Poslijediplomski specijalistički studij aktuarske matematike

Modeli doživljenja

Miljenko Huzak

Svibanj 2020.

1 Uvod

1.1 Životno osiguranje

Ugovori životnog osiguranja su obveze da se

(a) isplati osigurana svota *kada* se neki određeni događaj dogodi (smrt osigurane osobe,...)
(b) isplaćuju rente *sve dok* se određeni događaj ne dogodi (smrt osig. osobe)

vrijeme života osiguranika $\rightarrow$ *slučajna varijabla*

historija života osiguranika $\rightarrow$ *slučajni proces*

1.2 Primjeri

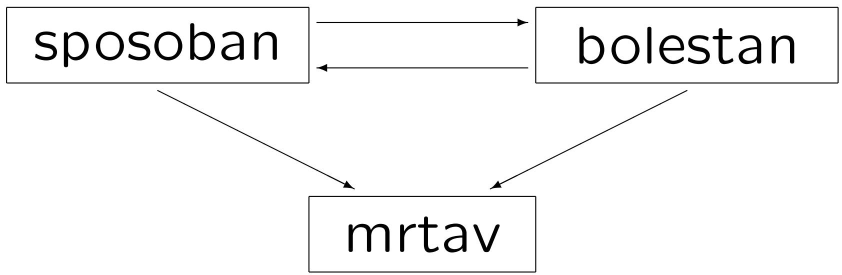
1.2.1 Osiguranje života

$$\boxed{\text{živ}} \longrightarrow \boxed{\text{mrtav}}$$

stanja $=$ {živ, mrtav}

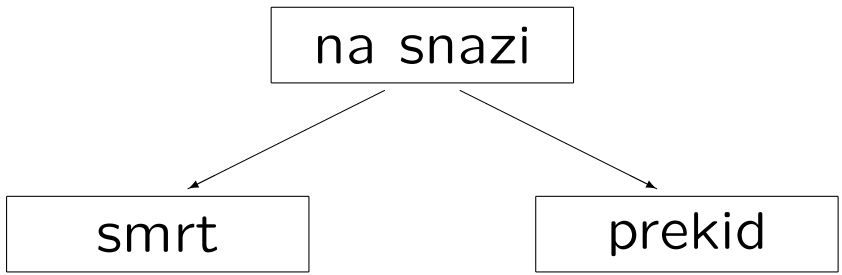
"mrtav" $\leftarrow$ *nepovratno stanje*

1.2.2 Osiguranje od nesposobnosti (za rad)



isplate $\rightarrow$ u stanju "bolestan"

1.2.3 Smrt i prekid osiguranja



1.2.4 Osiguranje dva života

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X \text{ živ, } Y \text{ živ}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{X \text{ živ, } Y \text{ mrtav}} \arrow[d] \\
\boxed{X \text{ mrtav, } Y \text{ živ}} \arrow[r] & \boxed{X \text{ mrtav, } Y \text{ mrtav}}
\end{tikzcd}$$

isplata $\rightarrow$ kada druga osoba premine

1.3 Određivanje modela doživljenja

Model za slučajno vrijeme ili historiju života
$\rightarrow$ *model doživljenja*

Dva pristupa modeliranju doživljenja (osobe dobi x):

1. Model 1: $T_x \rightarrow F_x(t)$
   (T_x je vrijeme života, F_x funk. distrib. od T_x)
2. Model 2: Markovljev proces s dva stanja
   (μ_x je intenzitet prijelaza)

$$\boxed{\text{živ}} \xrightarrow{\quad\quad\mu_x\quad\quad} \boxed{\text{mrtav}}$$

1.4 Procjena i primjena

Za oba modela želimo:

(a) procijeniti parametre modela iz podataka (u Modelu 1: $F_x(t)$, u Modelu 2: μ_x)

(b) primijeniti model za računanje veličina potrebnih u primjeni
(npr. v^{T_x} - sadašnja vrijednost isplate od 1 kn u slučaju smrti $\to$ E$[v^{T_x}]$, Var$[v^{T_x}]$)

Jednoznačna je veza: $\mu_x \leftrightarrow F_x(t)$

1.5 Plan i sadržaj

- Modeli doživljenja i tablice smrtnosti
- Procjena funkcije distribucije vremena života
- Coxov regresijski model
- Markovljev proces s dva stanja
- Opći Markovljev model
- Binomni i Poissonov model
- Izglađivanje i statistički testovi
- Metode izglađivanja
- Izloženost riziku
- Definicija i procjena funkcija smrtnosti s odabirom
- Izračunavanje vrijednosti osiguranja i renti
- Profit od smrtnosti. Thielova dif. jednadžba

Literatura

1. *Subject* 104: *Survival Models, Core Reading* 2000, Faculty and Institute of Actuaries
2. H.U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Swiss Association of Actuaries, Zrich, 1990.
3. Chin Long Chiang, *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*, Wiley, 1968.
4. N.L Bowers et al., *Actuarial Mathematics*, 2nd edition, Society of Actuaries, 1997.
5. S. Haberman, E. Pitacco, *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall, 1999.

6. E. Marubini, M.G. Valsecci, M. Emmerson, *Analysing Survival Data from Clinical Trials and Observational Studies*, Wiley, 1995.
7. B. Benjamin, J.H. Pollard, *The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics*, 3rd edition, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, 1993.
8. R.C. Elandt-Johnson, N.L. Johnson, *Survival Models and Data Analysis*, Wiley, 1980.
9. *Subject* 105: *Actuarial Mathematics 1, Core Reading* 2000, Faculty and Institute of Actuaries

2. Modeli doživljenja i tablice smrtnosti

2.1 Jednostavan model doživljenja (Model 1)

$T =$ trajanje života novorođene osobe
$\rightarrow$ *nepr. sl. varijabla distrib. na* $[0, \omega]$ $(0 < \omega < +\infty)$
$\rightarrow$ $\omega =$ granična dob (100 - 120 godina),

$$\mathsf{P}(T > \omega) = 0$$

$F(t) := \mathsf{P}(T \leq t) \leftarrow$ *funkcija distribucije od* T

$S(t) := \mathsf{P}(T > t) \leftarrow$ *funkcija doživljenja od* T

$$S(t) = 1 - F(t)$$

T_x = buduće vrijeme trajanje života osobe koja je doživjela dob x $(0 \leq x \leq \omega)$

$F_x(t) := \mathsf{P}(T_x \leq t) \quad (0 \leq t \leq \omega - x)$

$S_x(t) := \mathsf{P}(T_x > t) \quad (0 \leq t \leq \omega - x)$

Veza T_x i T:

$$
\begin{aligned}
F_x(t) &= \mathsf{P}(T_x \leq t) = \\
&= \mathsf{P}(T \leq x + t | T > x) = \frac{\mathsf{P}(x < T \leq x + t)}{\mathsf{P}(T > x)} = \\
&= \frac{F(x+t) - F(x)}{S(x)}
\end{aligned}
$$

Aktuarske oznake:

${}_tq_x := F_x(t) \leftarrow$ (uvjetna) vjerojatnost da osoba ne doživi dob $x+t$ ako je doživjela dob x

${}_tp_x := S_x(t) \leftarrow$ (uvjetna) vjerojatnost da osoba doživi dob $x+t$ ako je doživjela dob x

Kraće: $q_x \equiv {}_1q_x$, $p_x \equiv {}_1p_x$

q_x, ${}_tq_x \leftarrow$ *stope smrtnosti*

Intenzitet smrtnosti u dobi x $(0 \leq x < \omega)$:

$$\mu_x := \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{P}(T \leq x + h | T > x) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} F_x(h)$$

$\Rightarrow$

$$F_x(h) = h \cdot \mu_x + o(h), \;\; h \to 0+$$

Interpretacija: Vjerojatnost smrti upravo nakon navršene dobi x je proporcionalna vremenu smrti nakon x (s intenzitetom μ_x)

Dva izraza za μ_{x+t} $(x \geq 0, t > 0)$:

$$\mu_{x+t} = (\text{po def.}) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{P}(T \leq x + t + h | T > x + t)$$

$$\mu_{x+t} = \cdots = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \mathsf{P}(T_x \leq t + h | T_x > t)$$

Vrijedi:

$$S_x(t) = \cdots = \frac{S(t+x)}{S(x)} \iff {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_{t+s}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t}}$$

Gustoća od T_x:

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = \cdots = S_x(t)\mu_{x+t}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{f_x(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}, \quad 0 \leq t \leq \omega - x}$$

$q_x \leftarrow$ *početna stopa smrtnosti*

$m_x := \frac{q_x}{\int_0^1 {}_tp_x\, dt} \leftarrow$ *centralna stopa smrtnosti*

$m_x =$ vjerojatnost da osoba koja je živa u dobi od x do $x+1$ umre prije dobi $x+1$

$$\int_0^1 {}_tp_x\, dt = \mathsf{E}[\int_0^1 1_{\{T_x > t\}}\, dt]$$

$=$ srednje vrijeme koje je osoba pristupne dobi x provela u dobnom intervalu $[x, x+1]$

Centralna stopa smrtnosti

$\rightarrow$ koristi se kod projiciranja smrtnosti

$$t \mapsto \mu_{x+t} \equiv \mu = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad m_x = \mu$$

$$\widehat{m}_x = \frac{\text{broj umrlih}}{\text{ukupno vrijeme živih i pod rizikom}}$$

2.2 Očekivanja potpunog i cjelobrojnog trajanja života

$\mathring{e}_x = \mathsf{E}[T_x] \leftarrow$ *očekivanje potpunog trajanja života osobe dobi* x

$$\mathring{e}_x = \cdots = \int_0^{\omega - x} {}_tp_x \, dt$$

$K_x := [T_x]$ ←*cjelobrojno trajanje života os. dobi* x

$\rightarrow$ diskretna sl. v. s razdiobom:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(K_x = k) &= \mathsf{P}(k \leq T_x < k+1) = \\ &= \mathsf{P}(k < T_x \leq k+1) = \\ &= {}_kp_x \cdot q_{x+k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, [\omega - x]\} \end{aligned}$$

$e_x = \mathsf{E}[K_x] \leftarrow$ *očekivanje cjelobrojnog trajanja života osobe dobi* x

$$e_x = \cdots = \sum_{k=1}^{[\omega - x]} {}_kp_x$$

Aproksimativno je:

$$\overset{\circ}{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[T_x] &= \int_0^{\omega-x} t^2 \, {}_tp_x \mu_{x+t} \, dt - \overset{\circ}{e}{}_x^2 \\
\mathrm{Var}[K_x] &= \sum_{k=1}^{[\omega-x]} k^2 \, {}_kp_x q_{x+k} - e_x^2
\end{aligned}$$

2.3 Važne formule

$$\boxed{\begin{aligned} {}_tq_x &= \int\limits_0^t {}_sp_x\mu_{x+s}\,ds \\ {}_tp_x &= \exp(-\int\limits_0^t \mu_{x+s}\,ds) \end{aligned}}$$

2.4 Tablice smrtnosti

$\alpha \leftarrow$ početna dob

$\ell_\alpha \leftarrow$ korijen (radix) tablice

Pretp.: $t \mapsto {}_tp_\alpha$ je poznato. Za $x \in [\alpha, \omega]$,

$$\ell_x := \ell_\alpha \cdot {}_{x-\alpha}p_\alpha$$

$\Rightarrow$

$${}_tp_x = \frac{{}_{x-\alpha+t}p_\alpha}{{}_{x-\alpha}p_\alpha} = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

Def. *Tablica smrtnosti* je funkcija $x \mapsto \ell_x$.

Definiramo za $x \in [\alpha, \omega - 1]$,

$$d_x := \ell_x - \ell_{x+1}$$

$d_x =$ očekivani broj smrti (od ℓ_α osoba) između dobi x i $x+1$

Vrijedi:

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{\ell_x}{\ell_{x+1}} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x}$$

$$\begin{aligned} d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{x+n-1} &= \ell_x - \ell_{x+n} \\ d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{\omega-1} &= \ell_x \end{aligned}$$

Primjer.

Izvod iz *English Life Table No. 12 (Males)*
(u *Formulae and Tables for Actuarial Examinations*)

ENGLISH LIFE TABLE No. 12—MALES

Age x	l_x	d_x	p_x	q_x	μ_x	e_x	Age x
0	100 000	2 449	·975 51	·024 49		68·09	0
1	97 551	153	·998 43	·001 57	·002 10	68·80	1
2	97 398	96	·999 01	·000 99	·001 34	67·90	2
3	97 302	67	·999 31	·000 69	·000 79	66·97	3
4	97 235	60	·999 38	·000 62	·000 63	66·02	4
5	97 175	55	·999 43	·000 57	·000 59	65·06	5
6	97 120	51	·999 48	·000 52	·000 54	64·09	6
7	97 069	47	·999 52	·000 48	·000 50	63·13	7
8	97 022	43	·999 56	·000 44	·000 46	62·16	8
9	96 979	40	·999 59	·000 41	·000 43	61·18	9
10	96 939	38	·999 61	·000 39	·000 40	60·21	10
11	96 901	37	·999 62	·000 38	·000 39	59·23	11
12	96 864	37	·999 62	·000 38	·000 38	58·25	12
13	96 827	40	·999 59	·000 41	·000 39	57·28	13
14	96 787	45	·999 53	·000 47	·000 43	56·30	14
15	96 742	57	·999 41	·000 59	·000 52	55·33	15
16	96 685	75	·999 22	·000 78	·000 67	54·36	16
17	96 610	96	·999 01	·000 99	·000 89	53·40	17
18	96 514	108	·998 88	·001 12	·001 07	52·45	18
19	96 406	113	·998 83	·001 17	·001 15	51·51	19
20	96 293	115	·998 81	·001 19	·001 19	50·57	20
21	96 178	113	·998 82	·001 18	·001 19	49·63	21
22	96 065	110	·998 86	·001 14	·001 16	48·69	22
23	95 955	104	·998 92	·001 08	·001 12	47·74	23
24	95 851	98	·998 98	·001 02	·001 05	46·80	24
25	95 753	95	·999 01	·000 99	·001 00	45·84	25
26	95 658	94	·999 02	·000 98	·000 98	44·89	26
27	95 564	96	·999 00	·001 00	·000 99	43·93	27
28	95 468	99	·998 96	·001 04	·001 02	42·98	28
29	95 369	104	·998 91	·001 09	·001 06	42·02	29
30	95 265	110	·998 85	·001 15	·001 12	41·06	30
31	95 155	115	·998 79	·001 21	·001 18	40·11	31
32	95 040	122	·998 72	·001 28	·001 25	39·16	32
33	94 918	129	·998 64	·001 36	·001 32	38·21	33
34	94 789	137	·998 55	·001 45	·001 40	37·26	34
35	94 652	147	·998 45	·001 55	·001 50	36·31	35
36	94 505	158	·998 33	·001 67	·001 61	35·37	36
37	94 347	171	·998 19	·001 81	·001 74	34·43	37
38	94 176	185	·998 04	·001 96	·001 89	33·49	38
39	93 991	201	·997 86	·002 14	·002 05	32·55	39
40	93 790	220	·997 65	·002 35	·002 24	31·62	40
41	93 570	242	·997 41	·002 59	·002 46	30·70	41
42	93 328	268	·997 13	·002 87	·002 73	29·77	42
43	93 060	297	·996 81	·003 19	·003 03	28·86	43
44	92 763	330	·996 44	·003 56	·003 37	27·95	44
45	92 433	369	·996 01	·003 99	·003 77	27·05	45
46	92 064	412	·995 52	·004 48	·004 23	26·15	46
47	91 652	463	·994 95	·005 05	·004 76	25·27	47
48	91 189	520	·994 30	·005 70	·005 38	24·40	48
49	90 669	584	·993 56	·006 44	·006 07	23·53	49
50	90 085	656	·992 72	·007 28	·006 87	22·68	50
51	89 429	736	·991 77	·008 23	·007 77	21·84	51
52	88 693	825	·990 70	·009 30	·008 78	21·02	52
53	87 868	923	·989 49	·010 51	·009 93	20·21	53
54	86 945	1 029	·988 16	·011 84	·011 21	19·42	54

Primjer.

Funkcija gustoće $f_0(t)$ od vremena života $T \equiv T_0$ po tablici smrtnosti AM80 (vidjeti *Institute and Faculty of Actuaries*)

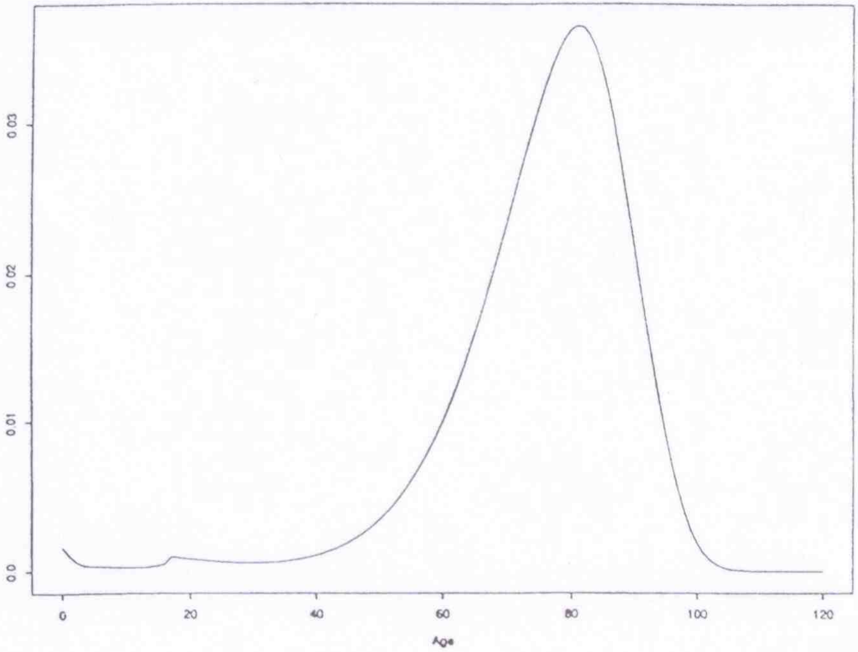


Figure 6

$f_0(t) = {}_t p_0 \, \mu_t$ (AM80 Ultimate Mortality Table)

Još aktuarskih oznaka:

$$ {}_{n|m}q_x := \mathsf{P}(n < T_x \leq n + m) $$

${}_{n|m}q_x$ = vjeroj. da osoba dobi x doživi dob $x + n$, ali premine u sljedećih m godina

Vrijedi:

$$ {}_{n|m}q_x = {}_n p_x \cdot {}_m q_{x+n} = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n-m}}{\ell_x} $$

Specijalno:

$$ {}_{n|1}q_x = (\text{oznaka}) = {}_{n|}q_x = \mathsf{P}(n < T_X \leq n + 1) $$

$$
{}_{n|}q_x = {}_np_x \cdot q_{x+n} = \frac{\ell_{x+n} - \ell_{x+n+1}}{\ell_x}
$$

$\Rightarrow$

$$
\mathsf{P}(K_x = k) = {}_kp_x \cdot q_{x+k} = {}_{k|}q_x
$$

Primjer. U nekoj populaciji intenzit smrtnosti je 0.025 konstantno u svim dobima. Izračunajte:

(i) vjerojatnost da će novorođena osoba doživjeti dob od 5 godina,

(ii) vjerojatnost da će osoba točne dobi 10 umrijeti prije navršenih 12 godina,

(iii) vjerojatnost da će osoba točne dobi 5 umrijeti između 10. i 12. godine,

(iv) očekivanje potpunog trajanja života novorođene osobe,

(v) očekivanje cjelobrojnog trajanja života novorođene osobe.

Rješenja:

(i): ${}_5p_0 = e^{-\int\limits_0^5 \mu_{0+t}dt} = e^{-0.025\cdot 5} = 0.8825$

(ii): ${}_2q_{10} = 1 - {}_2p_{10} = 1 - e^{-\int\limits_0^2 \mu_{10+t}dt} =$
$= 1 - e^{-0.025\cdot 2} = 0.0488$

(iii): ${}_{5|2}q_5 = {}_5p_5 \cdot {}_2q_{10} = e^{-0.025\cdot 5} \cdot 0.0488 = 0.0430$

(iv): $\overset{\circ}{e}_0 = \int\limits_0^\infty {}_tp_0 dt = \int\limits_0^\infty e^{-0.025t}dt = 40$

(v): $\overset{\circ}{e} = \sum_{k=1}^\infty {}_kp_0 = \sum_{k=1}^\infty e^{-0.025k} = 39.5$

2.5 Aproksimacija tablice smrtnosti u necjelobrojnim dobima

Na primjer,

$$ {}_{2.5}p_{37.5} = ? $$

$${}_{2.5}p_{37.5} = {}_{0.5}p_{37.5} \cdot {}_{2}p_{38}$$

$\rightarrow$ (dvije) metode za aproksimaciju unutar $[x, x+1]$

Prva metoda: bazira se na pretpostavci da je *smrtnost uniformno distribuirana duž* $[x, x+1]$ (UDD $\equiv$ *Uniform Distribution of Deaths*), tj.

$$f_x(t) = {}_tp_x \mu_{x+t} = c = \text{konst.}, \quad t \in [x, x+1]$$

$\Rightarrow {}_tq_x = t \cdot q_x$ pa je:

$$_{t-s}q_{x+s} = \frac{(t-s) \cdot q_x}{1 - s \cdot q_x}$$

za x cjelobrojno i $0 \leq s < t \leq 1$.

Npr.: ${}_{0.5}p_{37.5} \approx \frac{0.5 \cdot q_{37}}{1 - 0.5 \cdot q_{37}}$

Druga metoda: bazira se na pretpostavci da je *intenzitet smrtnosti konstantan duž* $[x, x+1\rangle$, tj.

$$\mu_{x+t} = \mu = \text{konst.}, \quad 0 \leq t < 1$$

$\Rightarrow {}_tp_x = e^{-\mu t}$ pa je:

$${}_{t-s}p_{x+s} = p_x^{t-s}$$

za x cjelobrojno i $0 \leq s < t \leq 1$.

Npr.: ${}_{0.5}p_{37.5} \approx (p_{37})^{0.5}$

2.6 Tablice smrtnosti s odabirom

q_x, $\mu_x \leftarrow$ ovise o dobi x i *vremenu od trenutka kada je sklopljen ugovor o osiguranju* (= vrijeme pripadnosti grupi)

Na *kraju*, nakon određenog vremena, smrtnost opet ovisi samo o dobi.

2.7 Svojstva smrtnosti

Na primjeru A80 (males).

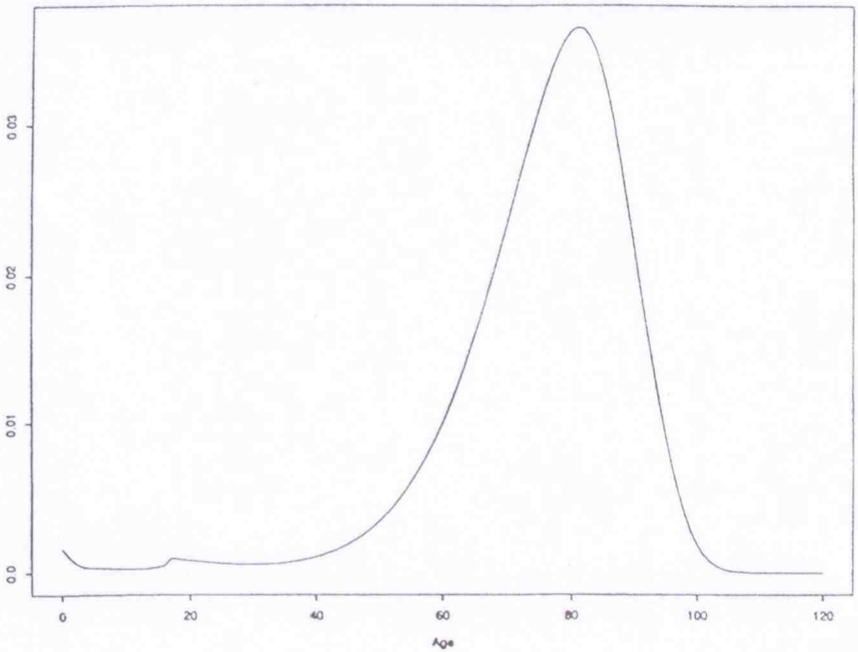


Figure 6

$f_0(t) = {}_t p_0 \, \mu_t$ (AM80 Ultimate Mortality Table)

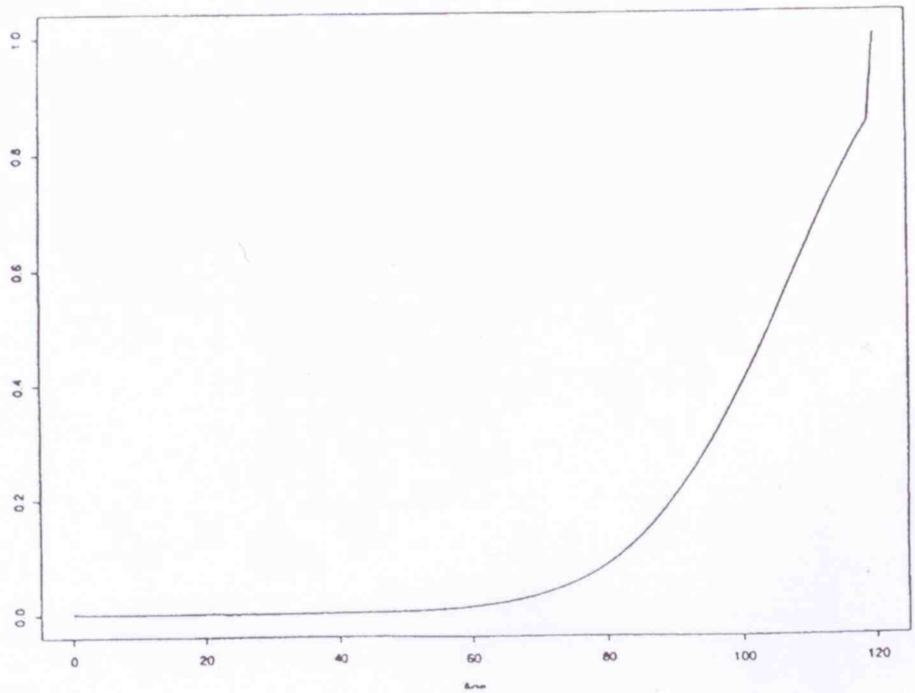


Figure 7

q_x (AM80 Ultimate Mortality Table)

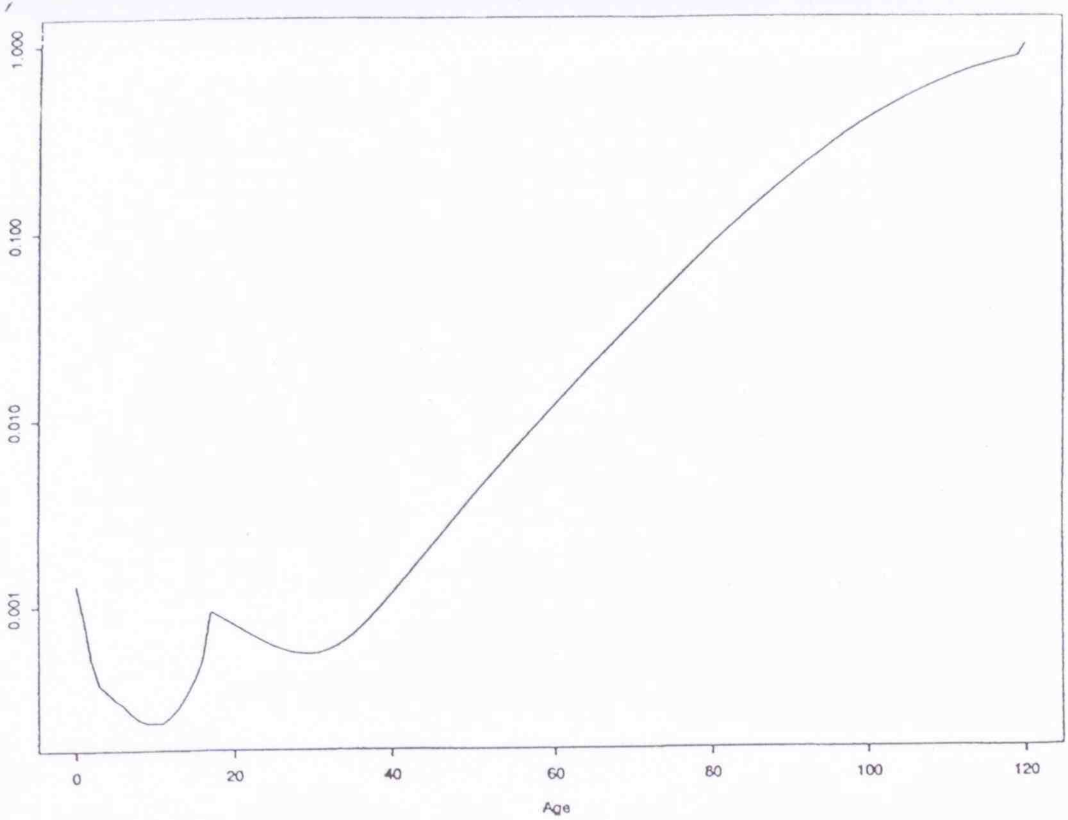


Figure 8

$\log(q_x)$ (AM80 Ultimate Mortality Table)

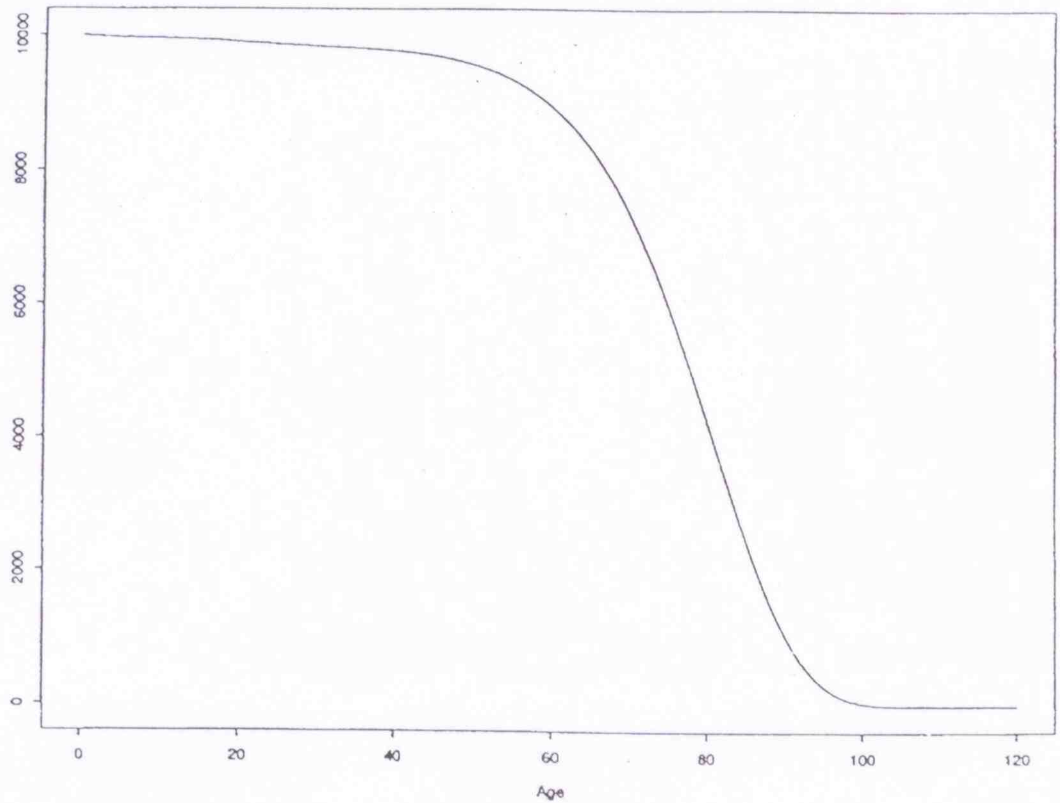


Figure 9

l_x (AM80 Ultimate Mortality Table)

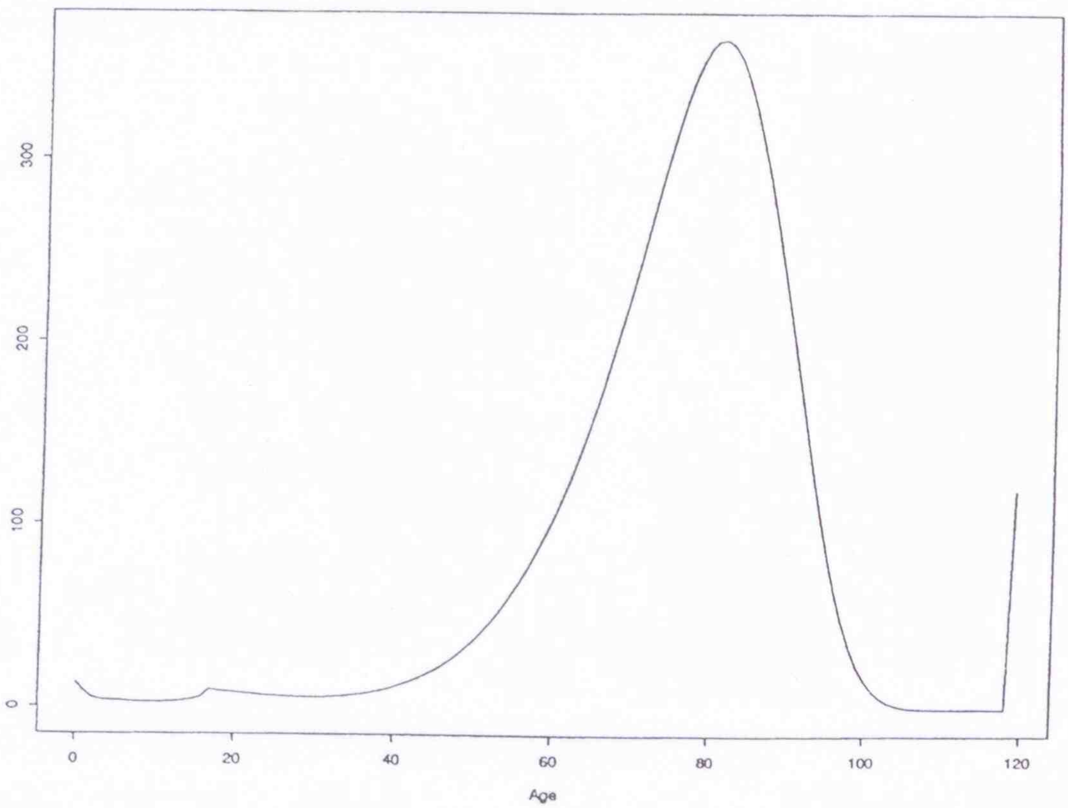
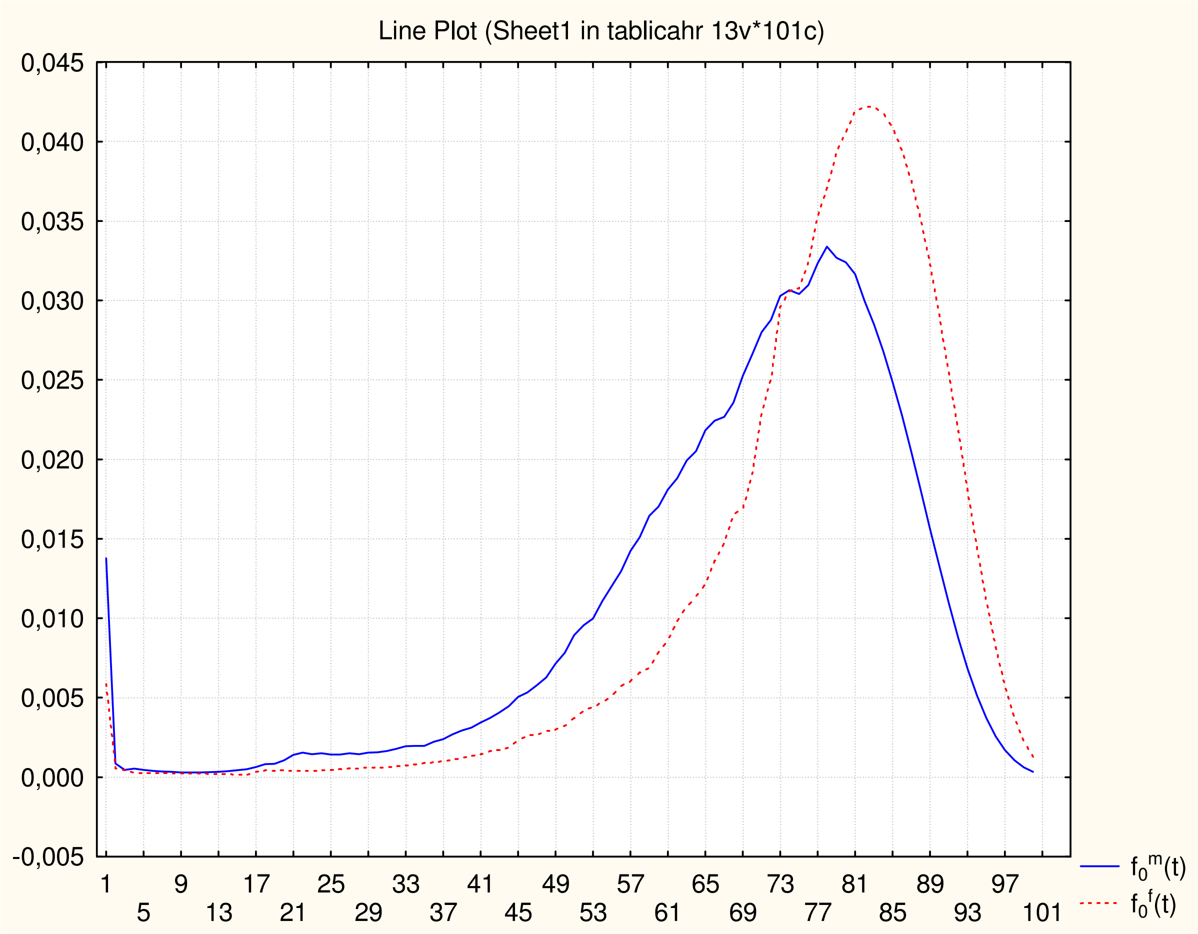


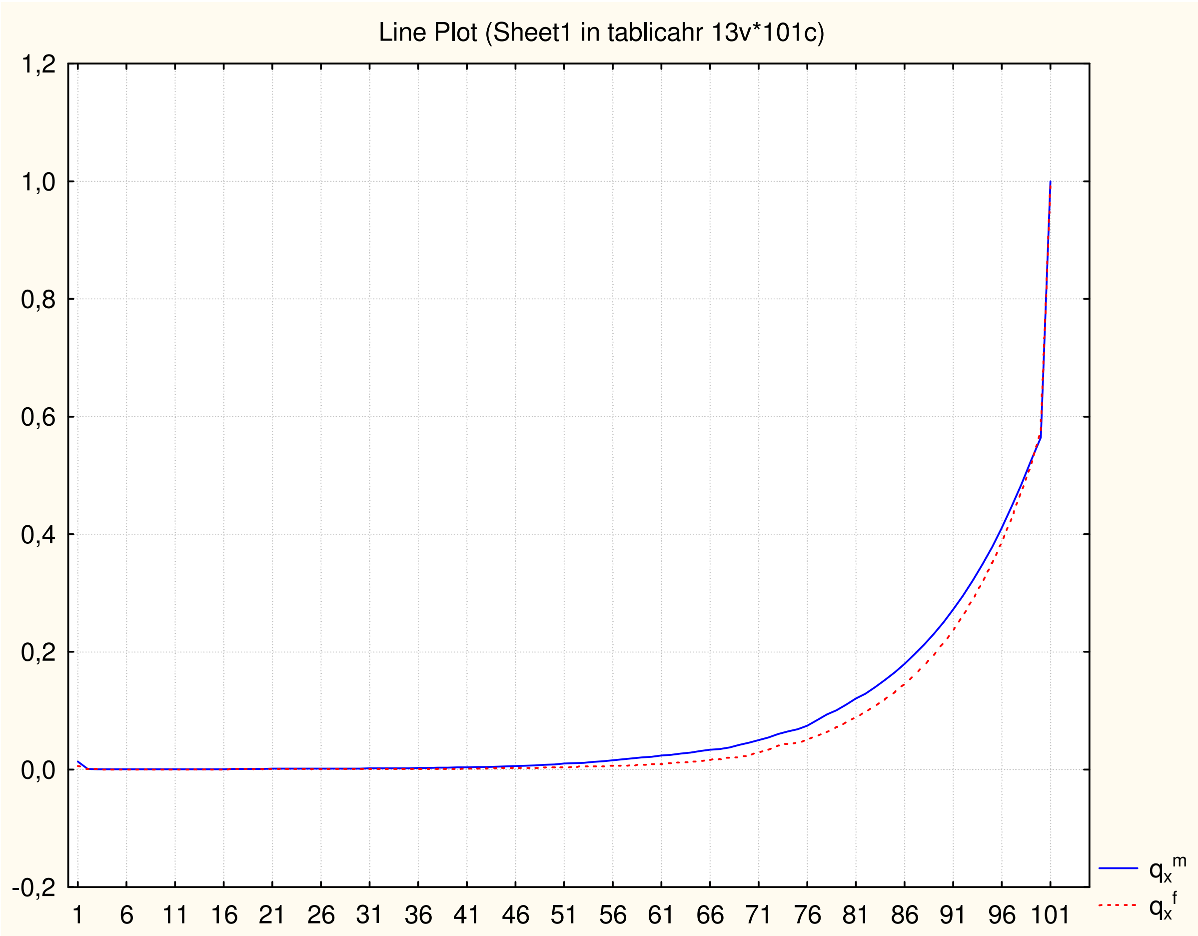
Figure 10

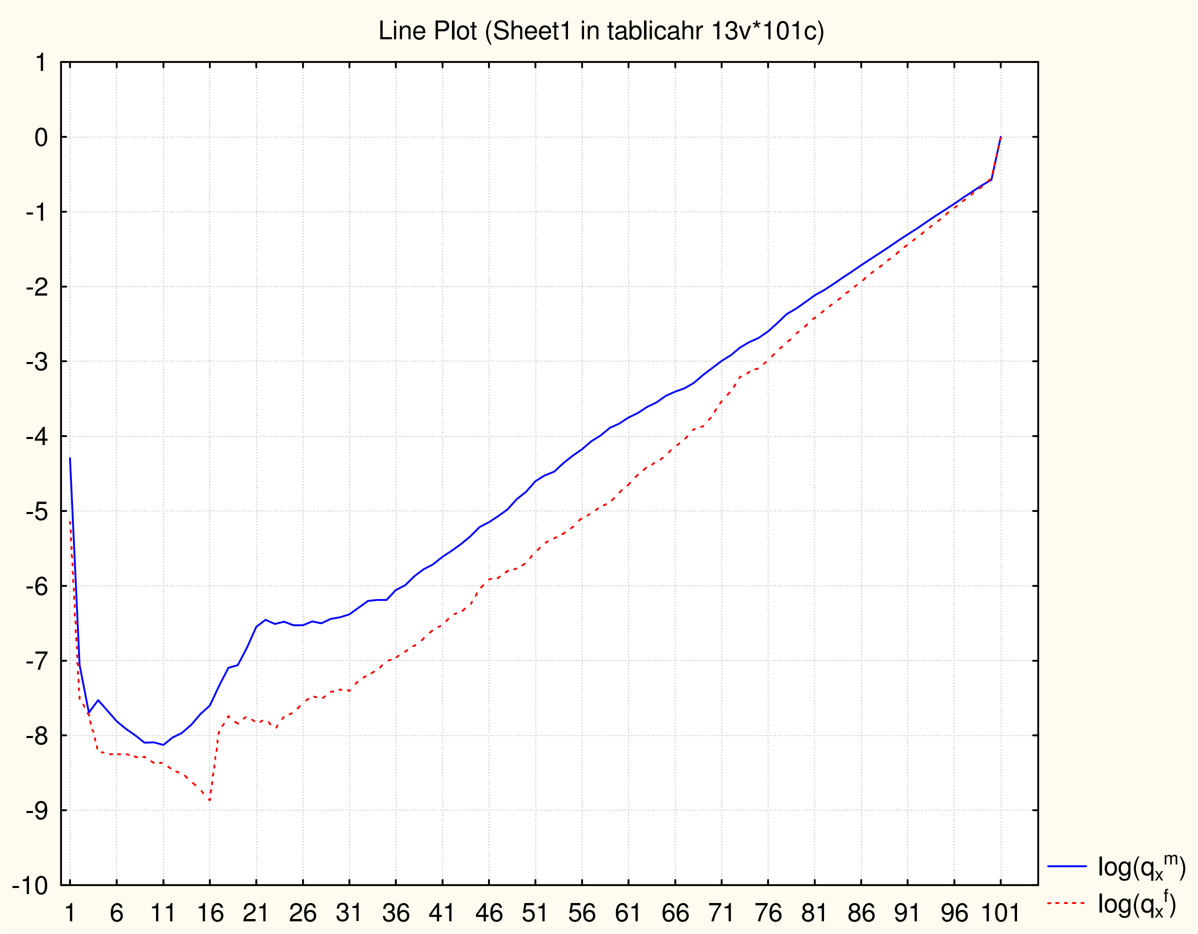
d_x (AM80 Ultimate Mortality Table)

Usporedba sa smrtnosti hrvatske populacije (muško (m) i žensko (f)) po popisu od 2001.

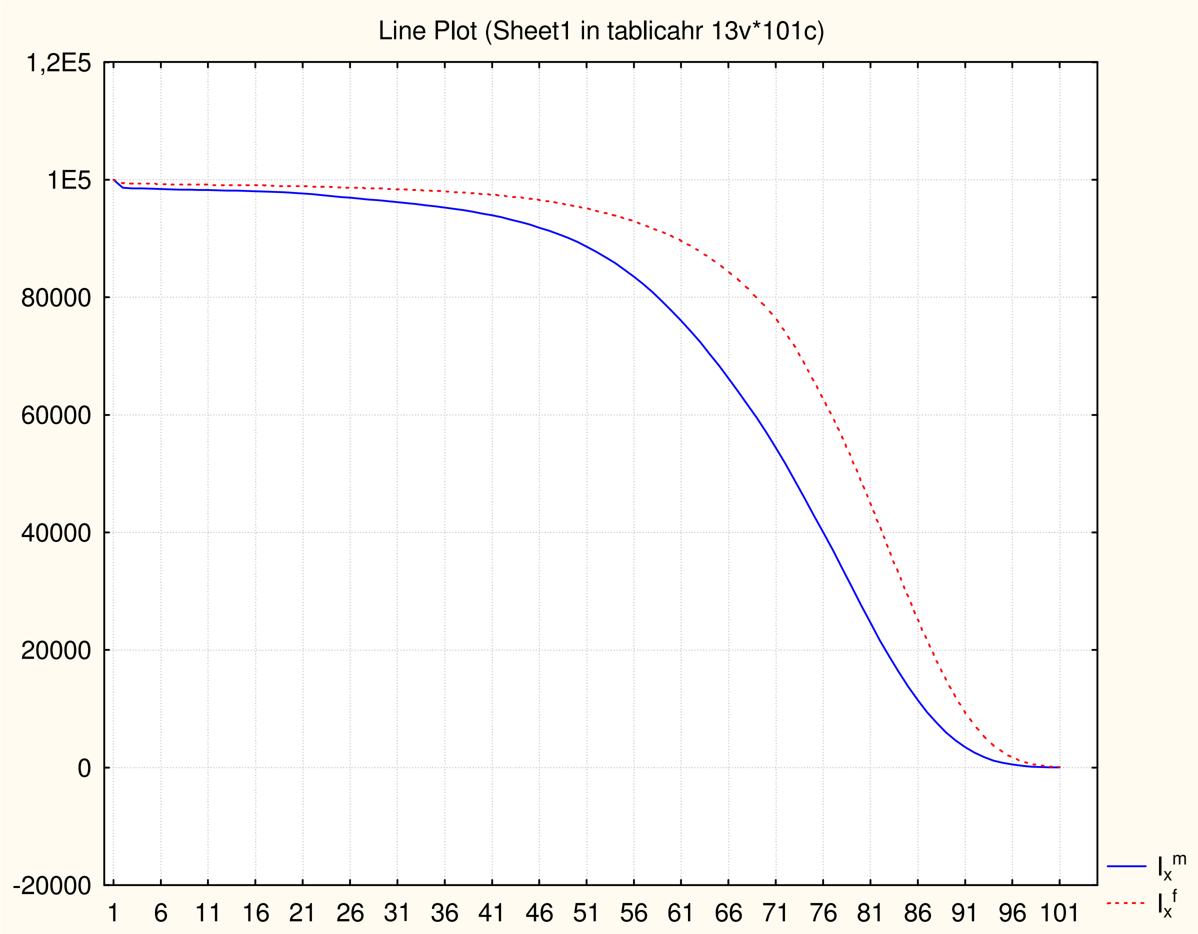


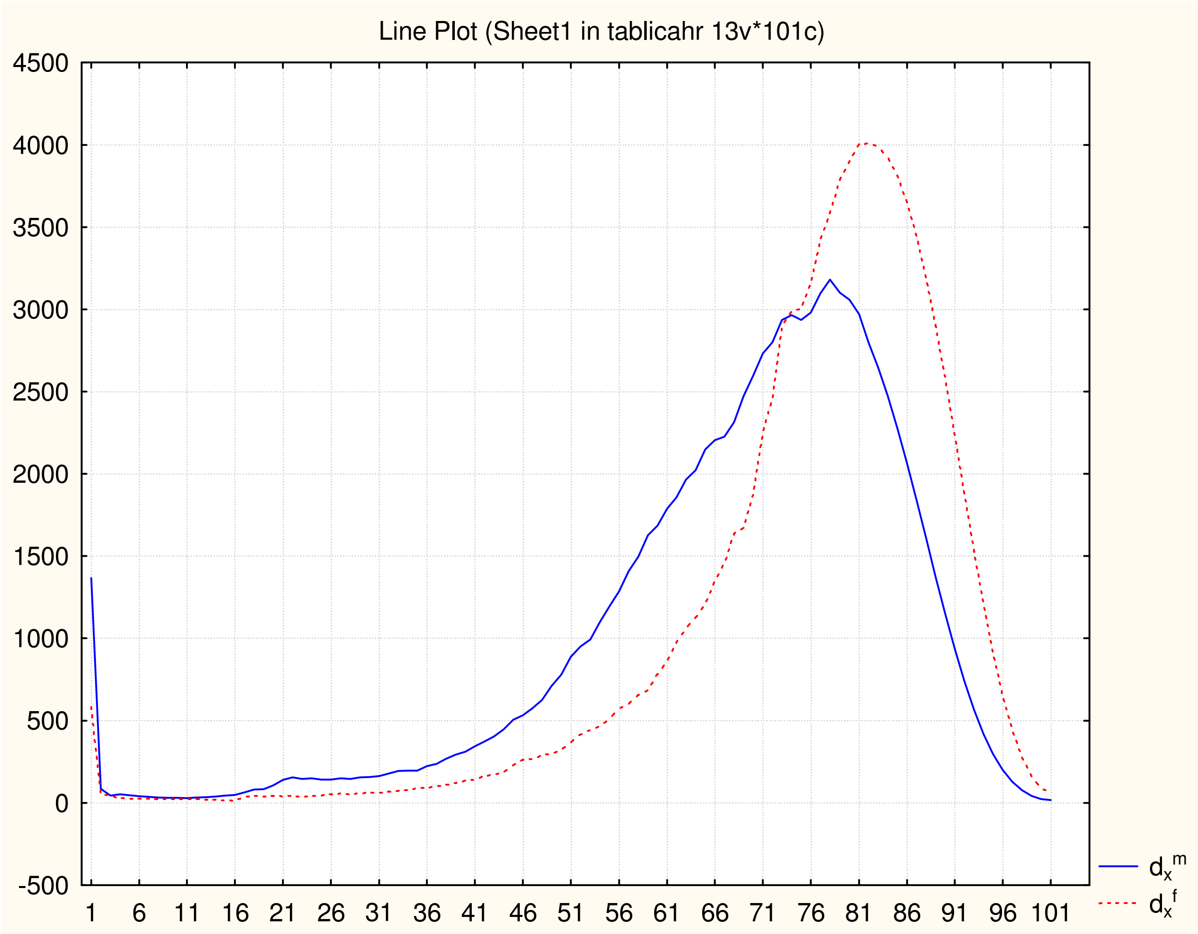
Line Plot (Sheet1 in tablicahr 13v*101c)
0,045
0,040
0,035
0,030
0,025
0,020
0,015
0,010
0,005
0,000
-0,005
1
9
17
25
33
41
49
57
65
73
81
89
97
5
13
21
29
37
45
53
61
69
77
85
93
101
$f_0^m(t)$
$f_0^f(t)$


Line Plot (Sheet1 in tablicahr 13v*101c)
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
-0,2
1
6
11
16
21
26
31
36
41
46
51
56
61
66
71
76
81
86
91
96
101
q_x^m
q_x^f



Line Plot (Sheet1 in tablicahr 13v*101c)
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
1 6 11 16 21 26 31 36 41 46 51 56 61 66 71 76 81 86 91 96 101
$\log(q_x^m)$
$\log(q_x^f)$


Line Plot (Sheet1 in tablicahr 13v*101c)
1,2E5
1E5
80000
60000
40000
20000
0
-20000
1
6
11
16
21
26
31
36
41
46
51
56
61
66
71
76
81
86
91
96
101
l_x^m
l_x^f


Line Plot (Sheet1 in tablicahr 13v*101c)
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
-500
1
6
11
16
21
26
31
36
41
46
51
56
61
66
71
76
81
86
91
96
101
d_x^m
d_x^f

2.8 Jednostavni zakoni smrtnosti

Gompertzov zakon:

$$\mu_x = B \cdot C^x$$

$\leftarrow$ dobro opisuje smrtnost srednjih i zrelih godina

Makehamov zakon:

$$\mu_x = A + B \cdot C^x$$

$\leftarrow$ slobodni član $\leftarrow$ model za slučajnu smrt zbog nezgode (ne ovisi o dobi)

Gompertzov zakon:

$$ {}_tp_x = g^{C^x(C^t-1)} $$

Makehamov zakon:

$$ {}_tp_x = s^t \cdot g^{C^x(C^t-1)} $$

gdje su

$$ g = \exp(-\frac{B}{\log C}), \quad s = e^{-A} $$