6. Opći Markovljev model

$\rightarrow$ proširenje modela 2 stanja na više stanja

$J = \{1, 2, \ldots, n\}$ ... konačan skup stanja

(Y_t) ... Markovljev proces sa stanjima u J

za stanja $g, h \in J$:

– def. *vjerojatnost prijelaza* iz stanja g u dobi x u stanje h u dobi $x+t$:

$$ {}_tP_x^{gh} := \mathsf{P}(Y_{x+t} = h \,|\, Y_x = g) $$

– ako $g \neq h$, ozna. *intenzitet prijelaza* iz stanja g u h u dobi $x+t$ sa: μ_{x+t}^{gh}

– vjerojatnost *neprekidnog ostajanja* u stanju g:

$${}_tp_x^{\overline{gg}} := \mathsf{P}(Y_{x+s} = g, \forall s \in [0,t] \,|\, Y_x = g)$$

– ako je povratak u g nemoguć, tada:

$${}_tp_x^{\overline{gg}} = {}_tp_x^{gg}$$

Modificirana pretpostavka 2: Za $u \neq v$,

$$ {}_hp_{x+t}^{uv} = \mu_{x+t}^{uv} h + o(h), \quad h \to 0+ $$

i vjerojatnost da (Y_t) ima *dva ili više prijelaza* u intervalu $[x, x+h]$ je $o(h)$, $h \to 0+$.

Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed:

Za $g, h \in J$:

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_tp_x^{gh} = \sum_{u \neq h} \left({}_tp_x^{gu} \mu_{x+t}^{uh} - {}_tp_x^{gh} \mu_{x+t}^{hu} \right) \tag{1}$$

uz početni uvjet

$${}_0p_x^{gh} = 0 \text{ za } g \neq h \text{ ili } {}_0p_x^{gh} = 1 \text{ za } g = h.$$

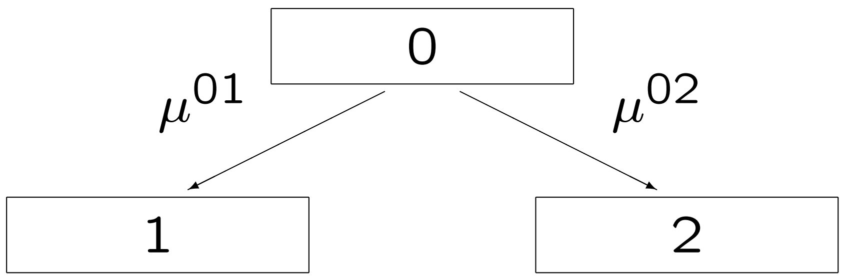
$$\frac{\partial}{\partial t} {}_tp_x^{\overline{gg}} = -{}_tp_x^{\overline{gg}} \sum_{u \neq g} \mu_{x+t}^{gu} \tag{2}$$

uz početni uvjet ${}_0p_x^{\overline{gg}} = 1$.

(2) $\Rightarrow$

$$ {}_tp_x^{\overline{gg}} = \exp\left(- \int_0^t \left(\sum_{u \neq g} \mu_{x+s}^{gu} \right) ds \right) $$

Primjer. Model s dva smanjenja (zbog smrti (1) ili umirovljenja (2)) i konstantnim intenzitetima prijelaza



Kolmogorovljeve jednadžbe:

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_t p_x^{01} = {}_t p_x^{00}\mu^{01}, \quad {}_0 p_x^{01} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_t p_x^{02} = {}_t p_x^{00}\mu^{02}, \quad {}_0 p_x^{02} = 0 \tag{4}$$

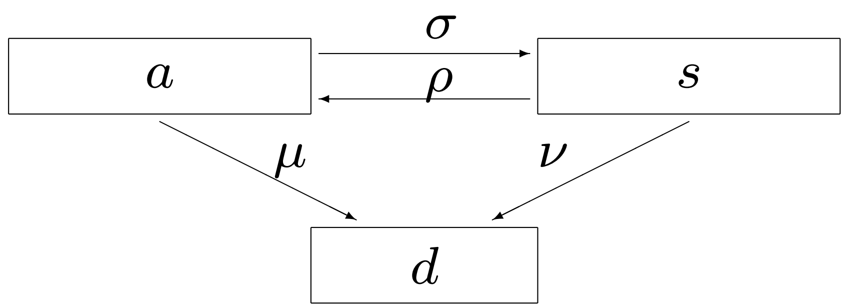
$$\frac{\partial}{\partial t}{}_t p_x^{00} = -{}_t p_x^{00}(\mu^{01} + \mu^{02}), \quad {}_0 p_x^{00} = 1 \tag{5}$$

$$(5) \;\Rightarrow\; {}_t p_x^{00} = \exp\Big((\mu^{01} + \mu^{02})t\Big)$$

$$(3) \;\Rightarrow\; {}_t p_x^{01} = \frac{\mu^{01}}{\mu^{01} + \mu^{02}}\left(1 - e^{(\mu^{01}+\mu^{02})t}\right)$$

$$(4) \;\Rightarrow\; {}_t p_x^{02} = \frac{\mu^{02}}{\mu^{01} + \mu^{02}}\left(1 - e^{(\mu^{01}+\mu^{02})t}\right)$$

Primjer. Model sposoban-bolestan-mrtav $(a - s - d)$ s konstantnim intenzitetima prijelaza



Opažamo N osoba (u dobi od x do $x + 1$).

Statistike:

V_i ... vrijeme boravka osobe i u stanju a
W_i ... vrijeme boravka osobe i u stanju s
S_i ... broj prelazaka osobe i iz a u s
R_i ... broj prelazaka osobe i iz s u a
D_i ... broj prelazaka osobe i iz a u d
U_i ... broj prelazaka osobe i iz s u d

Dovoljne statistike za uzorak:

$V = \sum_{i=1}^{N} V_i$ ... ukupno vrijeme boravka osoba iz uzorka u stanju a (sposoban)

$W = \sum_{i=1}^{N} W_i$ ... ukupno vrijeme boravka osoba iz uzorka u stanju s (bolestan)

$S = \sum_{i=1}^{N} S_i$ ... ukupan broj oboljenja

$R = \sum_{i=1}^{N} R_i$ ... ukupan broj ozdravljenja

$D = \sum_{i=1}^{N} D_i$ ... ukupan broj zdravih koji su umrli

$U = \sum_{i=1}^{N} U_i$ ... ukupan broj bolesnih koji su umrli

Vjerodostojnst parametara μ, ν, σ, ρ:

$$L(\mu, \nu, \sigma, \rho) = e^{-(\mu+\sigma)v} \cdot e^{-(\nu+\rho)w} \cdot \mu^d \cdot \nu^u \cdot \sigma^s \cdot \rho^r$$

$v, w, d, u, s, r \rightarrow$ opažene vrijednosti od V, W, D, U, S, R

Log-vjerodostojnost:

$$\begin{aligned} \ell(\mu, \nu, \sigma, \rho) &= \log L(\mu, \nu, \sigma, \rho) = \\ &= -(\mu + \sigma)v - (\nu + \rho)w + \\ &\quad + d \log \mu + u \log \nu + s \log \sigma + r \log \rho \end{aligned}$$

MLE:

$$
\begin{aligned}
& \nabla \ell(\mu, \nu, \sigma, \rho) = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\partial}{\partial \mu}\ell = -v + \frac{d}{\mu} = 0 \ \Rightarrow\ \widehat{\mu} = \frac{d}{v} \\
& \frac{\partial}{\partial \nu}\ell = -w + \frac{u}{\nu} = 0 \ \Rightarrow\ \widehat{\nu} = \frac{u}{w} \\
& \frac{\partial}{\partial \sigma}\ell = -v + \frac{s}{\sigma} = 0 \ \Rightarrow\ \widehat{\sigma} = \frac{s}{v} \\
& \frac{\partial}{\partial \rho}\ell = -w + \frac{r}{\rho} = 0 \ \Rightarrow\ \widehat{\rho} = \frac{r}{w}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\tilde{\mu} = \frac{D}{V}, \ \ \tilde{\nu} = \frac{U}{W}, \ \ \tilde{\sigma} = \frac{S}{V}, \ \ \tilde{\rho} = \frac{R}{W}
$$

Asimptotska razdioba MLE:

$$(\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\sigma},\tilde{\rho})-(\mu,\nu,\sigma,\rho)\dot{\sim} N_4(\mathbf{0},-\nabla^2\ell(\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\sigma},\tilde{\rho})^{-1})$$

$$-\nabla^2\ell(\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\sigma},\tilde{\rho})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\tilde{\mu}}{V} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\tilde{\nu}}{W} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\tilde{\sigma}}{V} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\tilde{\rho}}{W}\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{\mu}-\mu\dot{\sim} N(0,\frac{\tilde{\mu}}{V}),\ \tilde{\nu}-\nu\dot{\sim} N(0,\frac{\tilde{\nu}}{W}),$$

$$\tilde{\sigma}-\sigma\dot{\sim} N(0,\frac{\tilde{\sigma}}{V}),\ \tilde{\rho}-\rho\dot{\sim} N(0,\frac{\tilde{\rho}}{W})$$

7. Binomni i Poissonov model

7.1 Binomni model

Opažamo:

– N osoba točne dobi x n.j.d. smrtnosti
– bilježimo broj umrlih D tijekom 1 godine
– $D \sim$ binomna(N, q_x)
$\rightarrow$ MLE za q_x: $\tilde{q}_x = \frac{D}{N}$

$$\mathsf{E}\,\tilde{q}_x = q_x, \quad \mathsf{Var}\,\tilde{q}_x = \frac{q_x(1-q_x)}{N}$$

U realnoj situaciji:

(a) osobe *ne* opažamo tijekom istog dobnog intervala
(b) smanjenja (i uvećanja) uzorka mogu biti ne samo zbog smrt

$\rightarrow$ parametri: ${}_{b_i - a_i}q_{x+a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$
$\rightarrow$ statistike: D_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$

Cilj: izraziti ${}_{b_i-a_i}q_{x+a_i}$ pomoću q_x

Mogućnosti:

(a) uniformna distribucija smrtnosti:

$$ {}_tq_x = t \cdot q_x \;\; (0 \le t < 1) $$

(b) konstantnost intenziteta smrtnosti:

$$ {}_tq_x = 1 - (1 - q_x)^t \;\; (0 \le t < 1) $$

(c) *Balduccijeva* pretpostavka:

$$ {}_{1-t}q_{x+t} = (1 - t) \cdot q_x \;\; (0 \le t < 1) $$

Procjena za q_x:

Balduccijeva pretp. + metoda momenata

$\Rightarrow$

$$\widehat{q}_x = \frac{D}{\sum_{i=1}^{N}(1-a_i) - \sum_{D_i=0}(1-b_i)}$$

Aktuarske veličine:

- **centralna izloženost riziku:**

$$E_x^c \equiv V = \sum_{i=1}^{N} (T_i - a_i)$$

- **početna izloženost riziku:**

$$E_x \equiv \sum_{i=1}^{N} (1 - a_i) - \sum_{D_i=0} (1 - b_i) \approx E_x^c + \frac{1}{2} D$$

- **aktuarska procjena:**

$$\widehat{q}_x = \frac{D}{E_x^c + \frac{1}{2} D}$$

7.2 Poissonov model

Pretpostavke:
– E_x^c je deterministička veličina
– intenzitet smrtnosti μ je konstantan duž $[x, x+1]$

$$D \sim \text{Poissonova}(\mu E_x^c)$$

$\Rightarrow$

$$\mathsf{P}(D = k) = \frac{(\mu E_x^c)^k}{k!} e^{-\mu E_x^c}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

MLE za μ: $\tilde{\mu} = \frac{D}{E_x^c}$

$$\mathsf{E}\,\tilde{\mu} = \mu, \quad \mathsf{Var}\,\tilde{\mu} = \frac{\mu}{E_x^c}$$

7.4 Usporedba modela više stanja, binomnog i Poissonovog

Modele uspoređujemo obzirom na:

1. reprezentativnosti
2. jednostavnosti prilagodbe podacima
3. mogućnost proširenja na druge probleme (a ne samo na modeliranje smrtnosti ljudi)

Binomni model:
- ne uzima u obzir vremena smrti
- ako imamo podatke o vremenima smrti, neefikasan je (ako je μ malo, znatan dio informacije je u *broju* smrti, dok je za veliki μ *vrijeme* smrti informativnije)
- $\widehat{q}_x$ ima veću varijancu nego u modelu dva stanja
- baza za neparametarsku procjenu $F_x(t)$
- parametarski model za smrtnost duž dobnog intervala $[x, x+1]$
- kompliciran je za proširenje na modele više stanja

Poissonov model:

- dobra aproksimacija za modele više stanja (ako je μ malo)
- baza za neparametarsku procjenu μ_{x+t}
- parametarski model za smrtnost duž dobnog intervala $[x, x+1]$
- jednostavno se proširuje na modele više smanjenja, ali ne i na modele s povećanjem

Modeli više stanja:
- najprimjereniji za točne podatke

Statistička svojstva MLE po modelima:

(a) U modelu više stanja MLE je konzistentan i asimptotski normalan, varijanca je asimptotski poznata (aproksimacija je dobra za $d_x \leq 10$)
(b) U Poissonovom modelu MLE je konzistentan i nepristran, varijanca se računa egzaktno za μ točno, izraz za procjenitelja je isti kao u (a)
(c) U naivnom binomnom modelu, MLE je konzistentan i nepristran, varijanca je funkcija prave vrijednosti od q_x

Istraživanje ljudske smrtnosti $\rightarrow$ intenziteti smrtnosti su dovoljno mali da se svi modeli mogu primijeniti sa zadovoljavajućim rezultatima.

Mnogi drugi fenomeni smanjenja/uvećanja se pojavljuju u aktuarskom poslu t.d. se preferiraju *modeli više stanja*.

Primjer. Istraživana je smrtnost grupe osoba između dobi 60 i 61 godine. Podaci:

osoba	dob na početku opažanja	dob pri izlasku s opažanja	razlog izlaska
1	60 g 0 m	60 g 6 m	odustajanje
2	60 g 1 m	61 g 0 m	prestanak op.
3	60 g 1 m	60 g 3 m	smrt
4	60 g 2 m	61 g 0 m	prestanak op.
5	60 g 3 m	60 g 9 m	smrt
6	60 g 4 m	61 g 0 m	prestanak op.
7	60 g 5 m	60 g 11 m	smrt
8	60 g 7 m	61 g 0 m	prestanak op.
9	60 g 8 m	60 g 10 m	smrt
10	60 g 9 m	61 g 0 m	prestanak op.

Zadatak:

(i) Procijenite q_{60} aktuarskom procjenom

(ii) Procijenite q_{60} pomoću modela dva stanja

Rješenje:

$x + a_i$ ... dob na početku opažanja
$x + t_i$ ... dob u trenutku izlaska iz opažanja
d_i ... indikator smrti
$e_i = 1 - a_i - (1 - d_i)(1 - t_i)$
$v_i = t_i - a_i$

(i): Aktuarska procjena:

$$\widehat{q}_{60} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{\sum_{i=1}^{10}(1 - a_i - (1 - d_i)(1 - t_i))} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{\sum_{i=1}^{10} e_i}$$

i	a_i	t_i	d_i	e_i	v_i
1	0	6/12	0	6/12	6/12
2	1/12	1	0	11/12	11/12
3	1/12	3/13	1	11/12	2/12
4	2/12	1	0	10/12	10/12
5	3/12	9/12	1	9/12	6/12
6	4/12	1	0	8/12	8/12
7	5/12	11/12	1	7/12	6/12
8	7/12	1	0	5/12	5/12
9	8/12	10/12	1	4/12	2/12
10	9/12	1	0	3/12	3/12
Σ			4	74/12	59/12

$$d = \sum_{i=1}^{10} d_i = 4, \quad E_{60} = \sum_{i=1}^{10} e_i = \frac{74}{12}$$

$\Rightarrow$ aktuarska procjena:

$$\widehat{q}_{60} = \frac{d}{E_{60}} = \frac{4}{74/12} = 0.6486$$

(ii): $d = 4$, $v = \sum_{i=1}^{10} v_i = \frac{59}{12} = E_{60}^c$

Procjena od $\mu_{60+\frac{1}{2}}$ je

$$\widehat{\mu}_{60+\frac{1}{2}} = \frac{d}{E_{60}^c} = \frac{4}{59/12} = 0.8136$$

$\Rightarrow$

$$\widehat{q}_{MLE} = 1 - e^{-\widehat{\mu}_{60+\frac{1}{2}}} = 1 - e^{-0.8136} = 0.5567$$

Napomena: Varijabilnost aktuarske procjene $\widehat{q}_{60}$ je veća od $\widehat{q}_{MLE}$ jer ne koristi sve dostupne informacije.

8. Izglađivanje i statistički testovi

8.1 Uvod

Potpuno istraživanje smrtnosti $\rightarrow$ obuhvaća čitav životni vijek

$\Rightarrow$ Pret. da imamo podatke za dobi

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_m$$

i to:

(a) ako koristimo Poissonov model:

- broj smrti d_x
- centralnu izloženost riziku E_x^c
- *sirove* procjene $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$

Statistike:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{x+\frac{1}{2}} &\dot{\sim} N(\mu_{x+\frac{1}{2}}, \frac{\mu_{x+\frac{1}{2}}}{E_x^c}) \\
D_x &\dot{\sim} N(E_x^c \mu_{x+\frac{1}{2}}, E_x^c \mu_{x+\frac{1}{2}})
\end{aligned}
$$

(b) ako koristimo binomni model:

- broj smrti d_x
- početnu izloženost riziku $E_x \approx E_x^c + \frac{1}{2} d_x$
- *sirove* procjene $\widehat{q}_x$

Statistike:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{q}_x & \dot{\sim} & N(q_x, \frac{q_x(1-q_x)}{E_x}) \\ D_x & \dot{\sim} & N(E_x q_x, E_x q_x(1-q_x)) \end{array}$$

8.2 Usporedba s drugim iskustvom

Imamo sirove procjene $\widehat{q}_x$ ili $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ za $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$ podataka osiguranika OD
$\rightarrow$ želimo ih usporediti s nekim poznatim iskustvom smrtnosti.

(a) *Je li to iskustvo konzistentno s prijašnjim?*
(Važno za ispravno vrednovanje budućih premija.)

(b) *Je li opažena smrtnost konzistentna s objavljenim standardnim tablicama?*
(Važno ukoliko OD namjerava vrednovati police koristeći te tablice.)

Standardne tablice $\leftarrow$ objavljene tablice smrtnosti koje se zasnivaju na velikom broju podataka

Na primjer,

1. Nacionalne tablice smrtnosti baziraju se na popisu stanovništva
2. Tablice koje se zasnivaju na podacima OD-a za životna osiguranja (u UK: *Continuous Mortality Investigation Bureau* (CMIB))

Želimo testirati hipoteze:
Jesu li standardne tablične veličine q_x^s ili μ_x^s prave vrijednosti stopa ili intenziteta smrtnosti za svaku opažanu dob x?

(a) Poissonov model:

$$H_0: \ \mu_{x+\frac{1}{2}} = \mu^s_{x+\frac{1}{2}}, \ \ x = x_1, \ldots, x_m$$

$$D_x \overset{H_0}{\dot{\sim}} N(\mu^s_{x+\frac{1}{2}}, \frac{\mu^s_{x+\frac{1}{2}}}{E_x^c})$$

(b) binomni model:

$$H_0: \quad q_x = q_x^s, \quad x = x_1, \ldots, x_m$$

$$D_x \overset{H_0}{\dot{\sim}} N(E_x q_x^s, E_x q_x^s (1 - q_x^s))$$

8.3 Izglađivanje

- procjene $\widehat{q}_x$ i $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ nisu glatke funkcije dobi x
- računaju se iz uzorka
- razlika očekivanih i procijenjenih vrijednosti su slučajne pogreške

$\mathring{q}_x$, $\mathring{\mu}_{x+\frac{1}{2}} \leftarrow$ *izglađene procjene*

8.4 Razlozi za izglađivanje

- Intuitivno očekujemo da su q_x i μ_x glatke funkcije dobi (to je pretpostavka iako empirijska istraživanja upućuju na nju)
- $\widehat{q}_x$ i $\widehat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ sadrže informacije o susjednim vrijednostima u dobima $x-1$ i $x+1$
- Izglađivanjem se smanjuje slučajna greška.
- Zbog poslovne prakse je važno da su izvedene veličine (npr. premije) glatke.

Važno:

- Nikada se opažene, sirove veličine ne koriste za izračunavanje izvedenih financijskih veličina.

- Izglađivanjem se ne može eliminirati pristranost zbog loše prikupljenih ili opažanih podataka.

8.5 Poželjna svojstva izglađivanja

(a) glatkoća

(b) prilagođenost podacima

(c) prikladnost za upotrebu

- u osig. života se smrtnost ne smije *potcijeniti*
- u mirovinskom osig. se smrtnost ne smije *precijeniti*

8.6 Testiranje glatkoće

Izglađene funkcije $\mathring{q}_x$ ili $\mathring{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ su *dovoljno glatke* ako su njihove treće diferencije
- male po iznosu u odnosu na vrijednosti funkcije
- mijenjaju se regularno.

Mnoge metode izglađivanja daju upravo takve funkcije.

8.7 Testovi prilagodbe podacima

Pretpostavljamo:
- D_x, $x = x_1, \ldots, x_m$ su nezavine s.v.

Testiramo:
- hipoteze o prilagođenosti standardnim tablicama
- izglađenost, tj.

$$H_0: \; q_x = \overset{\circ}{q}_x, \; x = x_1, \ldots, x_m$$

ili

$$H_0: \; \mu_{x+\frac{1}{2}} = \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}, \; x = x_1, \ldots, x_m$$

Podaci: $d_{x_1}, d_{x_2}, \ldots, d_{x_m}$

Standardiziramo podatke u skladu sa
- hipotezom H_0
- modelom za D_x (binomni ili Poissonovi)

Npr. za Poissonov model i $H_0 : q_x = \overset{\circ}{q}_x$, $x = x_1, \ldots, x_m$:

$$z_x := \frac{d_x - E_x \overset{\circ}{q}_x}{\sqrt{E_x \overset{\circ}{q}_x (1 - \overset{\circ}{q}_x)}}, \quad x = x_1, \ldots, x_m$$

Statistički testovi za standardizirane podatke:

1. χ^2-test
2. Pearsonov χ^2-test
3. Test predznaka
4. Test kumulativnih devijacija
5. Test grupiranih predznaka
6. Test serijskih korelacija

Primjer. Navedeni podaci su preuzeti iz istraživanja smrtnosti muških osiguranika jednog društva za životna osiguranja, u dobi od 25 do 65 godina. Sirove stope smrtnosti su procijenjene pomoću binomnog modela i izglađene su matematičkom formulom. Pretpostavljena funkcija je imala četiri parametra koji su procijenjeni iz podataka metodom maksimalne vjerodostojnosti.

x	E_x	d_x	$\mathring{q}_x$	$E_x\,\mathring{q}_x$	$E_x\,\mathring{q}_x\,(1-\,\mathring{q}_x)$	z_x
35	14211	17	0.001998	28.39	28.33	-2.14
36	12381	21	0.002061	25.52	25.47	-0.89
37	11704	27	0.002124	24.86	24.81	$+0.43$
38	11038	24	0.002187	24.14	24.09	-0.03
39	10947	29	0.002250	24.63	24.57	$+0.88$
40	13885	21	0.002314	32.13	32.06	-1.97
41	11507	30	0.002378	27.36	27.29	$+0.51$
	85673	169		187.03	186.62	-3.21

Sprovedite testove o prilagodbi izlađenih stopa podacima. Pretpostavljamo da je izglađivanje sprovedeno samo u prikazanim dobima.

Rješenje:

Testiramo nul-hipotezu:

$$H_0: \quad q_x = \mathring{q}_x \quad \text{za} \quad x = 35, 36, \ldots, 41$$

Binomni model $\Rightarrow$

$$D_x \overset{H_0}{\dot{\sim}} N(E_x \mathring{q}_x, E_x \mathring{q}_x (1 - \mathring{q}_x))$$

1. χ^2-test

Testna statistika: $H = \sum_{x=35}^{41} Z_x^2 \overset{H_0}{\dot{\sim}} \chi^2(7-4)$
Opažena vrijednost: $h = \sum_{x=35}^{41} z_x^2 = 10.5$
Razina značajnosti: 5%
Kritično područe: $C = [7.815, +\infty\rangle$

Budući da je $h \in C$, odbacujemo H_0.

2. Pearsonov χ^2-test nije moguće sprovesti zbog malo podataka.

3. Test predznaka

Testna statistika:

$$P = \text{broj pozitivnih devijacija} \overset{H_0}{\sim} b(7, \frac{1}{2})$$

Opažena vrijednost: $p = 3$

P-vrijednost:

$$pv = 2 \cdot \mathsf{P}(P \leq 3 | H_0) = 1$$

Ne odbacujemo H_0.

4. Test grupiranih predznaka

Testna statistika:

$$G = \text{broj grupa pozitivnih devijacija}$$

$$\mathsf{P}(G = k | H_0) = \frac{\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2}{k}}{\binom{m}{n_1}}, \;\; k = 1, 2, \ldots, n_1$$

Opažena vrijednost: $g = 3$ $(n_1 = 3, n_2 = 4, m = 7)$
P-vrijednost:

$$pv = \mathsf{P}(G \leq 3 | H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = 1$$

5. Test kumulativnih devijacija

Testna statistika:

$$Z = \frac{\sum_x (D_x - E_x \overset{\circ}{q}_x)}{\sqrt{\sum_x E_x \overset{\circ}{q}_x / 1 - \overset{\circ}{q}_x)}} \overset{H_0}{\dot{\sim}} N(0,1)$$

Pretpostavka: devijacije su nezavisne!

Opažena vrijednost: $z = \frac{169-187.03}{\sqrt{186.62}} = -1.32$

P-vrijednost: $\mathrm{P}(|Z| \geq 1.32 | H_0) > 0.05$

6. Test serijskih korelacija

Testna statistika:

$$\sqrt{7}R_1 = \sqrt{7}\frac{\sum_i (Z_i - \overline{Z})(Z_{i+1} - \overline{Z})}{\sqrt{\sum_i (Z_i - \overline{Z})^2 \sum_i (Z_{i+1} - \overline{Z})^2}} \overset{H_0}{\dot{\sim}} N(0,1)$$

Opažena vrijednost: $\sqrt{7}r_1 = -0.82$
$(\overline{z} = \frac{-3{,}21}{7} = -0.46)$

Ne odbacujemo H_0.