Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

Modeli doživljenja

Miljenko Huzak

Svibanj 2006.

1 Uvod

1.1 Životno osiguranje

Ugovori životnog osiguranja su obveze da se

(a) isplati osigurana svota *kada* se neki određeni događaj dogodi (smrt osigurane osobe,...)
(b) isplaćuju rente *sve dok* se određeni događaj ne dogodi (smrt osig. osobe)

vrijeme života osiguranika $\longrightarrow$ *slučajna varijabla*

historija života osiguranika $\longrightarrow$ *slučajni proces*

1.2 Primjeri

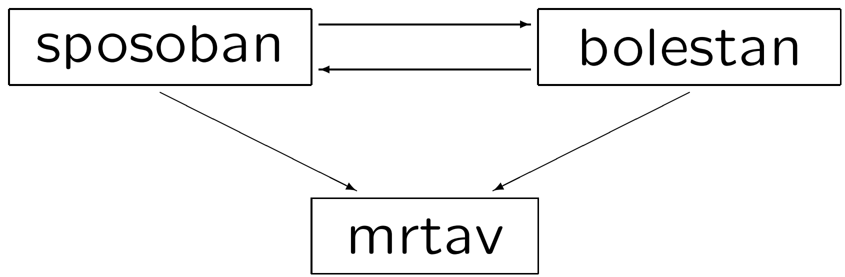
1.2.1 Osiguranje života

$$\boxed{\text{živ}} \longrightarrow \boxed{\text{mrtav}}$$

stanja ={živ, mrtav}

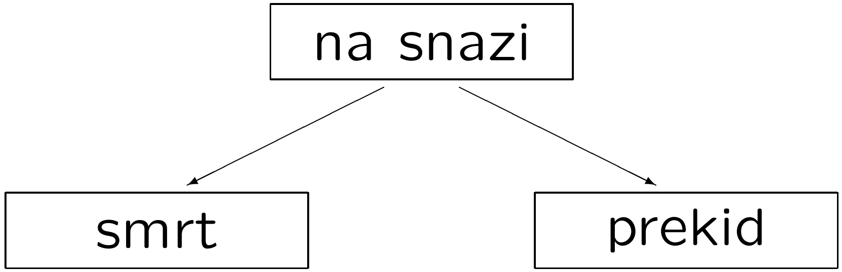
“mrtav” $\leftarrow$ *nepovratno stanje*

1.2.2 Osiguranje od nesposobnosti (za rad)



isplate $\longrightarrow$ u stanju “bolestan”

1.2.3 Smrt i prekid osiguranja



1.2.4 Osiguranje dva života

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X \text{ živ, } Y \text{ živ}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{X \text{ živ, } Y \text{ mrtav}} \arrow[d] \\
\boxed{X \text{ mrtav, } Y \text{ živ}} \arrow[r] & \boxed{X \text{ mrtav, } Y \text{ mrtav}}
\end{tikzcd}$$

isplata $\longrightarrow$ kada druga osoba premine

1.3 Određivanje modela doživljenja

Model za slučajno vrijeme ili historiju života
$\longrightarrow$ *model doživljenja*

Dva pristupa modeliranju doživljenja (osobe dobi x):

1. Model 1: $T_x \longrightarrow F_x(t)$
2. Model 2: Markovljev proces s dva stanja

$$\boxed{\text{živ}} \xrightarrow{\qquad \mu_x \qquad} \boxed{\text{mrtav}}$$

1.4 Procjena i primjena

Za oba modela želimo:

(a) procijeniti parametre modela iz podataka (u Modelu 1: $F_x(t)$, u Modelu 2: μ_x)
(b) primijeniti model za računanje veličina potrebnih u primjeni
(npr. v^{T_x} - sadašnja vrijednost isplate od 1 kn u slučaju smrti $\rightarrow$ E$[v^{T_x}]$, Var$[v^{T_x}]$)

Jednoznačna je veza: $\mu_x \leftrightarrow F_x(t)$

1.5 Plan i sadržaj

- Modeli doživljenja i tablice smrtnosti
- Procjena funkcije distribucije vremena života
- Coxov regresijski model
- Markovljev proces s dva stanja
- Opći Markovljev model
- Binomni i Poissonov model
- Izglađivanje i statistički testovi
- Metode izglađivanja
- Izloženost riziku
- Definicija i procjena funkcija smrtnosti s odabirom
- Izračunavanje vrijednosti osiguranja i renti
- Profit od smrtnosti. Thielova dif. jednadžba

Literatura

1. *Subject* 104: *Survival Models, Core Reading* 2000, Faculty and Institute of Actuaries
2. H.U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Swiss Association of Actuaries, Zrich, 1990.
3. Chin Long Chiang, *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*, Wiley, 1968.
4. N.L Bowers et al., *Actuarial Mathematics*, 2nd edition, Society of Actuaries, 1997.
5. S. Haberman, E. Pitacco, *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall, 1999.

6. E. Marubini, M.G. Valsecci, M. Emmerson, *Analysing Survival Data from Clinical Trials and Observational Studies*, Wiley, 1995.
7. B. Benjamin, J.H. Pollard, *The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics*, 3rd edition, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, 1993.
8. R.C. Elandt-Johnson, N.L. Johnson, *Survival Models and Data Analysis*, Wiley, 1980.
9. *Subject* 105: *Actuarial Mathematics 1, Core Reading* 2000, Faculty and Institute of Actuaries

2. Modeli doživljenja i tablice smrtnosti

2.1 Jednostavan model doživljenja (Model 1)

$T =$ trajanje života novorođene osobe
$\rightarrow$ *nepr. sl. varijabla distrib. na* $[0,\omega]$ $(0 < \omega < +\infty)$
$\rightarrow$ $\omega =$ granična dob (100 - 120 godina),

$$\mathrm{P}(T > \omega) = 0$$

$F(t) := \mathrm{P}(T \leq t) \leftarrow$ *funkcija distribucije od* T

$S(t) := \mathrm{P}(T > t) \leftarrow$ *funkcija doživljenja od* T

$$S(t) = 1 - F(t)$$

T_x = buduće vrijeme trajanje života osobe koja je doživjela dob x $(0 \le x \le \omega)$

$F_x(t) := \mathsf{P}(T_x \le t) \qquad (0 \le t \le \omega - x)$

$S_x(t) := \mathsf{P}(T_x > t) \qquad (0 \le t \le \omega - x)$

Veza T_x i T:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathsf{P}(T_x \le t) = \\ &= \mathsf{P}(T \le x + t | T > x) = \frac{\mathsf{P}(x < T \le x + t)}{\mathsf{P}(T > x)} = \\ &= \frac{F(x+t) - F(x)}{S(x)} \end{aligned}$$

Aktuarske oznake:

${}_tq_x := F_x(t) \leftarrow$ (uvjetna) vjerojatnost da osoba ne doživi dob $x+t$ ako je doživjela dob x

${}_tp_x := S_x(t) \leftarrow$ (uvjetna) vjerojatnost da osoba doživi dob $x+t$ ako je doživjela dob x

Kraće: $q_x \equiv {}_1q_x$, $p_x \equiv {}_1p_x$

q_x, ${}_tq_x \leftarrow$ *stope smrtnosti*

Intenzitet smrtnosti u dobi x $(0 \leq x < \omega)$:

$$\mu_x := \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{P}(T \leq x + h | T > x) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} F_x(h)$$

$\Rightarrow$

$$F_x(h) = h \cdot \mu_x + o(h), \;\; h \to 0+$$

Interpretacija: Vjerojatnost smrti upravo nakon navršene dobi x je proporcionalna vremenu smrti nakon x (s intenzitetom μ_x)

Dva izraza za μ_{x+t} $(x \geq 0, t > 0)$:

$$\mu_{x+t} = \text{(po def.)} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{P}(T \leq x+t+h | T > x+t)$$

$$\mu_{x+t} = \cdots = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{P}(T_x \leq t+h | T_x > t)$$

Vrijedi:

$$S_x(t) = \cdots = \frac{S(t+x)}{S(x)} \quad \Leftrightarrow \quad {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_{t+s}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t}}$$

Gustoća od T_x:

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = \cdots = S_x(t) \mu_{x+t}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{f_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}, \quad 0 \leq t \leq \omega - x}$$

$q_x \leftarrow$ *početna stopa smrtnosti*

$m_x := \dfrac{q_x}{\int\limits_0^1 {}_tp_x \, dt} \leftarrow$ *centralna stopa smrtnosti*

$m_x =$ vjerojatnost da osoba koja je živa u dobi od x do $x+1$ umre prije dobi $x+1$

$$\int\limits_0^1 {}_tp_x \, dt = \mathsf{E}[\int\limits_0^1 1_{\{T_x > t\}} \, dt]$$

$=$ srednje vrijeme koje je osoba pristupne dobi x provela u dobnom intervalu $[x, x+1]$

Centralna stopa smrtnosti

$\longrightarrow$ koristi se kod projiciranja smrtnosti

$$t \mapsto \mu_{x+t} \equiv \mu = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad m_x = \mu$$

$$\widehat{m}_x = \frac{\text{broj umrlih}}{\text{ukupno vrijeme živih i pod rizikom}}$$

2.2 Očekivanja potpunog i cjelobrojnog trajanja života

$\mathring{e}_x = \mathsf{E}[T_x] \leftarrow$ *očekivanje potpunog trajanja života osobe dobi* x

$$\mathring{e}_x = \cdots = \int_0^{\omega - x} {}_t p_x \, dt$$

$K_x := [T_x] \leftarrow$*cjelobrojno trajanje života os. dobi* x

$\rightarrow$ diskretna sl. v. s razdiobom:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(K_x = k) &= \mathsf{P}(k \le T_x < k+1) = \\
&= \mathsf{P}(k < T_x \le k+1) = \\
&= {}_kp_x \cdot q_{x+k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, [\omega - x]\}
\end{aligned}$$

$e_x = \mathsf{E}[K_x] \leftarrow$ *očekivanje cjelobrojnog trajanja života osobe dobi* x

$$e_x = \cdots = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} {}_kp_x$$

Aproksimativno je:

$$e_x \approx \overset{\circ}{e}_x + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[T_x] &= \int_0^{\omega-x} t^2\,{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt - \overset{\circ}{e}{}_x^2 \\ \mathrm{Var}[K_x] &= \sum_{k=1}^{[\omega-x]} k^2\,{}_kp_xq_{x+k} - e_x^2 \end{aligned}$$

2.3 Važne formule

$$\boxed{\begin{aligned} {}_tq_x &= \int_0^t {}_sp_x \mu_{x+s}\, ds \\ {}_tp_x &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds\right) \end{aligned}}$$

2.4 Tablice smrtnosti

$\alpha \leftarrow$ početna dob

$\ell_\alpha \leftarrow$ korijen (radix) tablice

Pretp.: $t \mapsto {}_t p_\alpha$ je poznato. Za $x \in [\alpha, \omega]$,

$$\ell_x := \ell_\alpha \cdot {}_{x-\alpha} p_\alpha$$

$\Rightarrow$

$${}_t p_x = \frac{{}_{x-\alpha+t} p_\alpha}{{}_{x-\alpha} p_\alpha} = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

Def. *Tablica smrtnosti* je funkcija $x \mapsto \ell_x$.

Definiramo za $x \in [\alpha, \omega - 1]$,

$$d_x := \ell_x - \ell_{x+1}$$

$d_x =$ očekivani broj smrti (od ℓ_α osoba) između dobi x i $x+1$

Vrijedi:

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{\ell_x}{\ell_{x+1}} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x}$$

$$\begin{aligned} d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{x+n-1} &= \ell_x - \ell_{x+n} \\ d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{\omega-1} &= \ell_x \end{aligned}$$

Još aktuarskih oznaka:

$$_{n|m}q_x := \mathsf{P}(n < T_x \leq n + m)$$

$_{n|m}q_x =$ vjeroj. da osoba dobi x doživi dob $x + n$, ali premine u sljedećih m godina

Vrijedi:

$$_{n|m}q_x = {}_np_x \cdot {}_mq_{x+n} = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n-m}}{\ell_x}$$

Specijalno:

$$_{n|1}q_x = (\text{oznaka}) = {}_{n|}q_x = \mathsf{P}(n < T_X \leq n + 1)$$

$$ {}_{n|}q_x = {}_np_x \cdot q_{x+n} = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n+1}}{\ell_x} $$

$\Rightarrow$

$$ \mathsf{P}(K_x = k) = {}_kp_x \cdot q_{x+k} = {}_{k|}q_x $$

Primjer. U nekoj populaciji intenzit smrtnosti je 0.025 konstantno u svim dobima. Izračunajte:

(i) vjerojatnost da će novorođena osoba doživjeti dob od 5 godina,

(ii) vjerojatnost da će osoba točne dobi 10 umrijeti prije navršenih 12 godina,

(iii) vjerojatnost da će osoba točne dobi 5 umrijeti između 10. i 12. godine,

(iv) očekivanje potpunog trajanja života novorođene osobe,

(v) očekivanje cjelobrojnog trajanja života novorođene osobe.

2.5 Aproksimacija tablice smrtnosti u necjelobrojnim dobima

Na primjer,

$$ {}_{2.5}p_{37.5} = ? $$

$${}_{2.5}p_{37.5} = {}_{0.5}p_{37.5} \cdot {}_{2}p_{38}$$

$\to$ (dvije) metode za aproksimaciju unutar $[x, x+1]$

Prva metoda: bazira se na pretpostavci da je *smrtnost uniformno distribuirana duž* $[x, x+1]$ (UDD $\equiv$ *Uniform Distribution of Deaths*), tj.

$$f_x(t) = {}_tp_x \mu_{x+t} = c = \text{konst.}, \quad t \in [x, x+1]$$

$\Rightarrow$

$${}_tq_x = t \cdot q_x$$

$${}_{t-s}q_{x+s} = \frac{(t-s) \cdot q_x}{1 - s \cdot q_x}$$

za x cjelobrojno i $0 \le s < t \le 1$

Druga metoda: bazira se na pretpostavci da je *intenzitet smrtnosti konstantan duž* $[x, x+1\rangle$, tj.

$$\mu_{x+t} = \mu = \text{konst.}, \quad 0 \leq t < 1$$

$\Rightarrow$

$${}_tp_x = e^{-\mu t}$$

$${}_{t-s}p_{x+s} = p_x^{t-s}$$

za x cjelobrojno i $0 \leq s < t \leq 1$

2.6 Tablice smrtnosti s odabirom

q_x, $\mu_x \longleftarrow$ ovise o dobi x i *vremenu od trenutka kada je sklopljen ugovor o osiguranju* ($=$ vrijeme pripadnosti grupi)

Na *kraju*, nakon određenog vremena, smrtnost opet ovisi samo o dobi.

2.7 Svojstva smrtnosti

2.8 Jednostavni zakoni smrtnosti

Gompertzov zakon:

$$\mu_x = B \cdot C^x$$

$\leftarrow$ dobro opisuje smrtnost srednjih i zrelih godina

Makehamov zakon:

$$\mu_x = A + B \cdot C^x$$

$\leftarrow$ slobodni član $\leftarrow$ model za slučajnu smrt zbog nezgode (ne ovisi o dobi)

Gompertzov zakon:

$$ {}_t p_x = g^{C^x (C^t - 1)} $$

Makehamov zakon:

$$ {}_t p_x = s^t \cdot g^{C^x (C^t - 1)} $$

gdje su

$$ g = \exp\left(-\frac{B}{\log C}\right), \quad s = e^{-A} $$

3. Procjena distribucije vremena života

3.1 Uvod

Želimo procijeniti $F(t)$ od T
$\rightarrow$ *neparametarska procjena*!

"Najjednostavnija metoda": opaža se vrlo velik broj novorođenih osoba do njihove smrti.

Problemi s "najjednostavnijom" metodom:

1. ako i nađemo dovoljno velik uzorak, trebali bi ga opažati barem 100 godina
2. osobe mogu napustiti opažanje i prije eventualne smrti (zbog raznih razloga)

$\rightarrow$ *cenzurirani podaci*

3.2 Mehanizmi cenzuriranja

Vrste cenzuriranja:

1. desno cenzuriranje
2. lijevo cenzuriranje
3. intervalno cenzuriranje
4. slučajno cenzuriranje
5. neinformativno cenzuriranje
6. cenzuriranje tipa I
7. cenzuriranje tipa II

3.3 Kaplan - Meierov procjenitelj

7. Binomni i Poissonov model

7.4 Usporedba modela više stanja, binomnog i Poissonovog

Modele uspoređujemo obzirom na:

1. reprezentativnosti
2. jednostavnosti prilagodbe podacima
3. mogućnost proširenja na druge probleme (a ne samo na modeliranje smrtnosti ljudi)

Binomni model:

- ne uzima u obzir vremena smrti
- ako imamo podatke o vremenima smrti, neefikasan je (ako je μ malo, znatan dio informacije je u *broju* smrti, dok je za veliki μ *vrijeme* smrti informativnije)
- $\widehat{q}_x$ ima veću varijancu nego u modelu dva stanja
- baza za neparametarsku procjenu $F_x(t)$
- parametarski model za smrtnost duž dobnog intervala $[x, x+1]$
- kompliciran je za proširenje na modele više stanja

Poissonov model:

- dobra aproksimacija za modele više stanja (ako je μ malo)
- baza za neparametarsku procjenu μ_{x+t}
- parametarski model za smrtnost duž dobnog intervala $[x, x+1]$
- jednostavno se proširuje na modele više smanjenja, ali ne i na modele s povećanjem

Modeli više stanja:

- najprimjereniji za točne podatke

Statistička svojstva MLE po modelima:

(a) U modelu više stanja MLE je konzistentan i asimptotski nepristran, varijanca je asimptotski poznata (aproksimacija je dobra za $d_x \leq 10$)

(b) U Poissonovom modelu MLE je konzistentan i nepristran, varijanca se racuna egzaktno za μ točno, izraz za procjenitelja je isti kao u (a)

(c) U naivnom binomnom modelu, MLE je konzistentan i nepristran, varijanca je funkcija prave vrijednosti od q_x

Istraživanje ljudske smrtnosti $\longrightarrow$ intenziteti smrtnosti su dovoljno mali da se svi modeli mogu primijeniti sa zadovoljavajućim rezultatima.

Mnogi drugi fenomeni smanjenja/uvećanja se pojavljuju u aktuarskom poslu t.d. se preferiraju *modeli više stanja*.

8. Izglađivanje i statistički testovi

8.1 Uvod

Potpuno istraživanje smrtnosti $\longrightarrow$ obuhvaća čitav životni vijek

$\Rightarrow$ Pret. da imamo podatke za dobi

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_m$$

i to:

(a) ako koristimo Poissonov model:

- broj smrti d_x
- centralnu izloženost riziku E_x^c
- *sirove* procjene $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$

Statistike:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\mu}_{x+\frac{1}{2}} & \dot{\sim} & N(\mu_{x+\frac{1}{2}}, \frac{\mu_{x+\frac{1}{2}}}{E_x^c}) \\ D_x & \dot{\sim} & N(E_x^c \mu_{x+\frac{1}{2}}, E_x^c \mu_{x+\frac{1}{2}}) \end{array}$$

(b) ako koristimo binomni model:

- broj smrti d_x
- početnu izloženost riziku $E_x \approx E_x^c + \frac{1}{2} d_x$
- *sirove* procjene $\widehat{q}_x$

Statistike:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{q}_x & \dot{\sim} & N(q_x, \frac{q_x(1-q_x)}{E_x}) \\ D_x & \dot{\sim} & N(E_x q_x, E_x q_x(1-q_x)) \end{array}$$

8.2 Usporedba s drugim iskustvom

Imamo sirove procjene $\widehat{q}_x$ ili $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ za $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$ podataka osiguranika OD
$\longrightarrow$ želimo ih usporediti s nekim poznatim iskustvom smrtnosti.

(a) *Je li to iskustvo konzistentno s prijašnjim?*
(Važno za ispravno vrednovanje budućih premija.)

(b) *Je li opažena smrtnost konzistentna s objavljenim standardnim tablicama?*
(Važno ukoliko OD namjerava vrednovati police koristeći te tablice.)

Standardne tablice $\longleftarrow$ objavljene tablice smrtnosti koje se zasnivaju na velikom broju podataka

Na primjer,

1. Nacionalne tablice smrtnosti baziraju se na popisu stanovništva
2. Tablice koje se zasnivaju na podacima OD-a za životna osiguranja
(u UK: *Continuous Mortality Investigation Bureau* (CMIB))

Želimo testirati hipoteze:
Jesu li standardne tabličen veličine q_x^s ili μ_x^s prave vrijednosti stopa ili intenziteta smrtnosti za svaku opažanu dob x?

(a) Poissonov model:

$$H_0: \;\; \mu_{x+\frac{1}{2}} = \mu^s_{x+\frac{1}{2}}, \;\; x = x_1, \dots, x_m$$

$$D_x \overset{H_0}{\dot{\sim}} N(\mu^s_{x+\frac{1}{2}}, \frac{\mu^s_{x+\frac{1}{2}}}{E_x^c})$$

(b) binomni model:

$$H_0: \quad q_x = q_x^s, \quad x = x_1, \ldots, x_m$$

$$D_x \overset{H_0}{\dot{\sim}} N(E_x q_x^s, E_x q_x^s(1 - q_x^s))$$

8.3 Izglađivanje

- procjene $\widehat{q}_x$ i $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ nisu glatke funkcije dobi x
- računaju se iz uzorka
- razlika očekivanih i procijenjenih vrijednosti su slučajne pogreške

$\overset{\circ}{q}_x$, $\overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ $\leftarrow$ *izglađene procjene*

8.4 Razlozi za izglađivanje

- Intuitivno očekujemo da su q_x i μ_x glatke funkcije dobi (to je pretpostavka iako empirijska istraživanja upućuju na nju)
- $\widehat{q}_x$ i $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ sadrže informacije o susjednim vrijednostima u dobima $x-1$ i $x+1$
- Izglađivanjem se smanjuje slučajna greška.
- Zbog poslovne prakse je važno da su izvedene veličine (npr. premije) glatke.

Važno:

- Nikada se opažene, sirove veličine ne koriste za izračunavanje izvedenih financijskih veličina.

- Izglađivanjem se ne može eliminirati pristranost zbog loše prikupljenih ili opažanih podataka.

8.5 Poželjna svojstva izglađivanja

(a) glatkoća
(b) prilagođenost podacima
(c) prikladnost za upotrebu
- u osig. života se smrtnost ne smije *potcijeniti*
- u mirovinskom osig. se smrtnost ne smije *precijeniti*

8.6 Testiranje glatkoće

Izglađene funkcije $\mathring{q}_x$ ili $\mathring{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ su *dovoljno glatke* ako su njihove treće diferencije
- male po iznosu u odnosu na vrijednosti funkcije
- mijenjaju se regularno.

Mnoge metode izglađivanja daju upravo takve funkcije.

8.7 Testovi prilagodbe podacima

Pretpostavljamo:
- D_x, $x = x_1, \ldots, x_m$ su nezavine s.v.

Testiramo:
- hipoteze o prilagođenosti standardnim tablicama
- izglađenost, tj.

$$H_0 : \; q_x = \overset{\circ}{q}_x, \; x = x_1, \ldots, x_m$$

ili

$$H_0 : \; \mu_{x+\frac{1}{2}} = \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}, \; x = x_1, \ldots, x_m$$

Podaci: $d_{x_1}, d_{x_2}, \ldots, d_{x_m}$

Standardiziramo podatke u skladu sa
- hipotezom H_0
- modelom za D_x (binomni ili Poissonovi)

Npr. za Poissonov model i H_0 : $q_x = \overset{\circ}{q}_x$, $x = x_1,\ldots,x_m$:

$$z_x := \frac{d_x - E_x \, \overset{\circ}{q}_x}{\sqrt{E_x \, \overset{\circ}{q}_x \, (1 - \overset{\circ}{q}_x)}}, \quad x = x_1, \ldots, x_m$$

Statistički testovi za standardizirane podatke:

1. χ^2-test
2. Pearsonov χ^2-test
3. Test predznaka
4. Test kumulativnih devijacija
5. Test grupiranih predznaka
6. Test serijskih korelacija