12. Izračunavanje vrijednosti osiguranja i renti

12.1 Vrste ugovora osiguranja života

1. Doživotno osiguranje za slučaj smrti

– osigurana svota S isplaćuje se *nakon* smrti osiguranika

(a) Sadašnja vrijednost (SV) osig. ako se S isplaćuje *odmah* po smrti:

$$S \cdot v^{T_x}$$

$\rightarrow$ Očekivana sadašnja vrijednost (OSV) uz $S = 1$:

$$\bar{A}_x := \mathsf{E}[v^{T_x}] = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \mu_{x+t} \, dt$$

$\rightarrow$ OSV uz osig. svotu S:

$$S \cdot \bar{A}_x$$

$\rightarrow$ varijanca:

$$\mathsf{Var}[v^{T_x}] = \mathsf{E}[v^{2T_x}] - (\mathsf{E}[v^{T_x}])^2 = {}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2$$

(b) SV osig. ako se isplaćuje *na kraju godine* smrti:

$$S \cdot v^{K_x+1}$$

$\rightarrow$ OSV uz $S = 1$:

$$A_x := \mathsf{E}[v^{K_x+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_x$$

$\rightarrow$ OSV uz osig. svotu S:

$$S \cdot A_x$$

$\rightarrow$ varijanca:

$$\mathsf{Var}[v^{K_x+1}] = \mathsf{E}[v^{2(K_x+1)}] - (\mathsf{E}[v^{K_x+1}])^2 = {}^2A_x - A_x^2$$

2. Osiguranje za slučaj smrti s ograničenim trajanjem

– osig. svota se isplauje ako osiguranik umre prije unaprijed ugovorenog roka (od n god.)

(a) OSV osig. s trenutnom isplatom nakon smrti:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} := \mathsf{E}[v^{T_x} \cdot \mathbb{1}_{\{T_x<n\}}] = \int_0^n v^t{}_t p_x \mu_{x+t}\, dt$$

(b) OSV osig. s isplatom na kraju godine smrti:

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} := \mathsf{E}[v^{K_x+1} \cdot \mathbb{1}_{\{K_x\le n-1\}}] = \sum_{k=0}^{n} v^{k+1}{}_{k|}q_x$$

3. Osiguranje za slučaj doživljenja

– osig. svota se isplaćuje ako je osiguranik doživio istek unaprijed ugovorenog perioda od n god.

– isplata je *odmah* na kraju razdoblja

OSV:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} := \mathsf{E}[v^n \mathbb{1}_{\{T_x>n\}}] = v^n {}_np_x$$

$$\mathsf{Var}[v^n \mathbb{1}_{\{T_x>n\}}] = v^{2n} {}_np_x {}_nq_x$$

4. Mješovito osiguranje

– kombinacija osig. za slučaj smrti s ograničenim trajanjem i doživljenja

SV osiguranja:

$$H = v^{K_x+1} \mathbb{1}_{\{K_x \le n-1\}} + v^n \mathbb{1}_{\{K_n \ge n\}}$$

OSV osiguranja:

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

Varijanca:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{Var}[H] = \\
= \; & \mathsf{E}[(v^{K_x+1}\mathbb{1}_{\{K_x\le n-1\}} + v^n\mathbb{1}_{\{K_n\ge n\}})^2] - (A_{x:\overline{n}|})^2 = \\
= \; & \mathsf{E}[(v^2)^{K_x+1}\mathbb{1}_{\{K_x\le n-1\}} + \\
& \quad +v^{K_x+n+1}\mathbb{1}_{\{K_x\le n-1, K_n\ge n\}} + v^{2n}\mathbb{1}_{\{K_n\ge n\}}] - \\
& \quad -(A_{x:\overline{n}|})^2 = \\
= \; & \mathsf{E}[(v^2)^{K_x+1}\mathbb{1}_{\{K_x\le n-1\}}] + \mathsf{E}[v^{2n}\mathbb{1}_{\{K_n\ge n\}}] - (A_{x:\overline{n}|})^2 \\
= \; & {}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2
\end{aligned}
$$

12.2 Ugovori rentnog osiguranja

1. Doživotna neodgođena (postnumerando) renta

– isplate jedinične rente vrše se *na kraju* svake buduće godine dokle god je osoba živa

Oznaka: $a_{\overline{k}|} = v + v^2 + \cdots + v^k$ $(a_{\overline{0}|} := 0)$
ESV osiguranja:

$$a_x := \mathsf{E}[a_{\overline{K_x}|}] = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\overline{k}|\,k|}q_x = \sum_{j=1}^{\infty} {}_jp_x v^j$$

2. Doživotna prenumerando renta

– jedinične rente se isplaćuju *na početku* svake buduće godine ako je osoba tada živa

Oznaka: $\ddot{a}_{\overline{k}|} = 1 + v + \cdots + v^{k-1}$
ESV osiguranja:

$$\ddot{a}_x := \mathsf{E}[\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|\,k|}q_x = \sum_{j=0}^{\infty} {}_jp_x v^j$$

3. Postnumerando renta s određenim trajanjem

OSV jedinične rente:

$$a_{x:\overline{n}|} = \mathsf{E}[a_{\overline{K_x \wedge n}|}] = \sum_{k=1}^{n} a_{\overline{k}|\,k|}q_x = \sum_{j=1}^{n} {}_jp_x v^j$$

4. Prenumerando renta s određenim trajanjem

OSV jednične rente:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathrm{E}[a_{\overline{(K_x+1)\wedge n}|}] = \sum_{k=1}^{n} \ddot{a}_{\overline{k+1}|\,k|}q_x = \sum_{j=0}^{n-1} {}_jp_x v^j$$

12.3 Veze među OSV-i osiguranja (zadatak!)

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= 1 + a_x \\
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 + a_{x:\overline{n-1}|} \\
a_x &= v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1} \\
a_{x:\overline{n}|} &= v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n}|}
\end{aligned}$$

Primjer. Pokažite:

(i) $A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x$ gdje je $d = i/(i+1)$

(ii) $\mathrm{Var}[\ddot{a}_{\overline{K_x + 1}|}] = \frac{1}{d^2}({}^2A_x - (A_x)^2)$

Rješenje:

(i):

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \mathsf{E}[\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}] = \mathsf{E}\left[\frac{1-v^{K_x+1}}{d}\right] = \\ &= \frac{1}{d}(1-\mathsf{E}[v^{K_x+1}]) = \frac{1}{d}(1-A_x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_x = 1 + d \cdot \ddot{a}_x$

(ii)

$$\text{Var}[\ddot{a}_{K_x+1}] = \text{Var}\left[\frac{1 - v^{K_x+1}}{d}\right] = \frac{1}{d^2}\text{Var}[v^{K_x+1}] =$$
$$= \frac{1}{d^2}({}^2A_x - (A_x)^2)$$

12.4 Odgođene rente i osiguranja

12.5 Aproksimacije neprekidnih veličina

13. Profit od smrtnosti. Theilova diferencijalna jednadžba