y_t^2]\, dt\,.$$

(d) Imamo $dX_z = V_t\, dB_t + V_t^2\, dt$. Koristimo Itôvu lemu za $f(x) = e^{-2x}$. Vrijedi $f'(x) = -2e^{-2x}$ i $f''(x) = 4e^{-2x}$. Uz $M_t = f(X_t)$ imamo

$$\begin{aligned} dM_t &= f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, (dX_t)^2 \\ &= -2e^{-2X_t}(V_t\, dB_t + V_t^2\, dt) + \frac{1}{2}\, 4e^{-2X_t} V_t^2\, dt \\ &= -2M_t V_t\, dB_t - 2M_t V_t^2\, dt + 2M_t V_t^2\, dt \\ &= -2M_t V_t\, dB_t \end{aligned}$$

(e) Iz (d) čitamo $M_t = M_0 + \int_0^t M_s V_s\, dB_s$, tj. $M_t$ je stohastički integral, te je zato martingal.

**4.**

(a) Slika 1. sugerira realizaciju stacionarnog vremenskog niza. Box-Jenkinsov pristup identifikaciji modela nalaže provjeru grafova uzoračke autokorelacijske i parcijalne autokorelacijske funkcije. Teorijska parcijalna autokorelacijska funkcija $\phi(k)$ AR($p$) modela je nula za $k > p$. Stoga parcijalna autokorelacijska funkcija uzorka $\hat{\phi}(k)$ treba biti blizu nule za svaki $k > p$. To jest, parcijalna autokorelacijska funkcija uzorka $\hat{\phi}(k)$ treba biti odrezana u nekoj vrijednosti $k = p^*$. Slika 3. sugerira da je $p* = 2$.

(b) Koeficijenti -0.48 i -0.40 su neispravni, jer uz takve koeficijente ne vrijedi $\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-1}) = -0.48$ i $\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-2}) = -0.40$ (vidi dio (c)).

(c) Prvo uočimo da vrijedi $\mathrm{Cov}(X_{t-1}, e_t) = \mathrm{Cov}(X_{t-2}, e_t) = 0$ i $\mathrm{Cov}(X_t, e_t) = \sigma^2$. "Množimo" jednadžbu $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + e_t$ redom s $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}$ i računamo kovarijance. Slijedi:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma^2 \\ \gamma_1 &= \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_1 \\ \gamma_2 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_0 \end{aligned}$$

Dijeljenjem druge i treće jednadžbe s $\gamma_0$, slijedi da autokorelacije $\rho_1 = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t-1})$ i $\rho_2 = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t-2})$ zadovoljavaju sustav:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\rho_2 \\ \rho_2 &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi:

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}, \quad \rho_2 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2 \,.$$

(d) Izjednačavamo teorijske vrijednost $\rho_1$ i $\rho_2$ izračunate u (c) s uzoračkim vrijednostima $\hat{\rho}_1 = -0.48$ i $\hat{\rho}_2 = -0.40$. Slijedi:

$$-0.48 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}, \quad -0.40 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2 \,.$$

Iz prve jednadžbe imamo $\alpha_1 = -0.48(1-\alpha_2)$. Uvrstimo u drugu: slijedi $\alpha_2 \approx -0.82$, otkud $\alpha_1 \approx -0.87$.

**5.**

(a) Generatorska matrica jednaka je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed glase $P'(t) = P(t)\mathbf{A}$.

(b) Tražimo $\tau$ takav da je za $t \geq \tau$, $p_{AD}(t) \geq p_{AA}(t)$. Rješavamo jednadžbu $p_{AD}(\tau) \geq p_{AA}(\tau)$, odnosno

$$1 - \frac{3}{2}\, e^{-0.2\tau} + \frac{1}{2}\, e^{-0.6\tau} = \frac{1}{2}\, e^{-0.2\tau} + \frac{1}{2}\, e^{-0.6\tau}\,.$$

Slijedi: $1/2 = e^{-0.2\tau}$, tj., $\tau = \log 2/0.2 = 3.4657$. Budući da je $p_{AA}(0) = 1$, $\lim_{t\to\infty} p_{AD}(t) = 1$ i rješenje jednadžbe $p_{AD}(\tau) \geq p_{AA}(\tau)$ je jedinstveno, slijedi $p_{AD}(t) \geq p_{AA}(t)$ za sve $t \geq 3.4657$.

(c) Vrijeme boravka u stanju $A$ je eksponencijalno s parametrom 0.4. Zato je očekivano vrijeme boravka u stanju $A$ (prije prijelaza u stanje $B$) jednako $1/0.4 = 2.5$.

(d) Označimo sa $C$ događaj da kompanija koja počinje u stanju $B$ ne posjeti stanje $A$ do trenutka $t$. Označimo sa $T_0$ prvo vrijeme zadržavanja (u stanju $B$). Događaj $C$ će se dogoditi ukoliko proces do trenutka $t$ nije izašao iz stanja $B$ (t.j., $T_0 > t$), ili je izašao i otišao u stanje $D$ (t.j., $T_0 \leq t$ i $X_{T_0} = D$). Slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[C] &= \mathbb{P}[C, T_0 > t] + \mathbb{P}[C, T_0 \leq t] \\
&= \mathbb{P}[T_0 > t] + \mathbb{P}[T_0 \leq t, X_{T_0} = D] \\
&= e^{-0.4\,t} + \int_0^t 0.4 e^{-0.4\,s}\, \frac{0.3}{0.4}\, ds \\
&= e^{-0.4\,t} + \frac{3}{4}(1 - e^{-0.4\,t}) \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-0.4\,t}
\end{aligned}$$

**6.**

(a) Linearni kongruentni generator je specificiran izborom tri pozitivna cijela broja:

$a$, multiplikator;

$c$, prirast;

$m$, modul; $m > a, m > c$

Da bismo dobili željeni niz slučajnih brojeva $x_1, x_2, \dots, x_N$, prvo generiramo niz cijelih brojeva $X_1, X_2, \dots, X_N$ počevši od početne vrijednosti $X_0$ (koja se naziva *sjeme*). Niz cijelih brojeva generiran je upotrebom rekurzivnog pravila

$$X_{n+1} = (aX_n + c)(\text{mod } m), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1\,.$$

Nakon toga, $x_k$ se definira kao $X_k/m$, $k = 1, 2, \dots, N$.

(b) Koristimo metodu inverzne transfornmacije. Funkcija distribucije Pareto distribucije s parametrima $\alpha = 3$ i $\lambda = 1$ jednaka je

$$F(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 .$$

Inverzna funkcija dobije se rješavanjem jednadžbe $u = F(x)$. Slijedi

$$F^{-1}(u) = (1-u)^{-1/3} - 1\,.$$

Za dane vrijednosti pseudoslučajnih brojeva $u_j$, $j = 1, 2, 3$, računamo $x_j = F^{-1}(u_j)$. Slijedi $x_1 = 0.304956$, $x_2 = 0.6025$ i $x_3 = 0.237244$.

(c) Vrijeme čekanja u stanju $Z$ je eksponencijalno s parametrom $\sigma$, a vrijeme čekanja u stanju $B$ je eksponencijalno s parametrom $\rho$. Pomoću dane formula simuliramo pseudoslučajan niz $y_0, y_2, y_4, \dots$ iz eksponencijalne distribucije s parametrom $\sigma$, te pseudoslučajan niz $y_1, y_3, y_5, \dots$ iz eksponencijalne distribucije s parametrom $\rho$. Neka je $t_j = y_0 + y_1 + \cdots + y_j$, $j = 1, 2, \dots$. To su (simulirani) trenuci kada proces mijenja stanje. Za dano vrijeme $t$ nađemo $j$ takav da je $t_{j-1} \leq t < t_j$. Definiramo

$$x_t = \begin{cases} Z, & j \text{ paran} \\ B, & j \text{ neparan} \end{cases}$$