PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

12. 1. 2004.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 60
Broj zadataka: 6
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

1. Neka su $X_1, X_2, X_3, \ldots$ nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable sa $\mathbb{P}(X_1 = +1) = p > 1/2$ i $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p < 1/2$. Neka je $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$, $n \geq 1$, pridružena slučajna šetnja.

(a) Pretpostavite da je
$$M_n := e^{\theta S_n - cn}$$
martingal. Pokažite da tada konstante θ i c zadovoljavaju jednadžbu
$$pe^{2\theta} - e^{\theta + c} + 1 - p = 0\,.$$
[4]

(b) Rješavanjem gornje jednadžbe izrazite θ kao funkciju od c. [2]

(c) Neka je T_1 prvo vrijeme kada S_n pogodi 1, t.j., $T_1 = \min\{n : S_n = 1\}$. Navedite uvjete na c i $\theta(c)$ pod kojima je dozvoljeno primjeniti teorem o opcionalnom zaustavljanju da bi se izračunalo $\mathbb{E}(M_{T_1})$. [2]

(d) Primjenom teorema o opcionalnom zaustavljanju, izračunajte funkciju izvodnicu momenata $\mathbb{E}(e^{-cT_1})$ za $c > 0$. [2]

[Ukupno 10 bodova]

2. Promatrajte vremensko homogeni Markovljev proces skokova $\{X(t) : t \geq 0\}$ s dva stanja označena s 0 i 1, i prijelaznim stopama $\sigma_{0,1} = \lambda$, $\sigma_{1,0} = \mu$.

(a) Navedite Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed za vjerojatnost $P_{0,0}(t)$ da je X u stanju 0 u trenutku t, uz dano da kreće iz stanja 0. [3]

(b) Pokažite da je $P_{0,0}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$. [2]

(c) Neka O_t označava ukupni iznos vremena provedenog u stanju 0 do trenutka t, što se može izraziti kao
$$O_t = \int_0^t I_s\, ds, \quad \text{gdje je } I_s = \begin{cases} 1 & \text{ako je } X_s = 0 \\ 0 & \text{ako je } X_s \neq 0\,. \end{cases}$$
Pomoću rezultata dijela (b), izvedite izraz za $\mathbb{E}[O_t \mid X(0) = 0]$, očekivano vrijeme boravka u stanju 0 do trenutka t za vremenski neprekidan Markovljev lanac s dva stanja koji kreće iz stanja 0. [3]

(d) Shema zdravstvenog osiguranja označava članove kao "zdrav" (stanje 0) ili "bolestan" (stanje 1). Kada su u stanju 0, članovi plaćaju doprinos po stopi α; kada su u stanju 1, članovi primaju naknadu po stopi β. Troškovi iznose konstantu γ po članu po jedinici vremena. Iskoristite gornji model za izračun α pomoću β i γ. [2]

[Ukupno 10 bodova]

3. Klijent želi modelirati ponašanje stohastičkog procesa $\{X_t : t \geq 0\}$ koji predstavlja srednji godišnji povrat za određenu klasu imovine. Nakon većeg broja opažanja, klijent je zaključio da je $\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-1}) = 0.7$ i $\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-2}) = 0.5$. On misli da će jedan od sljedeća dva modela

I: $X_t = \mu + 0.7(X_{t-1} - \mu) + 0.5(X_{t-2} - \mu) + e_t$

II: $X_t = \mu + e_t + 0.7e_{t-1} + 0.5e_{t-2}$

biti bolji, ali ne može odlučiti koji. Simulirao je oba procesa od vremena $t = 1$ do vremena $t = 200$, ali nije dobio očekivane rezultate, pa traži Vaš savjet.

(a) Navedite zašto niti jedan od predloženih modela nije prikladan. [2]

(b) Izvedite autokorelacije ρ_1 i ρ_2 za razmake 1 i 2 autoregresivnog procesa drugog reda

$$X_t = \mu + \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \alpha_2(X_{t-2} - \mu) + e_t\,.$$

[5]

(c) Nađite vrijednosti parametara α_1 i α_2 koji bi dali odgovarajući $AR(2)$ model za $\{X_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$. [3]

[Ukupno 10 bodova]

4.

(a) Definirajte geometrijsko Brownovo gibanje i navedite stohastičku diferencijalnu jednadžbu koju taj stohastički proces zadovoljava. [2]

(b) Navedite Itôvu lemu. [2]

(c) Upotrijebite Itôvu lemu i pokažite da je difuzija

$$X_t = c + e^{-\alpha t}(x_0 - c) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}\, dB_S$$

rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX_t = -\alpha(X_t - c)\, dt + \sigma\, dB_t, \quad X_0 = x_0\,,$$

gdje je B_t standardno Brownovo gibanje. [3]

(d) Provjerite da je asimptotska distribucija difuzije X_t normalna, te nađite očekivanje i varijancu. [3]

[Ukupno 10 bodova]

5.

(a) Opišite tri elementa linearnog kongruentnog generatora, te navedite rekurzivnu relaciju za generiranje niza pseudoslučjanih brojeva. [2]

(b) Prva četiri broja dobivena linearnim kongruentim generatorom su 0.673, 0.675, 0.445 i 0.140. Upotrijebite te brojeve za generiranje četiri pseudoslučajna broja iz standardne normalne distribucije. [3]

(c) Objasnite zašto se eksponencijalna slučajna varijabla T s parametrom λ može se simulirati pomoću formule

$$T = -\frac{1}{\lambda} \log U\,,$$

gdje je U uniformno distribuirana na $[0, 1]$. [3]

(d) Objasnite kako se to može iskoristiti za simuliranje trajektorije Poissonovog procesa s intenzitetom λ. [2]

[Ukupno 10 bodova]

6. Osiguratelj motornih vozila radi po sustavu bonusa s četiri nivoa. Postotak osnovne premije koju plaća osiguratelj na svakom nivou je kako slijedi:

Nivo	*% naplaćene premije*
4	100
3	85
2	70
1	55

Osiguranici se kreću po nivoima ovisno o broju šteta u protekloj godini. Za svakog osiguranika, broj godišnjih šteta ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem 0.3.
Za osiguranike na nivoima 1, 2, 3 i 4 na početku protekle godine:

- ako nije bilo štete tokom protekle godine, osiguranik se pomiče za jedan nivo nadolje (npr., sa nivoa 3 na nivo 2)
- ako je postojala jedna šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče za jedan nivo na gore (osim onih koji su bili na nivou 4 na početku godine i koji ostaju na nivou 4)
- ako su postojale dvije ili više šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče dva nivoa prema gore (osim onih koji su bili na nivou 4 na početku godine i koji ostaju na nivou 4, i onih koji su bili na nivou 3 i koji se pomiču na nivo 4)

(a) Odredite prijelaznu matricu za ovaj sustav bonusa (uz pretpostavku da svi osiguranici obnavaljaju svoje police), te nacrtajte graf pripadajućeg Markovljevog lanca. [3]

(b) Osiguranik je na nivou 2 tokom prve godine police. Uz pretpostavku da se polica obnavlja, izračunajte vjerojatnost da će na početku treće godine osiguranik biti na nivou 4. [2]

(c) Navedite uvjete uz koje vjerojatnost da se osiguranik nalazi u određenom stanju nakon n godina konvergira kada $n \to \infty$ prema nekoj graničnoj vrijednosti nezavisno od početnog stanja, te provjerite da su ti uvjeti zadovoljeni u gornjem primjeru. [2]

(d) Izračunajte granične (asimptotske) vjerojatnosti da će osiguranik biti u stanju 1. [3]

[Ukupno 10 bodova]

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

STOHASTIČKO MODELIRANJE

12. 1. 2004.

Rješenja

1.

(a) M_n je martingal ako vrijedi $\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[e^{\theta S_n - cn} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= e^{-cn} e^{\theta S_{n-1}} \mathbb{E}[e^{\theta X_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= e^{-c(n-1)} e^{\theta S_{n-1}} e^{-c} \mathbb{E}[e^{\theta X_n}] \\
&= M_{n-1} e^{-c}(pe^{\theta} + (1-p)e^{-\theta})
\end{aligned}$$

Slijedi da mora vrijediti $e^{-c}(pe^{\theta} + (1-p)e^{-\theta}) = 1$. Množenjem sa $e^c e^{\theta}$ dobivamo traženu jednakost $pe^{2\theta} - e^{\theta + c} + (1-p) = 0$.

(b) Rješavamo gornju jednadžbu po e^{θ}. Slijedi,

$$e^{\theta} = \frac{e^c \pm \sqrt{e^{2c} - 4p(1-p)}}{2p}$$

odnosno,

$$\theta = \log\left(\frac{e^c \pm \sqrt{e^{2c} - 4p(1-p)}}{2p}\right)$$

(c) Teorem o opcionalnom zaustavljanju vrijedi ako je M omeđen, ili ako je T_1 omeđeno, ili ako je $M_{n \wedge T_1}$ omeđeno.

U našem slučaju, ako je $c \geq 0$ i $\theta \geq 0$, tada je $M_n \leq e^{\theta}$ za sve $n \leq T_1$, t.j., $M_{n \wedge T_1}$ je omeđen.

(d) Za $c > 0$ vrijedi $\theta(c) > 0$ za pozitivan korijen. Možemo primjeniti teorem o opcionalnom zaustavljanju po kojem je $\mathbb{E}[M_{T_1}] = \mathbb{E}[M_0] = 1$. Slijedi:

$$1 = \mathbb{E}[e^{\theta S_{T_1} - cT_1}] = \mathbb{E}[e^{\theta - cT_1}] = e^{\theta}\mathbb{E}[e^{-cT_1}]$$

Dakle,

$$\mathbb{E}[e^{-cT_1}] = e^{-\theta} = \frac{2p}{e^c + \sqrt{e^{2c} - 4p(1-p)}}$$

2.

(a) U matričnom obliku Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed glase $P'(t) = P(t)A$ gdje je

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

generatorska matrica. Specijalno je $P'_{00}(t) = P_{00}(t)(-\lambda) + P_{01}(t)\mu$, odnosno $P'_{00}(t) = \mu P_{01}(t) - \lambda P_{00}(t)$.

(b) Vrijedi $P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t)$, te se jednadžba u (i) može napisati kao $P'_{00}(t) = \mu(1 - P_{00}(t)) - \lambda P_{00}(t) = -(\mu + \lambda)P_{00}(t) + \mu$. Direktno se provjeri da funkcija

$$t \mapsto \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\, e^{-(\lambda+\mu)t}$$

zadovoljava jednadžbu, i početni uvjet $P_{00}(0) = 1$.

(c) Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[O_t \,|\, X(0) = 0] &= \mathbb{E}[\int_0^t 1_{(X(s)=0)}\, ds \,|\, X(0) = 0] \\
&= \int_0^t \mathbb{E}[1_{(X(s)=0)} \,|\, X(0) = 0]\, ds \\
&= \int_0^t \mathbb{P}[X(s) = 0 \,|\, X(0) = 0]\, ds \\
&= \int_0^t P_{00}(s)\, ds \\
&= \int_0^t (\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\, e^{-(\lambda+\mu)s})\, ds \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu}\, t + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})
\end{aligned}$$

(d) Uz pretpostavku daje zdrav ušao u shemu zdravstvenog osiguranja, osiguranik će uplatiti prosječan doprinos do trenutka t u iznosu $\alpha\mathbb{E}[O_t \,|\, X(0) = 0]$. Prosječni troškovi osiguravajućeg društva do trenutka t iznose $\beta(t - \mathbb{E}[O_t \,|\, X(0) = 0]) + \gamma t$. Izjednačavanjem slijedi:

$$\begin{aligned}
&\alpha\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\, t + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})\right) = \\
&\qquad = \beta\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\, t + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})\right) + \gamma t\,.
\end{aligned}$$

Podijelimo s t i pustimo $t \to \infty$ da bismo dobili jednakost nakon dovoljno proteklog vremena. Slijedi:

$$\alpha\mu = \beta\lambda + \gamma(\lambda + \mu)\,.$$

3.

(a) Za niti jedan od predloženih modela ne vrijedi $\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-1}) = 0.7$ i $\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-2}) = 0.5$

(b) Prvo uočimo da vrijedi $\mathrm{Cov}(X_{t-1} - \mu, e_t) = \mathrm{Cov}(X_{t-2} - \mu, e_t) = 0$ i $\mathrm{Cov}(X_t - \mu, e_t) = \sigma^2$. "Množimo" jednadžbu $X_t = \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \alpha_2(X_{t-2} - \mu) + e_t$ redom s X_t, X_{t-1}, X_{t-2} i računamo kovarijance. Slijedi:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma^2 \\ \gamma_1 &= \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_1 \\ \gamma_2 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_0\end{aligned}$$

Dijeljenjem druge i treće jednadžbe s γ_0, slijedi da autokorelacije $\rho_1 = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t-1})$ i $\rho_2 = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t-2})$ zadovoljavaju sustav:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\rho_2 \\ \rho_2 &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi:

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\,, \quad \rho_2 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2\,.$$

(c) Rješavamo sustav:

$$0.7 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\,, \quad 0.5 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2\,.$$

Slijedi: $\alpha_1 = \frac{35}{51}$, $\alpha_2 = \frac{1}{51}$.

4.

(a) Geometrijsko Brownovo gibanje je stohastički proces S_t definiran formulom

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \mu t}$$

gdje je B_t standardno Brownovo gibanje, $\sigma > 0$ i $\mu \in \mathbb{R}$. Alternativno, to je stohastički proces koji zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dS_t = (\mu + \sigma^2/2)\,dt + \sigma\,dB_t\,.$$

(b) Neka je X_t, $t \geq 0$, oblika

$$dX_t = Y_t\,dB_t + Z_t\,dt\,,$$

gdje je B_t standardno Brownovo gibanje, te neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna; tada je

$$df(X_t) = f'(X_t)Y_t\,dB_t + [f'(X_t)Z_t + \frac{1}{2}f''(X_t)Y_t^2]\,dt\,.$$

(c) Računamo:

$$\begin{aligned}
dX_t &= -\alpha e^{-\alpha t}(x_0 - c)\,dt + \sigma d\left(e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha t}\,dB_t\right) \\
&= -\alpha e^{-\alpha t}(x_0 - c)\,dt + \sigma\left(d(e^{-\alpha t})\int_0^t e^{\alpha t}\,dB_t + e^{-\alpha t}\,d\int_0^t e^{\alpha t}\,dB_t\right) \\
&= -\alpha e^{-\alpha t}(x_0 - c)\,dt - \alpha\sigma e^{-\alpha t}\,dt\left(\int_0^t e^{\alpha t}\,dB_t\right) + \sigma e^{-\alpha t}e^{\alpha t}\,dB_t \\
&= -\alpha\left(e^{-\alpha t}(x_0 - c) + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha t}\,dB_t\right)\,dt + \sigma\,dB_t \\
&= -\alpha(X_t - c) + \sigma dB_t
\end{aligned}$$

(d) Iz formule za X_t slijedi da je

$$\begin{aligned}
X_t &\sim N\left(c + e^{-\alpha t}(x_0 - c), \sigma^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\,ds\right) \\
&= N\left(c + e^{-\alpha t}(x_0 - c), \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right)
\end{aligned}$$

Kada $t \to \infty$ distribucija od X_t teži prema $N(c, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$.

5.

(a) Linearni kongruentni generator je specificiran izborom tri pozitivna cijela broja:

a, multiplikator;

c, prirast;

m, modul; $m > a, m > c$

Da bismo dobili željeni niz slučajnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_N$, prvo generiramo niz cijelih brojeva $X_1, X_2, \ldots, X_N$ počevši od početne vrijednosti X_0 (koja se naziva *sjeme*). Niz cijelih brojeva generiran je upotrebom rekurzivnog pravila

$$X_{n+1} = (aX_n + c)(\text{mod } m), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1\,.$$

Nakon toga, x_k se definira kao X_k/m, $k = 1, 2, \ldots, N$.

(b) Po Box-Mullerovom algoritmu, ako su u_1, u_2 pseudoslučajni brojevi iz uniformne distribucije na $[0,1]$, tada su

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{-2\log u_1}\cos(2\pi u_2) \\ z_2 &= \sqrt{-2\log u_1}\sin(2\pi u_2) \end{aligned}$$

dva pseudoslučajna broja iz standardne normalne distribucije. Uz $u_1 = 0.673, u_2 = 0.675, u_3 = 0.445$ i $u_4 = 0.140$ dobivamo

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{-2\log u_1}\cos(2\pi u_2) = \sqrt{-2\log 0.673}\cos(2\pi 0.675) = -0.404031 \\ z_2 &= \sqrt{-2\log u_1}\sin(2\pi u_2) = \sqrt{-2\log 0.673}\sin(2\pi 0.675) = -0.792956 \\ z_3 &= \sqrt{-2\log u_3}\cos(2\pi u_4) = \sqrt{-2\log 0.445}\cos(2\pi 0.140) = 0.811149 \\ z_1 &= \sqrt{-2\log u_3}\cos(2\pi u_4) = \sqrt{-2\log 0.445}\cos(2\pi 0.140) = 0.98051 \end{aligned}$$

(c) Ako je U uniformno distribuirana na $[0,1]$, tada T ima funkciju distribucije

$$\mathbb{P}(T \le x) = \mathbb{P}(-\frac{1}{\lambda}\log U \le x) = \mathbb{P}(U \ge e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}\,,$$

za $x > 0$, što je funkcija distribucije exsponencijalne slučajne varijable s parametrom λ.

(d) Neka je $(T_n,\, n \ge 1)$ niz nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli s parametrom λ. Takav niz znamo simulirati pomoću (c). Definiramo za $t \ge 0$, $N_t = \min\{n : T_1 + T_2 + \cdots + T_n \ge t\}$. Tada je $(N_t,\, t \ge 0)$ Poissonov proces. Uočimo, $N_t = n$ ako i samo ako je $T_1 + \cdots + T_{n-1} < t \le T_1 + \cdots + T_n$.

6.

(a) Izračunajmo vjerojatnosti koje nam trebaju:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(0 \text{ šteta}) &= p_0 = e^{-0.3} = 0.740818 \\
\mathbb{P}(1 \text{ šteta}) &= p_1 = 0.3e^{-0.3} = 0.222245 \\
\mathbb{P}(2 \text{ ili više šteta}) &= 1 - p_0 - p_1 = 0.036937 \\
\mathbb{P}(1 \text{ ili više šteta}) &= 1 - p_0 = 0.259182
\end{aligned}
$$

Matrica prijelaza je

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & 1-p_0-p_1 & 0 \\ p_0 & 0 & p_1 & 1-p_0-p_1 \\ 0 & p_0 & 0 & 1-p_0 \\ 0 & 0 & p_0 & 1-p_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.740818 & 0.222245 & 0.036937 & 0 \\ 0.740818 & 0 & 0.222245 & 0.036937 \\ 0 & 0.740818 & 0 & 0.259182 \\ & 0 & 0.740818 & 0.259182 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(b) Traži se $p_{24}^{(2)} = p_{23}p_{34} + p_{24}p_{44} = 0.067175$.

(c) Dovoljno je da je lanac ireducibilan (što se vidi iz grafa) i aperiodičan (npr., $p_{11} > 0$ povlači aperiodičnost).

(d) Granična distribucija jednaka je stacionarnoj distribuciji $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ koja je rješenje sustava $\pi = \pi P$. Uz dodatnu jednadžbu $1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$, dobivamo sljedeći sustav:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\pi_1 & = & p_0\pi_1 & + & p_0\pi_1 & & & & \\
\pi_2 & = & p_1\pi_1 & + & & & p_0\pi_3 & & \\
\pi_3 & = & (1-p_0-p_1)\pi_1 & + & p_1\pi_2 & + & & & p_0\pi_4 \\
\pi_4 & = & & & (1-p_0-p_1)\pi_2 & + & (1-p_0)\pi_3 & + & (1-p_0)\pi_4 \\
1 & = & \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & + & \pi_4
\end{array}
$$

Iz prve jednadžbe slijedi: $\pi_2 = 0.349859\pi_1$. Iz druge dobivamo $\pi_3 = 0.172261\pi_1$, te iz treće $\pi_4 = 0.077711\pi_1$. Uvrštavnjem u petu jednadžbu dobivamo $1 = 1.59983\pi_1$, otkud $\pi_1 = 0.625066$.