Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

Modeli doživljenja

Miljenko Huzak

Svibanj 2006.

1 Uvod

1.1 Životno osiguranje

Ugovori životnog osiguranja su obveze da se

(a) isplati osigurana svota *kada* se neki određeni događaj dogodi (smrt osigurane osobe,...)
(b) isplaćuju rente *sve dok* se određeni događaj ne dogodi (smrt osig. osobe)

vrijeme života osiguranika $\to$ *slučajna varijabla*

historija života osiguranika $\to$ *slučajni proces*

1.2 Primjeri

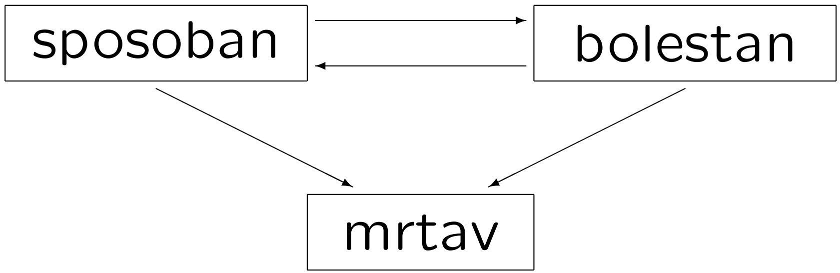
1.2.1 Osiguranje života

$$\boxed{\text{živ}} \longrightarrow \boxed{\text{mrtav}}$$

stanja $=\{$živ, mrtav$\}$

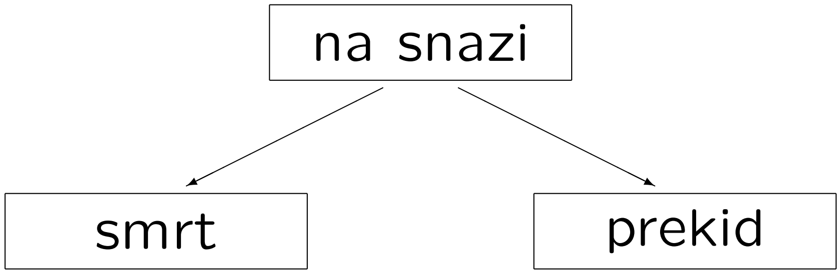
“mrtav” $\leftarrow$ *nepovratno stanje*

1.2.2 Osiguranje od nesposobnosti (za rad)



isplate $\rightarrow$ u stanju “bolestan”

1.2.3 Smrt i prekid osiguranja



1.2.4 Osiguranje dva života

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X \text{ živ}, Y \text{ živ}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{X \text{ živ}, Y \text{ mrtav}} \arrow[d] \\
\boxed{X \text{ mrtav}, Y \text{ živ}} \arrow[r] & \boxed{X \text{ mrtav}, Y \text{ mrtav}}
\end{tikzcd}$$

isplata $\rightarrow$ kada druga osoba premine

1.3 Određivanje modela doživljenja

Model za slučajno vrijeme ili historiju života
$\rightarrow$ *model doživljenja*

Dva pristupa modeliranju doživljenja (osobe dobi x):

1. Model 1: $T_x \rightarrow F_x(t)$
2. Model 2: Markovljev proces s dva stanja

$$\boxed{\text{živ}} \xrightarrow{\qquad \mu_x \qquad} \boxed{\text{mrtav}}$$

1.4 Procjena i primjena

Za oba modela želimo:

(a) procijeniti parametre modela iz podataka (u Modelu 1: $F_x(t)$, u Modelu 2: μ_x)

(b) primijeniti model za računanje veličina potrebnih u primjeni
(npr. v^{T_x} - sadašnja vrijednost isplate od 1 kn u slučaju smrti $\to$ E$[v^{T_x}]$, Var$[v^{T_x}]$)

Jednoznačna je veza: $\mu_x \leftrightarrow F_x(t)$

1.5 Plan i sadržaj

- Modeli doživljenja i tablice smrtnosti
- Procjena funkcije distribucije vremena života
- Coxov regresijski model
- Markovljev proces s dva stanja
- Opći Markovljev model
- Binomni i Poissonov model
- Izglađivanje i statistički testovi
- Metode izglađivanja
- Izloženost riziku
- Definicija i procjena funkcija smrtnosti s odabirom
- Izračunavanje vrijednosti osiguranja i renti
- Profit od smrtnosti. Thielova dif. jednadžba

Literatura

1. *Subject* 104: *Survival Models, Core Reading* 2000, Faculty and Institute of Actuaries
2. H.U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Swiss Association of Actuaries, Zrich, 1990.
3. Chin Long Chiang, *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*, Wiley, 1968.
4. N.L Bowers et al., *Actuarial Mathematics*, 2nd edition, Society of Actuaries, 1997.
5. S. Haberman, E. Pitacco, *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall, 1999.

6. E. Marubini, M.G. Valsecci, M. Emmerson, *Analysing Survival Data from Clinical Trials and Observational Studies*, Wiley, 1995.
7. B. Benjamin, J.H. Pollard, *The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics*, 3rd edition, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, 1993.
8. R.C. Elandt-Johnson, N.L. Johnson, *Survival Models and Data Analysis*, Wiley, 1980.
9. *Subject* 105: *Actuarial Mathematics 1, Core Reading* 2000, Faculty and Institute of Actuaries

2. Modeli doživljenja i tablice smrtnosti

2.1 Jednostavan model doživljenja (Model 1)

$T =$ trajanje života novorođene osobe
$\rightarrow$ *nepr. sl. varijabla distrib. na* $[0, \omega]$ $(0 < \omega < +\infty)$
$\rightarrow$ $\omega =$ granična dob (100 - 120 godina),

$$\mathsf{P}(T > \omega) = 0$$

$F(t) := \mathsf{P}(T \leq t) \leftarrow$ *funkcija distribucije od* T

$S(t) := \mathsf{P}(T > t) \leftarrow$ *funkcija doživljenja od* T

$$S(t) = 1 - F(t)$$

T_x = buduće vrijeme trajanje života osobe koja je doživjela dob x $(0 \le x \le \omega)$

$F_x(t) := \mathsf{P}(T_x \le t) \quad (0 \le t \le \omega - x)$

$S_x(t) := \mathsf{P}(T_x > t) \quad (0 \le t \le \omega - x)$

Veza T_x i T:

$$
\begin{aligned}
F_x(t) &= \mathsf{P}(T_x \le t) = \\
&= \mathsf{P}(T \le x + t | T > x) = \frac{\mathsf{P}(x < T \le x + t)}{\mathsf{P}(T > x)} = \\
&= \frac{F(x+t) - F(x)}{S(x)}
\end{aligned}
$$

Aktuarske oznake:

${}_tq_x := F_x(t) \leftarrow$ (uvjetna) vjerojatnost da osoba ne doživi dob $x+t$ ako je doživjela dob x

${}_tp_x := S_x(t) \leftarrow$ (uvjetna) vjerojatnost da osoba doživi dob $x+t$ ako je doživjela dob x

Kraće: $q_x \equiv {}_1q_x$, $p_x \equiv {}_1p_x$

q_x, ${}_tq_x \leftarrow$ *stope smrtnosti*

Intenzitet smrtnosti u dobi x $(0 \leq x < \omega)$:

$$\mu_x := \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{P}(T \leq x + h | T > x) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} F_x(h)$$

$\Rightarrow$

$$F_x(h) = h \cdot \mu_x + o(h), \;\; h \to 0+$$

Interpretacija: Vjerojatnost smrti upravo nakon navršene dobi x je proporcionalna vremenu smrti nakon x (s intenzitetom μ_x)

Dva izraza za μ_{x+t} $(x \geq 0, t > 0)$:

$$\mu_{x+t} = \text{(po def.)} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{P}(T \leq x + t + h | T > x + t)$$

$$\mu_{x+t} = \cdots = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{P}(T_x \leq t + h | T_x > t)$$

Vrijedi:

$$S_x(t) = \cdots = \frac{S(t+x)}{S(x)} \quad \Leftrightarrow \quad {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_{t+s}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t}}$$

Gustoća od T_x:

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = \cdots = S_x(t)\mu_{x+t}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{f_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}, \quad 0 \leq t \leq \omega - x}$$

$q_x \leftarrow$ *početna stopa smrtnosti*

$m_x := \dfrac{q_x}{\int\limits_0^1 {}_tp_x \, dt} \leftarrow$ *centralna stopa smrtnosti*

$m_x =$ vjerojatnost da osoba koja je živa u dobi od x do $x+1$ umre prije dobi $x+1$

$$\int\limits_0^1 {}_tp_x \, dt = \mathsf{E}[\int\limits_0^1 1_{\{T_x > t\}} \, dt]$$

$=$ srednje vrijeme koje je osoba pristupne dobi x provela u dobnom intervalu $[x, x+1]$

Centralna stopa smrtnosti

$\rightarrow$ koristi se kod projiciranja smrtnosti

$$t \mapsto \mu_{x+t} \equiv \mu = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad m_x = \mu$$

$$\widehat{m}_x = \frac{\text{broj umrlih}}{\text{ukupno vrijeme živih i pod rizikom}}$$

2.2 Očekivanja potpunog i cjelobrojnog trajanja života

$\overset{\circ}{e}_x = \mathsf{E}[T_x] \leftarrow$ *očekivanje potpunog trajanja života osobe dobi* x

$$\overset{\circ}{e}_x = \cdots = \int_0^{\omega - x} {}_t p_x \, dt$$

$K_x := [T_x] \leftarrow$*cjelobrojno trajanje života os. dobi* x
$\rightarrow$ diskretna sl. v. s razdiobom:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(K_x = k) &= \mathsf{P}(k \le T_x < k+1) = \\ &= \mathsf{P}(k < T_x \le k+1) = \\ &= {}_kp_x \cdot q_{x+k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, [\omega - x]\} \end{aligned}$$

$e_x = \mathsf{E}[K_x] \leftarrow$ *očekivanje cjelobrojnog trajanja života osobe dobi* x

$$e_x = \cdots = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} {}_kp_x$$

Aproksimativno je:

$$\overset{\circ}{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}[T_x] = \int_0^{\omega-x} t^2 {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt - \overset{\circ}{e}{}_x^2$$

$$\text{Var}[K_x] = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} k^2 {}_kp_x q_{x+k} - e_x^2$$

2.3 Važne formule

$$\boxed{\begin{aligned} {}_tq_x &= \int\limits_0^t {}_sp_x \mu_{x+s}\, ds \\ {}_tp_x &= \exp\Big(-\int\limits_0^t \mu_{x+s}\, ds\Big) \end{aligned}}$$

2.4 Tablice smrtnosti

$\alpha \leftarrow$ početna dob

$\ell_\alpha \leftarrow$ korijen (radix) tablice

Pretp.: $t \mapsto {}_tp_\alpha$ je poznato. Za $x \in [\alpha, \omega]$,

$$\ell_x := \ell_\alpha \cdot {}_{x-\alpha}p_\alpha$$

$\Rightarrow$

$$ {}_tp_x = \frac{{}_{x-\alpha+t}p_\alpha}{{}_{x-\alpha}p_\alpha} = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

Def. *Tablica smrtnosti* je funkcija $x \mapsto \ell_x$.

SECTION II

ENGLISH LIFE TABLE No. 12—MALES

MORTALITY FUNCTIONS AND MONETARY FUNCTIONS

Basis of the table

This table is based on the mortality of the male population of England and Wales in the years 1960–62. The method of construction is explained in the Registrar-General's Decennial Supplement 1961, England and Wales, Life Table.

The functions have mainly been taken from the tables prepared, under the direction of Mr. W. T. L. Barnard, F.I.A., for the Industrial Life Offices' Association and therefore incorporate some slight modifications of the figures in the Registrar General's Decennial Supplement.

The value of μ_0 cannot be obtained from annual data and no value has been included in the table.

Age x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	e_x	Age x
0	100 000	2 449	·975 51	·024 49		68·09	0
1	97 551	153	·998 43	·001 57	·002 10	68·80	1
2	97 398	96	·999 01	·000 99	·001 34	67·90	2
3	97 302	67	·999 31	·000 69	·000 79	66·97	3
4	97 235	60	·999 38	·000 62	·000 63	66·02	4
5	97 175	55	·999 43	·000 57	·000 59	65·06	5
6	97 120	51	·999 48	·000 52	·000 54	64·09	6
7	97 069	47	·999 52	·000 48	·000 50	63·13	7
8	97 022	43	·999 56	·000 44	·000 46	62·16	8
9	96 979	40	·999 59	·000 41	·000 43	61·18	9
10	96 939	38	·999 61	·000 39	·000 40	60·21	10
11	96 901	37	·999 62	·000 38	·000 39	59·23	11
12	96 864	37	·999 62	·000 38	·000 38	58·25	12
13	96 827	40	·999 59	·000 41	·000 39	57·28	13
14	96 787	45	·999 53	·000 47	·000 43	56·30	14
15	96 742	57	·999 41	·000 59	·000 52	55·33	15
16	96 685	75	·999 22	·000 78	·000 67	54·36	16
17	96 610	96	·999 01	·000 99	·000 89	53·40	17
18	96 514	108	·998 88	·001 12	·001 07	52·45	18
19	96 406	113	·998 83	·001 17	·001 15	51·51	19
20	96 293	115	·998 81	·001 19	·001 19	50·57	20
21	96 178	113	·998 82	·001 18	·001 19	49·63	21
22	96 065	110	·998 86	·001 14	·001 16	48·69	22
23	95 955	104	·998 92	·001 08	·001 12	47·74	23
24	95 851	98	·998 98	·001 02	·001 05	46·80	24
25	95 753	95	·999 01	·000 99	·001 00	45·84	25
26	95 658	94	·999 02	·000 98	·000 98	44·89	26
27	95 564	96	·999 00	·001 00	·000 99	43·93	27
28	95 468	99	·998 96	·001 04	·001 02	42·98	28
29	95 369	104	·998 91	·001 09	·001 06	42·02	29
30	95 265	110	·998 85	·001 15	·001 12	41·06	30
31	95 155	115	·998 79	·001 21	·001 18	40·11	31
32	95 040	122	·998 72	·001 28	·001 25	39·16	32
33	94 918	129	·998 64	·001 36	·001 32	38·21	33
34	94 789	137	·998 55	·001 45	·001 40	37·26	34
35	94 652	147	·998 45	·001 55	·001 50	36·31	35
36	94 505	158	·998 33	·001 67	·001 61	35·37	36
37	94 347	171	·998 19	·001 81	·001 74	34·43	37
38	94 176	185	·998 04	·001 96	·001 89	33·49	38
39	93 991	201	·997 86	·002 14	·002 05	32·55	39
40	93 790	220	·997 65	·002 35	·002 24	31·62	40
41	93 570	242	·997 41	·002 59	·002 46	30·70	41
42	93 328	268	·997 13	·002 87	·002 73	29·77	42
43	93 060	297	·996 81	·003 19	·003 03	28·86	43
44	92 763	330	·996 44	·003 56	·003 37	27·95	44
45	92 433	369	·996 01	·003 99	·003 77	27·05	45
46	92 064	412	·995 52	·004 48	·004 23	26·15	46
47	91 652	463	·994 95	·005 05	·004 76	25·27	47
48	91 189	520	·994 30	·005 70	·005 38	24·40	48
49	90 669	584	·993 56	·006 44	·006 07	23·53	49
50	90 085	656	·992 72	·007 28	·006 87	22·68	50
51	89 429	736	·991 77	·008 23	·007 77	21·84	51
52	88 693	825	·990 70	·009 30	·008 78	21·02	52
53	87 868	923	·989 49	·010 51	·009 93	20·21	53
54	86 945	1 029	·988 16	·011 84	·011 21	19·42	54

ENGLISH LIFE TABLE No. 12—MALES

Age x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	e_x	Age x
55	85 916	1 144	·986 69	·013 31	·012 63	18·65	55
56	84 772	1 265	·985 08	·014 92	·014 20	17·89	56
57	83 507	1 393	·983 32	·016 68	·015 90	17·16	57
58	82 114	1 526	·981 41	·018 59	·017 76	16·44	58
59	80 588	1 664	·979 35	·020 65	·019 78	15·74	59
60	78 924	1 805	·977 13	·022 87	·021 97	15·06	60
61	77 119	1 947	·974 75	·025 25	·024 33	14·40	61
62	75 172	2 088	·972 22	·027 78	·026 84	13·76	62
63	73 084	2 228	·969 51	·030 49	·029 53	13·14	63
64	70 856	2 366	·966 61	·033 39	·032 43	12·54	64
65	68 490	2 499	·963 52	·036 48	·035 53	11·95	65
66	65 991	2 625	·960 22	·039 78	·038 84	11·39	66
67	63 366	2 745	·956 68	·043 32	·042 39	10·84	67
68	60 621	2 856	·952 88	·047 12	·046 22	10·31	68
69	57 765	2 959	·948 78	·051 22	·050 36	9·79	69
70	54 806	3 051	·944 34	·055 66	·054 87	9·29	70
71	51 755	3 130	·939 53	·060 47	·059 76	8·81	71
72	48 625	3 195	·934 30	·065 70	·065 09	8·35	72
73	45 430	3 243	·928 61	·071 39	·070 92	7·90	73
74	42 187	3 273	·922 41	·077 59	·077 30	7·47	74
75	38 914	3 282	·915 66	·084 34	·084 32	7·05	75
76	35 632	3 266	·908 33	·091 67	·092 00	6·66	76
77	32 366	3 225	·900 37	·099 63	·100 42	6·28	77
78	29 141	3 154	·891 76	·108 24	·109 62	5·92	78
79	25 987	3 054	·882 48	·117 52	·119 64	5·57	79
80	22 933	2 923	·872 53	·127 47	·130 53	5·25	80
81	20 010	2 763	·861 92	·138 08	·142 31	4·94	81
82	17 247	2 576	·850 66	·149 34	·155 03	4·66	82
83	14 671	2 365	·838 78	·161 22	·168 63	4·39	83
84	12 306	2 137	·826 34	·173 66	·183 11	4·14	84
85	10 169	1 897·4	·813 41	·186 59	·198 49	3·90	85
86	8 271·6	1 654·1	·800 03	·199 97	·214 68	3·68	86
87	6 617·5	1 414·1	·786 31	·213 69	·231 65	3·48	87
88	5 203·4	1 184·6	·772 35	·227 65	·249 28	3·30	88
89	4 018·8	971·6	·758 23	·241 77	·267 48	3·13	89
90	3 047·2	779·9	·744 07	·255 93	·286 16	2·97	90
91	2 267·3	612·2	·729 97	·270 03	·305 18	2·83	91
92	1 655·1	470·0	·716 04	·283 96	·324 39	2·70	92
93	1 185·1	352·73	·702 36	·297 64	·343 72	2·58	93
94	832·37	258·83	·689 04	·310 96	·362 94	2·47	94
95	573·54	185·74	·676 15	·323 85	·381 97	2·38	95
96	387·80	130·39	·663 77	·336 23	·400 66	2·29	96
97	257·41	89·59	·651 94	·348 06	·418 86	2·21	97
98	167·82	60·30	·640 71	·359 29	·436 51	2·14	98
99	107·52	39·771	·630 11	·369 89	·453 54	2·07	99
100	67·749	25·733	·620 17	·379 83	·469 72	2·00	100
101	42·016	16·349	·610 88	·389 12	·485 12		101
102	25·667	10·209	·602 24	·397 76	·499 67		102
103	15·458	6·272 1	·594 25	·405 75	·513 35		103
104	9·185 9	3·794 9	·586 88	·413 12			104
105	5·391 0						105

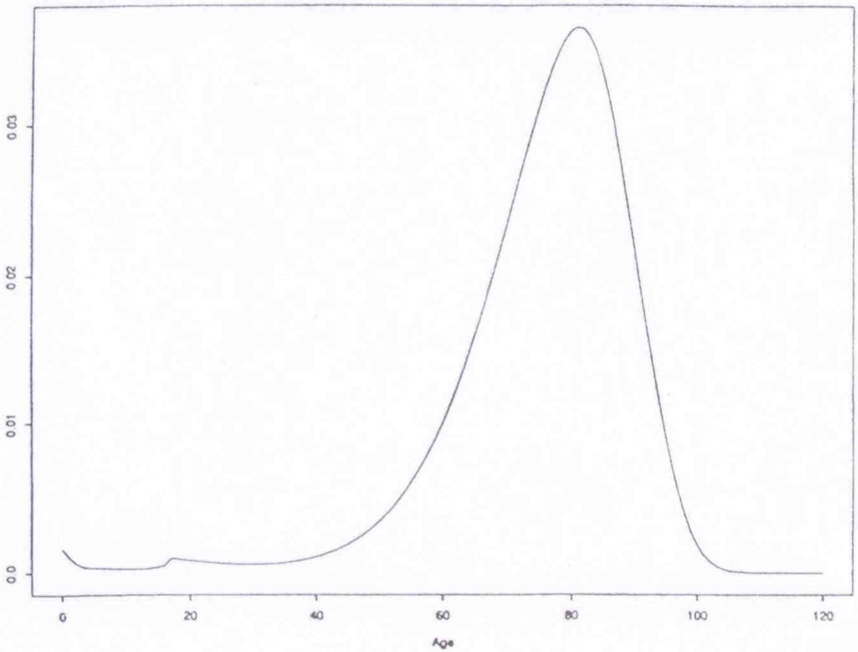


Figure 6

$f_0(t) = {}_t p_0 \, \mu_t$ (AM80 Ultimate Mortality Table)

Definiramo za $x \in [\alpha, \omega - 1]$,

$$d_x := \ell_x - \ell_{x+1}$$

$d_x =$ očekivani broj smrti (od ℓ_α osoba) između dobi x i $x + 1$

Vrijedi:

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{\ell_x}{\ell_{x+1}} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x}$$

$$\begin{aligned} d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{x+n-1} &= \ell_x - \ell_{x+n} \\ d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{\omega-1} &= \ell_x \end{aligned}$$

Još aktuarskih oznaka:

$$ {}_{n|m}q_x := \mathsf{P}(n < T_x \leq n+m) $$

${}_{n|m}q_x =$ vjeroj. da osoba dobi x doživi dob $x+n$, ali premine u sljedećih m godina

Vrijedi:

$$ {}_{n|m}q_x = {}_np_x \cdot {}_mq_{x+n} = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n-m}}{\ell_x} $$

Specijalno:

$$ {}_{n|1}q_x = (\text{oznaka}) = {}_{n|}q_x = \mathsf{P}(n < T_X \leq n+1) $$

$$ {}_{n|}q_x = {}_n p_x \cdot q_{x+n} = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n+1}}{\ell_x} $$

$\Rightarrow$

$$ \mathsf{P}(K_x = k) = {}_k p_x \cdot q_{x+k} = {}_{k|}q_x $$

Primjer. U nekoj populaciji intenzit smrtnosti je 0.025 konstantno u svim dobima. Izračunajte:

(i) vjerojatnost da će novorođena osoba doživjeti dob od 5 godina,

(ii) vjerojatnost da će osoba točne dobi 10 umrijeti prije navršenih 12 godina,

(iii) vjerojatnost da će osoba točne dobi 5 umrijeti između 10. i 12. godine,

(iv) očekivanje potpunog trajanja života novorođene osobe,

(v) očekivanje cjelobrojnog trajanja života novorođene osobe.

2.5 Aproksimacija tablice smrtnosti u necjelobrojnim dobima

Na primjer,

$$_{2.5}p_{37.5} = ?$$

$$2.5p37.5 = 0.5p37.5 \cdot 2p38$$

$\rightarrow$ (dvije) metode za aproksimaciju unutar $[x, x+1]$

Prva metoda: bazira se na pretpostavci da je *smrtnost uniformno distribuirana duž* $[x, x+1]$ (UDD $\equiv$ *Uniform Distribution of Deaths*), tj.

$$f_x(t) = {}_tp_x\mu_{x+t} = c = \text{konst.}, \quad t \in [x, x+1]$$

$\Rightarrow$

$${}_tq_x = t \cdot q_x$$

$${}_{t-s}q_{x+s} = \frac{(t-s) \cdot q_x}{1 - s \cdot q_x}$$

za x cjelobrojno i $0 \leq s < t \leq 1$

Druga metoda: bazira se na pretpostavci da je *intenzitet smrtnosti konstantan duž* $[x, x+1\rangle$, tj.

$$\mu_{x+t} = \mu = \text{konst.}, \quad 0 \leq t < 1$$

$\Rightarrow$

$$_t p_x = e^{-\mu t}$$

$$_{t-s} p_{x+s} = p_x^{t-s}$$

za x cjelobrojno i $0 \leq s < t \leq 1$

2.6 Tablice smrtnosti s odabirom

q_x, $\mu_x \leftarrow$ ovise o dobi x i *vremenu od trenutka kada je sklopljen ugovor o osiguranju* (= vrijeme pripadnosti grupi)

Na *kraju*, nakon određenog vremena, smrtnost opet ovisi samo o dobi.

2.7 Svojstva smrtnosti

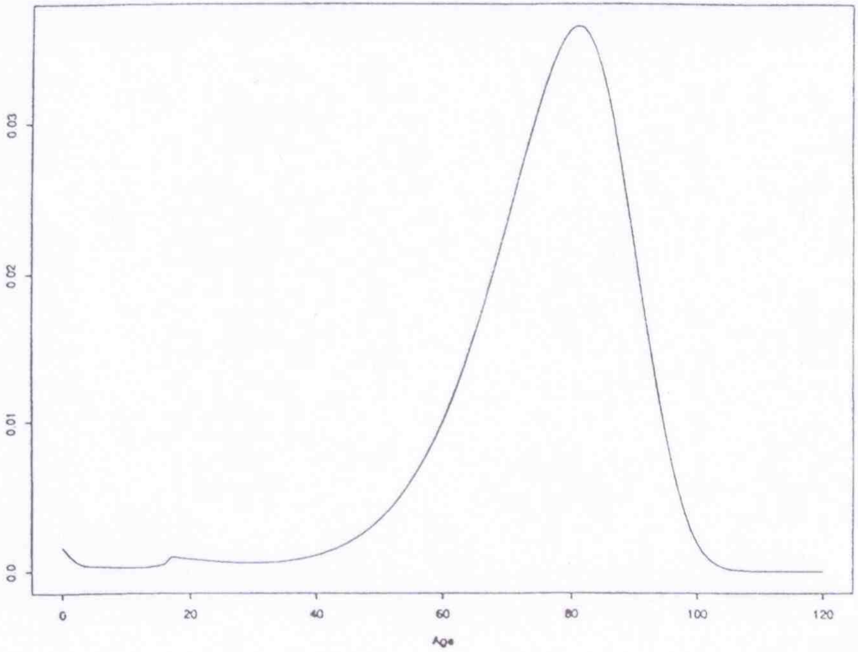


Figure 6

$f_0(t) = {}_t p_0 \, \mu_t$ (AM80 Ultimate Mortality Table)

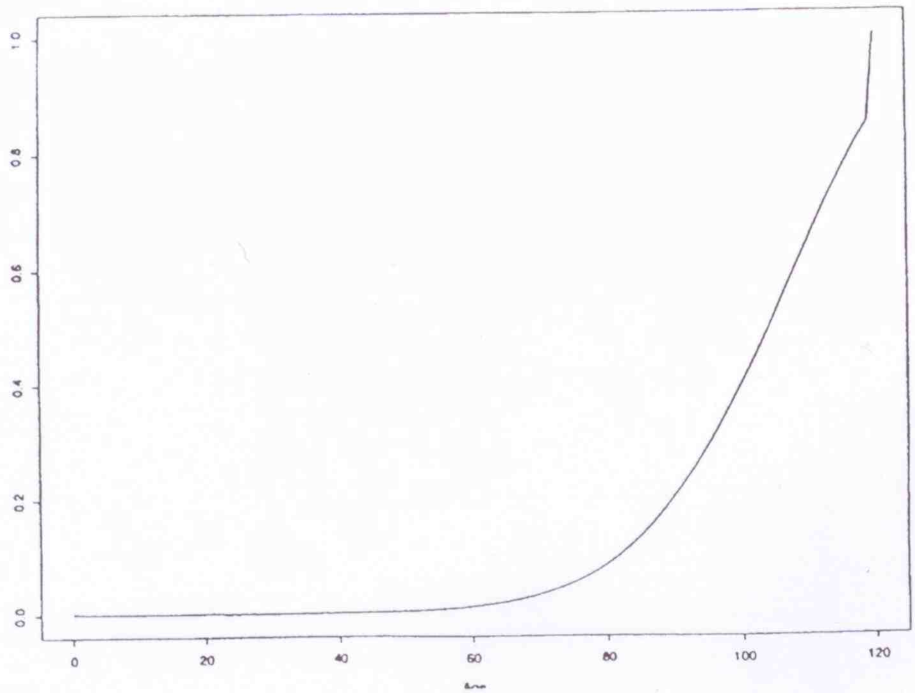


Figure 7

q_x (AM80 Ultimate Mortality Table)

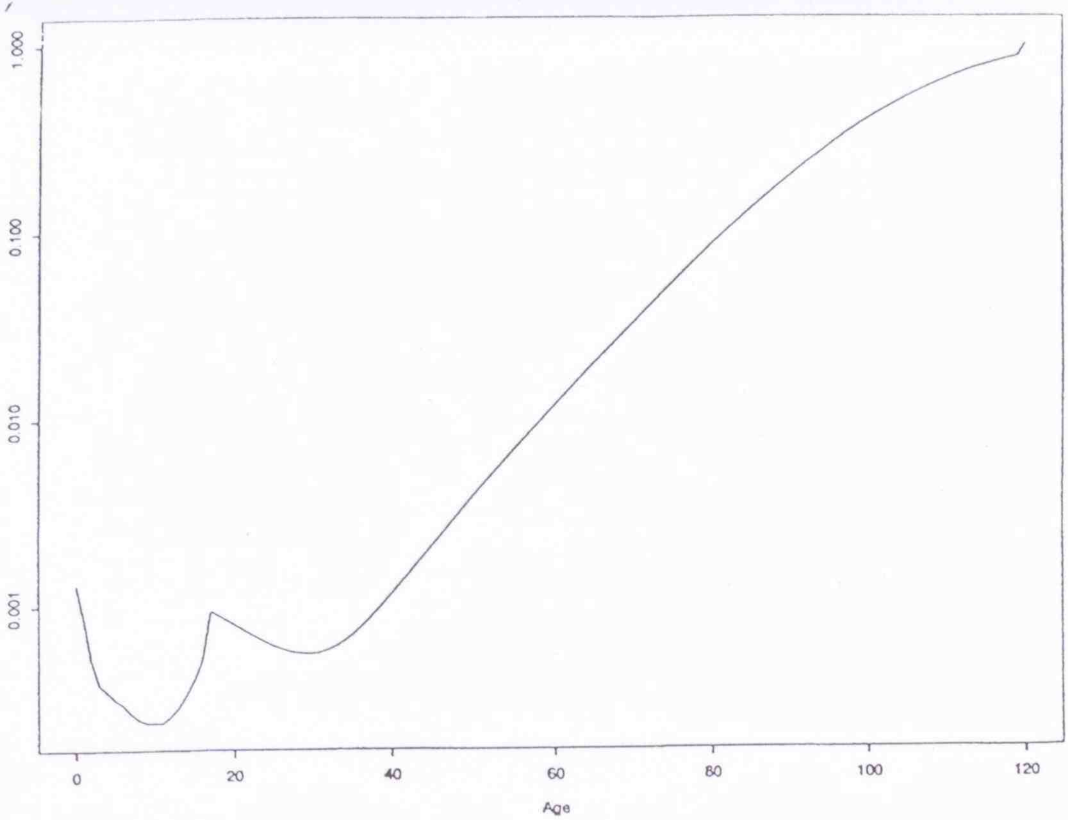


Figure 8

$\log(q_x)$ (AM80 Ultimate Mortality Table)

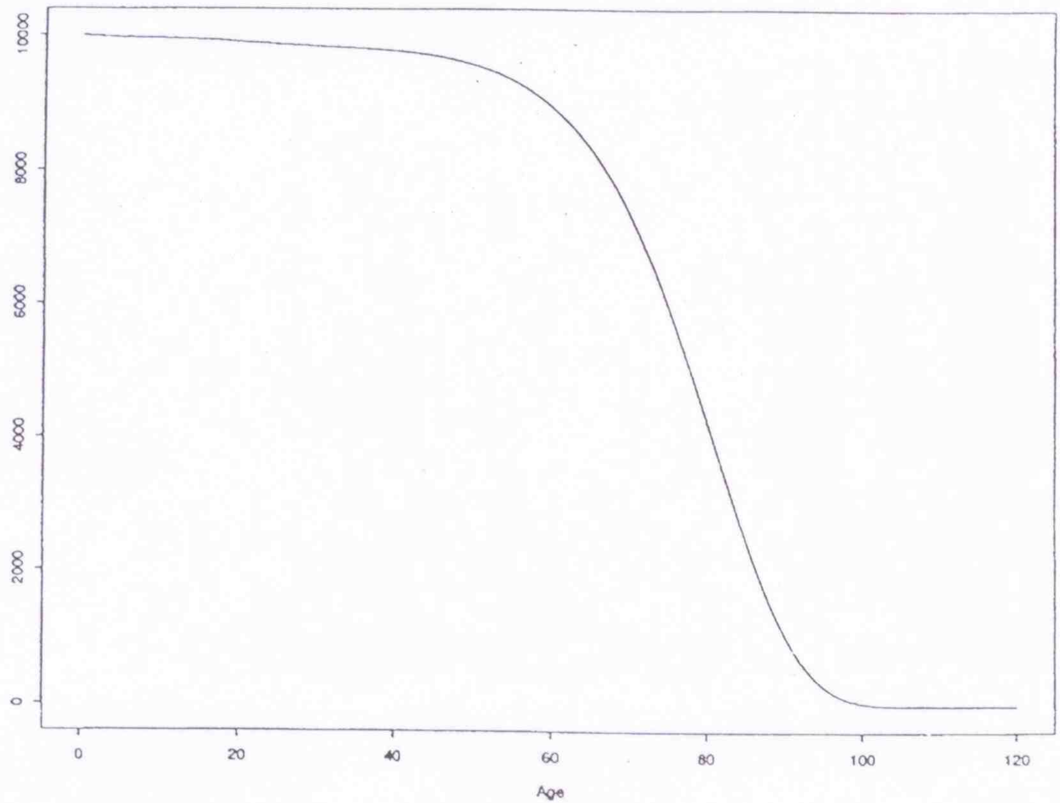


Figure 9

l_x (AM80 Ultimate Mortality Table)

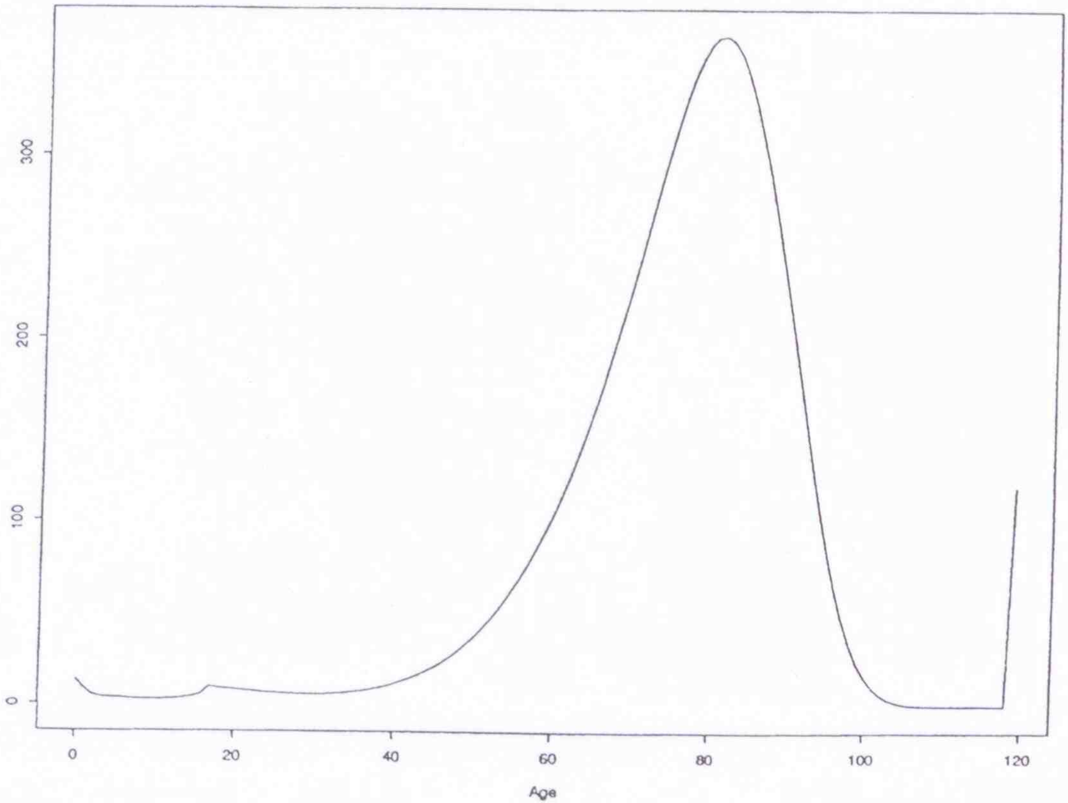


Figure 10

d_x (AM80 Ultimate Mortality Table)

2.8 Jednostavni zakoni smrtnosti

Gompertzov zakon:

$$\mu_x = B \cdot C^x$$

$\leftarrow$ dobro opisuje smrtnost srednjih i zrelih godina

Makehamov zakon:

$$\mu_x = A + B \cdot C^x$$

$\leftarrow$ slobodni član $\leftarrow$ model za slučajnu smrt zbog nezgode (ne ovisi o dobi)

Gompertzov zakon:

$$ {}_tp_x = g^{C^x(C^t-1)} $$

Makehamov zakon:

$$ {}_tp_x = s^t \cdot g^{C^x(C^t-1)} $$

gdje su

$$ g = \exp(-\frac{B}{\log C}), \quad s = e^{-A} $$

3. Procjena distribucije vremena života

3.1 Uvod

Želimo procijeniti $F(t)$ od T
$\rightarrow$ *neparametarska procjena*!

"*Najjednostavnija metoda*": opaža se vrlo velik broj novorođenih osoba do njihove smrti.

Problemi s "najjednostavnijom" metodom:

1. ako i nađemo dovoljno velik uzorak, trebali bi ga opažati barem 100 godina
2. osobe mogu napustiti opažanje i prije eventualne smrti (zbog raznih razloga)

$\rightarrow$ *cenzurirani podaci*

3.2 Mehanizmi cenzuriranja

Vrste cenzuriranja:

1. desno cenzuriranje
2. lijevo cenzuriranje
3. intervalno cenzuriranje
4. slučajno cenzuriranje
5. neinformativno cenzuriranje
6. cenzuriranje tipa I
7. cenzuriranje tipa II

3.3 Kaplan - Meierov procjenitelj

3.3.2 Kaplan-Meierova procjena

$$\widehat{F}(t) = 1 - \prod_{t_j \leq t} (1 - \widehat{\lambda}_j)$$

gdje je $\widehat{\lambda}_j = d_j/n_j$, $j = 1, \ldots, k$

3.4 Usporedba razdioba vremena života

Greenwoodova formula:

$$\mathrm{Var}[\widehat{F}(t)] \approx (1 - \widehat{F}(t))^2 \sum_{t_j \le t} \frac{d_j}{n_j(n_j - d_j)}$$

3.3 Nelson - Aalenov procjenitelj

Procjena integriranog hazarda:

$$\Lambda_t = \int_0^t \mu_s \, ds + \sum_{t_j \leq t} \lambda_j$$

3.3.2 Nelson - Aalenova procjena

$$\widehat{\Lambda}_t = \sum_{t_j \leq t} \frac{d_j}{n_j}$$

$$\mathrm{Var}[\widehat{\Lambda}_t] \approx \sum_{t_j \leq t} \frac{n_j - d_j}{n_j^3}$$

Primjer. U tablici se nalaze podaci o 12-torici pacijenata koji su bili podvrgnuti nekoj operaciji.

pacijent	vrijeme op. (tjedni)	opažanje prestalo (u tjednu)	raz. za prestanak
1	0	120	cenzurirano
2	0	68	smrt
3	0	40	smrt
4	4	120	cenzurirano
5	5	35	cenzurirano
6	10	40	smrt
7	20	120	cenzurirano
8	44	115	smrt
9	50	90	smrt
10	63	98	smrt
11	70	120	smrt
12	80	110	smrt

Pretpostavljamo: cenzuriranje je neinformativno.

(i) Procijenite funkciju doživljenja pomoću Kaplan - Meierove metode i odredite 95% p.i. za njene vrijednosti.

(ii) Procijenite integrirani hazard Nelson - Aalenovom procjenom i pomoću njega procijenite funkciju doživljenja.

(iii) Procijenite vjerojatnost da će pacijent doživjeti 70-ti tjedan nakon operacije.

4. Coxov regresijski model

4.1 Ovisnost o varijablama (kovarijatama)

4.2 Potpuno parametarsko modeliranje

Pretpostavka: distribucija vremena života pripada nekoj parametarskoj familiji (npr. eksponencijalna, Weibullova, Gompertz-Makehamova,...)

$\rightarrow$ populacije se uspoređuju usporedbom parametara

$\rightarrow$ može se primijeniti ako postoji apriorno znanje o pripadnosti određenoj param. familiji

4.3 Coxov poluparametarski model:

$$\lambda(t; z) = \lambda_0(t) \exp(\beta z^T)$$

gdje su:
– $\lambda_0(t)$... osnovni hazard
– β... $1 \times p$-vektor regresijskih parametara
– z... $1 \times p$-vektor p-dim, kovarijate

Osnovna pretpostavka Coxovog modela:

Omjeri hazarda različitih osoba s vrijednostima kovarijata z_1, z_2 ne ovise o t, tj.

$$\frac{\lambda(t; z_1)}{\lambda(t; z_1)} = \exp(\beta(z_1^\tau - z_2^\tau))$$

$\rightarrow$ model *proporcionalnih* hazarda

Upotreba Coxovog modela:

– ako nas primarno zanima istraživanje *efekta* od z na $\lambda(t; z)$, a ne sama funkcija doživljenja (tj. λ)

$\rightarrow$ poluparametarski pristup

4.4 Parcijalna vjerodostojnost

Pretpostavka: $d_j = 1$ za svaki j

$$L(\beta) = \prod_{j=1}^{k} \frac{\exp(\beta z_j^T)}{\sum_{i \notin R(t_j)} \exp(\beta z_i^T)}$$

gdje je $R(t_j)$ skup svih osoba i živih i pod rizikom do t_j-

$\rightarrow$ procjena od β (numeričkom) maksimizacijom $L(\beta)$

U praksi se može dogoditi:

(a) $d_j > 0$
(b) postoje cenzurirana opažanja u nekom od t_j

Ad (a): Breslowova aproksimacija:

$$L(\beta) = \prod_{j=1}^{k} \frac{\exp(\beta s_j^\tau)}{\left(\sum_{i \notin R(t_j)} \exp(\beta z_i^\tau)\right)^{d_j}}$$

gdje je s_j zbroj svih z vrijednosti osoba umlih u t_j

Ad (b): Osobe cenzurirane u t_j su uključene u skup $R(t_j)$.

Primjer. U tablici se nalaze podaci malog uzorka zaposlenih u jednoj tvornici koji predstavljaju vremena u mjesecima do prvog izostajanja s posla. Sa "+" su označena vremena napuštanja posla koja se ne smatraju izostajanjem.

M:	6+	11	13+	15	16+	19+	20	
F:	2+	4	7	8+	10+	12+	17	21+

Stopa hazarda se modelira po Coxovom modelu:

$$\lambda(t) = \lambda_0(t)e^{\beta x}$$

gdje su: $x = 0$ za muškarce (M) i $x = 1$ za žene (F).

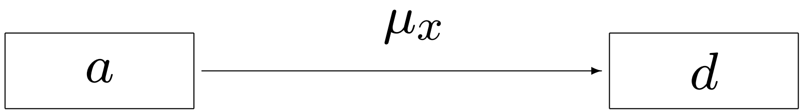
(i) Odredite parcijalnu vjerodostojnost od β i MLE.

(ii) Procijenite asimptotski 95% p.i. za β.

(iii) Testirajte hipotezu da žene imaju veću stopu izostanka s posla od muškaraca.

5. Markovljev proces s dva stanja

5.1 Pretpostavke



${}_tp_x :=$ (uvjetna) vjerojatnost da osoba (proces) ostane u stanju a u dobi $x+t$ ako je bila u tom stanju u dobi x

${}_tq_x :=$ (uvjetna) vjerojatnost da osoba (proces) bude u stanje d u dobi $x+t$ ako je bila u stanju a u dobi x

Pretpostavka 1.
Vjerojatnost da će se osoba dobi x naći u određenom stanju u dobi $x + t$ ovisi samo o dobi x i stanju u kojem se u toj dobi nalazi.

Pretpostavka 2.
$_hq_{x+t} = \mu_{x+t} \cdot h + o(h)$, $h \to 0+$, za $t \geq 0$.

$\to$ u cilju procjene modela, restrikcija na dobni interval $[x, x + 1\rangle$

Pretpostavka 3.
$t \mapsto \mu_{x+t} = \mu =$ konst. za $0 \leq t < 1$.

Sve ostalo (npr. stanje zdravlja, zanimanje,...) nije uključeno u model.

Znajući te faktore, možemo:

(a) *stratificirati* problem, tj. za svaku kombinaciju razina faktora postaviti model
(b) postaviti adekvatan *regresijski model* s tim faktorima kao kovarijatama

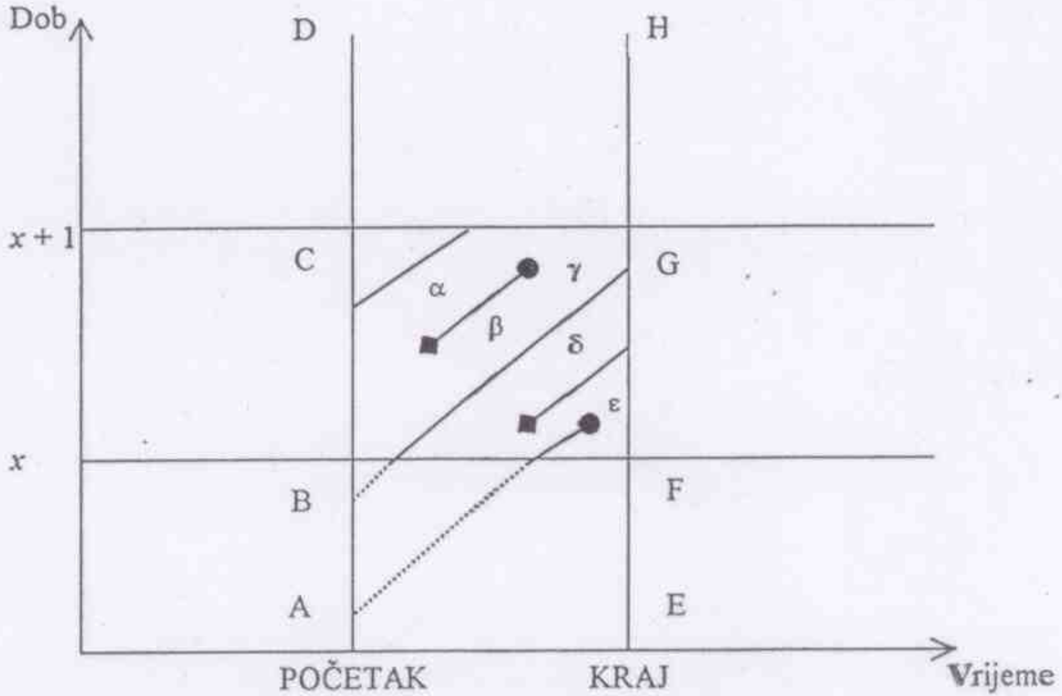
5.2 Vjerojatnosti prijelaza

$$ {}_{t+h}p_x = \cdots = {}_tp_x(1 - \mu_{x+t}h) + o(h), \; h \to 0+ $$

$\Rightarrow$

$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds\right) $$

5.3 Statistike



SLIKA 2

6. Opći Markovljev model

7. Binomni i Poissonov model

7.4 Usporedba modela više stanja, binomnog i Poissonovog

Modele uspoređujemo obzirom na:

1. reprezentativnosti
2. jednostavnosti prilagodbe podacima
3. mogućnost proširenja na druge probleme (a ne samo na modeliranje smrtnosti ljudi)

9. Metode izglađivanja

9.1 Izglađivanje parametarskom formulom

Sirovim procjenama prilagođavamo *funkcije dobi* koje ovise o *konačno* mnogo *parametara*.

Uobičajeni modeli:

$$\mu_x = B \cdot C^x \qquad \text{(Gompertzov)}$$
$$\mu_x = A + B \cdot C^x \qquad \text{(Makehamov)}$$

Primjer. Tablice smrtnosti osiguranika životnih osiguranja u UK (CMIB data 1979-82) koriste formulu:

$$\mu_x = \text{Polinom}_1(x; \mathbf{a}) + \exp(\text{Polinom}_2(x; \mathbf{b}))$$

za koje su Gompertzov i Makehamov model specijalni slučajevi.

Pretpostavka: Sirove stope su dobivene pomoću Poissonovog modela, a parametri $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ su procijenjeni metodom maksimane vjerodostojnosti.

Napomena 1. Za praktičnu upotrebu izglađenih vrijednosti statistički kriteriji odabira formule nisu dovoljni
$\rightarrow$ potrebno je ispitati rezultat i sa stanovišta *poznatih činjenica o ponašanju smrtnosti*

Npr. da je:
– smrtnost muškaraca veća nego žena,
– smrtnost osiguranika životnih osiguranja manja nego u općoj populaciji,
– smrtnost osoba koje su nedavno kupile policu životnog osiguranja manja od onih koji ju dugo imaju

$\rightarrow$ potrebno je ispitati rezultat i sa stanovišta *mogućeg financijskog rizika*

(problem potcijenjene ili precijenjene smrtnosti)

Napomena 2. Izglađene tablice smrtnosti koriste se za primjenu na *buduću* smrtnost, a baziraju se na *prošlom* iskustvu smrtnosti.
$\rightarrow$ Dakle, potrebno je znati *trend* smrtnosti.

Npr., ako se smrtnost smanjuje (u stabilnim i ekonomski razvijenim društvima), tada je nužno *projicirati* buduće smanjenje smrtnosti (to je problem za mirovinska osiguranja).

Koraci u procesu odabira modela/izglađivanja:

1. Odabir jedne ili više različitih formula za izglađivanje (predanalizom podataka, iz prethodnog/očekivanog iskustva,...)

2. Odabir statističkog modela i metode procjene parametara (ML, LS, minimu χ^2,...)

3. Testirati prilagođeni model pomoću:
– statističkih testova
– poželjnih svojstava obzirom na primjenu

$\rightarrow$ odabire se najbolji model

9.2 Izglađivanje pomoću standardnih tablica

– kada imamo podataka iz nekoliko (*malo*) različitih dobi $x_1, \ldots, x_m$
– kada je razumno pretpostaviti da se smrtnost izučavane grupe *ponaša kao* neka populacija za koju postaje *standardne tablice smrtnosti*

$\rightarrow$ tada sirove stope možemo izgladiti pomoću tih standardnih tablica smrtnosti

– *koja formula*?

9.3 Grafičko izglađivanje

– radi se o *gotovo prostoručnom* povlačenju odgovarajuće glatke krivulje kroz točke $(x, \widehat{q}_x)$ ili $(x, \widehat{\mu}_x)$ ili u ovisnosti o nekim standardnim veličinama

$\rightarrow$ mana: nepreciznost, prednost: brzina

Napomene.

(a) stope smrtnosti treba prikazivati u logaritamskoj skali (jer se kreću u rasponu od $< 10^{-3}$ do $> 10^{-1}$)

(b) ako su podaci rijetki, treba ih grupirati u dobne razrede

(c) glatka krivulja mora prolaziti kroz barem $0.95m$ intervala pouzdanosti 95% za m veličina koje izglađujemo

10. Izloženost riziku

Primjer. U tablici se nalaze podaci o osiguranicima dobi x na zadnji rođendan, na dane 1.1.1999., 1.1.2000. i 1.1.2001. Broj umrlih je klasificiran obzirom na dob na najbliži rođendan u trenutku smrti. Prikazani podaci su dio istraživanja smrtnosti osiguranika osiguranih za slučaj smrti nekog OD.

Neka su: $t_0 = 1.1.1999.$, $t_1 = 1.1.2000.$, $t_2 = 1.1.2001.$

x	$P_x(t_0)$	$P_x(t_1)$	$P_x(t_2)$	$d_x(1999)$	$d_x(2000)$
40	473	512	491	17	18
41	450	470	482	20	18
42	490	460	480	21	19

Pretpostavljamo da su intenziteti smrtnosti za sve dobi konstantni u razdoblju $[t_0, t_2]$.

(i) Izvedite formulu za procjenu intenziteta smrtnosti za osobe dobi x na najbliži rođendan.
(ii) Pomoću dobivene formule procijenite μ_{41} i μ_{42}.

11. Definicija i procjena funkcija smrtnosti s odabirom

Primjer. Tablica A 1967/70 ($s = 2$)

Uvjetna vjerojatnost da osoba pristupne dobi 50 ne doživi dob 51 je:

$$\begin{array}{rlcll} (i) & q_{[50]} & = & 0.00286243 & \text{za } \textit{novog} \text{ pristupnika} \\ (ii) & q_{[49]+1} & = & 0.00351979 & \text{za } \textit{lanjskog} \text{ pristupnika} \\ (ii) & q_{48+2} & = & 0.00478880 & \text{za } \textit{starog} \text{ osiguranika.} \end{array}$$

12. Izračunavanje vrijednosti osiguranja i renti

13. Profit od smrtnosti. Theilova diferencijalna jednadžba

Binomni model:
- ne uzima u obzir vremena smrti
- ako imamo podatke o vremenima smrti, neefikasan je (ako je μ malo, znatan dio informacije je u *broju* smrti, dok je za veliki μ *vrijeme* smrti informativnije)
- $\widehat{q}_x$ ima veću varijancu nego u modelu dva stanja
- baza za neparametarsku procjenu $F_x(t)$
- parametarski model za smrtnost duž dobnog intervala $[x, x+1]$
- kompliciran je za proširenje na modele više stanja

Poissonov model:
- dobra aproksimacija za modele više stanja (ako je μ malo)
- baza za neparametarsku procjenu μ_{x+t}
- parametarski model za smrtnost duž dobnog intervala $[x, x+1]$
- jednostavno se proširuje na modele više smanjenja, ali ne i na modele s povećanjem

Modeli više stanja:

- najprimjereniji za točne podatke

Statistička svojstva MLE po modelima:

(a) U modelu više stanja MLE je konzistentan i asimptotski nepristran, varijanca je asimptotski poznata (aproksimacija je dobra za $d_x \leq 10$)
(b) U Poissonovom modelu MLE je konzistentan i nepristran, varijanca se racuna egzaktno za μ točno, izraz za procjenitelja je isti kao u (a)
(c) U naivnom binomnom modelu, MLE je konzistentan i nepristran, varijanca je funkcija prave vrijednosti od q_x

Istraživanje ljudske smrtnosti $\rightarrow$ intenziteti smrtnosti su dovoljno mali da se svi modeli mogu primijeniti sa zadovoljavajućim rezultatima.

Mnogi drugi fenomeni smanjenja/uvećanja se pojavljuju u aktuarskom poslu t.d. se preferiraju *modeli više stanja*.

Primjer. Istraživana je smrtnost grupe osoba između dobi 60 i 61 godine. Podaci:

osoba	dob na početku opažanja	dob pri izlasku s opažanja	razlog izlaska
1	60 g 0 m	60 g 6 m	odustajanje
2	60 g 1 m	61 g 0 m	prestanak op.
3	60 g 1 m	60 g 3 m	smrt
4	60 g 2 m	61 g 0 m	prestanak op.
5	60 g 3 m	60 g 9 m	smrt
6	60 g 4 m	61 g 0 m	prestanak op.
7	60 g 5 m	60 g 11 m	smrt
8	60 g 7 m	61 g 0 m	prestanak op.
9	60 g 8 m	60 g 10 m	smrt
10	60 g 9 m	61 g 0 m	prestanak op.

Zadatak:

(i) Procijenite q_{60} aktuarskom procjenom

(ii) Procijenite q_{60} pomoću modela dva stanja

8. Izglađivanje i statistički testovi

8.1 Uvod

Potpuno istraživanje smrtnosti $\rightarrow$ obuhvaća čitav životni vijek

$\Rightarrow$ Pret. da imamo podatke za dobi

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_m$$

i to:

(a) ako koristimo Poissonov model:

- broj smrti d_x
- centralnu izloženost riziku E_x^c
- *sirove* procjene $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$

Statistike:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\mu}_{x+\frac{1}{2}} & \dot{\sim} & N(\mu_{x+\frac{1}{2}}, \frac{\mu_{x+\frac{1}{2}}}{E_x^c}) \\ D_x & \dot{\sim} & N(E_x^c \mu_{x+\frac{1}{2}}, E_x^c \mu_{x+\frac{1}{2}}) \end{array}$$

(b) ako koristimo binomni model:

- broj smrti d_x
- početnu izloženost riziku $E_x \approx E_x^c + \frac{1}{2} d_x$
- *sirove* procjene $\widehat{q}_x$

Statistike:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{q}_x & \dot{\sim} & N(q_x, \frac{q_x(1-q_x)}{E_x}) \\ D_x & \dot{\sim} & N(E_x q_x, E_x q_x(1-q_x)) \end{array}$$

8.2 Usporedba s drugim iskustvom

Imamo sirove procjene $\widehat{q}_x$ ili $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ za $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$ podataka osiguranika OD
$\to$ želimo ih usporediti s nekim poznatim iskustvom smrtnosti.

(a) *Je li to iskustvo konzistentno s prijašnjim?*
(Važno za ispravno vrednovanje budućih premija.)

(b) *Je li opažena smrtnost konzistentna s objavljenim standardnim tablicama?*
(Važno ukoliko OD namjerava vrednovati police koristeći te tablice.)

Standardne tablice $\leftarrow$ objavljene tablice smrtnosti koje se zasnivaju na velikom broju podataka

Na primjer,

1. Nacionalne tablice smrtnosti baziraju se na popisu stanovništva
2. Tablice koje se zasnivaju na podacima OD-a za životna osiguranja
(u UK: *Continuous Mortality Investigation Bureau* (CMIB))

Želimo testirati hipoteze:
Jesu li standardne tablične veličine q_x^s ili μ_x^s prave vrijednosti stopa ili intenziteta smrtnosti za svaku opažanu dob x?

(a) Poissonov model:

$$H_0: \quad \mu_{x+\frac{1}{2}} = \mu^s_{x+\frac{1}{2}}, \quad x = x_1, \ldots, x_m$$

$$D_x \overset{H_0}{\dot{\sim}} N(\mu^s_{x+\frac{1}{2}}, \frac{\mu^s_{x+\frac{1}{2}}}{E_x^c})$$

(b) binomni model:

$$H_0: \quad q_x = q_x^s, \;\; x = x_1, \ldots, x_m$$

$$D_x \overset{H_0}{\dot{\sim}} N(E_x q_x^s, E_x q_x^s(1 - q_x^s))$$

8.3 Izglađivanje

- procjene $\widehat{q}_x$ i $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ nisu glatke funkcije dobi x
- računaju se iz uzorka
- razlika očekivanih i procijenjenih vrijednosti su slučajne pogreške

$\mathring{q}_x$, $\mathring{\mu}_{x+\frac{1}{2}} \leftarrow$ *izglađene procjene*

8.4 Razlozi za izglađivanje

- Intuitivno očekujemo da su q_x i μ_x glatke funkcije dobi (to je pretpostavka iako empirijska istraživanja upućuju na nju)
- $\widehat{q}_x$ i $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ sadrže informacije o susjednim vrijednostima u dobima $x-1$ i $x+1$
- Izglađivanjem se smanjuje slučajna greška.
- Zbog poslovne prakse je važno da su izvedene veličine (npr. premije) glatke.

Važno:

- Nikada se opažene, sirove veličine ne koriste za izračunavanje izvedenih financijskih veličina.

- Izglađivanjem se ne može eliminirati pristranost zbog loše prikupljenih ili opažanih podataka.

8.5 Poželjna svojstva izglađivanja

(a) glatkoća

(b) prilagođenost podacima

(c) prikladnost za upotrebu

- u osig. života se smrtnost ne smije *potcijeniti*
- u mirovinskom osig. se smrtnost ne smije *pre-cijeniti*

8.6 Testiranje glatkoće

Izglađene funkcije $\mathring{q}_x$ ili $\mathring{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ su *dovoljno glatke* ako su njihove treće diferencije
- male po iznosu u odnosu na vrijednosti funkcije
- mijenjaju se regularno.

Mnoge metode izglađivanja daju upravo takve funkcije.

8.7 Testovi prilagodbe podacima

Pretpostavljamo:
- D_x, $x = x_1, \ldots, x_m$ su nezavine s.v.

Testiramo:
- hipoteze o prilagođenosti standardnim tablicama
- izglađenost, tj.

$$H_0: \; q_x = \overset{\circ}{q}_x, \; x = x_1, \ldots, x_m$$

ili

$$H_0: \; \mu_{x+\frac{1}{2}} = \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}, \; x = x_1, \ldots, x_m$$

Podaci: $d_{x_1}, d_{x_2}, \ldots, d_{x_m}$

Standardiziramo podatke u skladu sa
- hipotezom H_0
- modelom za D_x (binomni ili Poissonovi)

Npr. za Poissonov model i $H_0 : q_x = \mathring{q}_x$, $x = x_1, \ldots, x_m$:

$$z_x := \frac{d_x - E_x \, \mathring{q}_x}{\sqrt{E_x \, \mathring{q}_x \, (1 - \mathring{q}_x)}}, \quad x = x_1, \ldots, x_m$$

Statistički testovi za standardizirane podatke:

1. χ^2-test
2. Pearsonov χ^2-test
3. Test predznaka
4. Test kumulativnih devijacija
5. Test grupiranih predznaka
6. Test serijskih korelacija

Primjer. Navedeni podaci su preuzeti iz istraživanja smrtnosti muških osiguranika jednog društva za životna osiguranja, u dobi od 25 do 65 godina. Sirove stope smrtnosti su procijenjene pomoću binomnog modela i izglađene su matematičkom formulom. Pretpostavljena funkcija je imala četiri parametra koji su procijenjeni iz podataka metodom maksimalne vjerodostojnosti.

x	E_x	d_x	$\mathring{q}_x$	$E_x \mathring{q}_x$	$E_x \mathring{q}_x (1- \mathring{q}_x)$	z_x
35	14211	17	0.001998	28.39	28.33	-2.14
36	12381	21	0.002061	25.52	25.47	-0.89
37	11704	27	0.002124	24.86	24.81	$+0.43$
38	11038	24	0.002187	24.14	24.09	-0.03
39	10947	29	0.002250	24.63	24.57	$+0.88$
40	13885	21	0.002314	32.13	32.06	-1.97
41	11507	30	0.002378	27.36	27.29	$+0.51$
	85673	169		187.03	186.62	-3.21

Sprovedite testove o prilagodbi izlađenih stopa podacima. Pretpostavljamo da je izglađivanje sprovedeno samo u prikazanim dobima.

9. Metode izglađivanja