Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

21. 2. 2005.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 100
Broj zadataka: 6
Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.
Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica ili vlastitih formula, i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

---

1. Pomoću *English Life Table No. 12* izračunajte uvjetnu vjerojatnost smrti muške osobe prije navršene točne dobi 56, a koja je doživjela točnu dob od 55 godina i 6 mjeseci koristeći sljedeće pretpostavke o smrtnosti između dobi 55 i 56:

(a) Balduccijevu pretpostavku; (6 bodova)

(b) intenzitet smrtnosti se ravna po Gompertzovom zakonu. (9 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. U jednom istraživanju smrtnosti opažano je šest osoba u dobi između (točno) 70 i 71. Neka su:

a_i vrijeme u godinama kada se osoba i, već u dobi 70, počela opažati;
b_i vrijeme u godinama kada je osoba i, već u dobi 70, cenzurirana;
d_i $= 1$ ako je i-ta osoba preminula prije $x + b_i$;
$= 0$ ako je i-ta osoba doživjela dob $x + b_i$.
t_i Ako je $d_i = 1$ tada je $x + t_i$ dob u kojoj je osoba i preminula.

osoba (i)	a_i	b_i	d_i	t_i
1	0	1	0	–
2	0.3	0.9	0	–
3	0.5	1	1	0.9
4	0	0.4	0	–
5	0	0.9	1	0.7
6	0	1	1	0.8

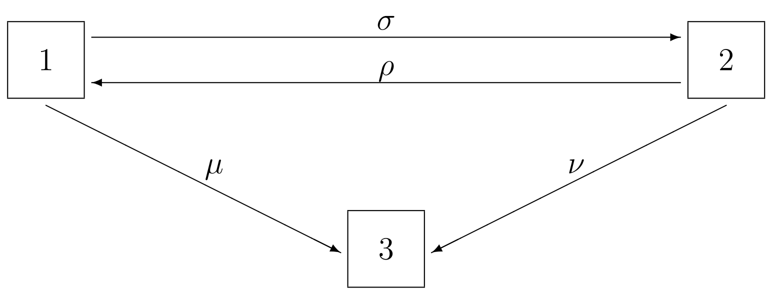
(a) Koristeći Poissonov model smrtnosti i uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti $\bar{\mu}_{70}$ duž dobnog intervala $\langle 70, 71\rangle$, napišite vjerodostojnost od $\bar{\mu}_{70}$ na osnovi zadanih podataka. (5 bodova)

(b) Procijenite $\bar{\mu}_{70}$ metodom maksimalne vjerodostojnosti. (5 bodova)

(c) Izračunajte procjenu maksimalne vjerodostojnosti od q_{70}. (5 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Za vrednovanje svojih polica zdravstvenog osiguranja osiguravajuće društvo koristi Markovljev model s tri stanja (1 = "zdrav", 2 = "bolestan", 3 = "mrtav") kao na slici. Pretpostavlja se da su intenziteti prijelaza σ, ρ, μ, ν konstantni.



Promatranje grupe osiguranika tijekom jednogodišnjeg razdoblja dalo je sljedeće rezultate. Opaženo je:

- 10 prijelaza iz stanja 1 u stanje 2
- 7 prijelaza iz stanja 2 u stanje 1
- 2 umrla iz stanja 1
- 3 umrla iz stanja 2.

Ukupno vrijeme provedeno u stanju 1 je 512 godina, a u stanju 2, 20 godina.

(a) Napišite funkciju vjerodostojnosti za opažene podatke. (3 boda)

(b) Izračunajte procjenu $\hat{\sigma}$ od σ metodom maksimalne vjerodostojnosti. (3 boda)

(c) Procijenite standardnu pogrešku procjenitelja maksimalne vjerodostojnosti $\tilde{\sigma}$ od σ. (5 bodova)

(d) Postavite diferencijalne jednadžbe i pripadajuće početne uvjete za vjerojatnosti ${}_tp_x^{22}$ i ${}_tp_x^{\overline{22}}$. (4 boda)

(ukupno 15 bodova)

4. Osiguravajuće društvo sprovelo je sljedeće istraživanje smrtnosti svojih osiguranika. Odabran je uzorak osiguranika u dobi između 40 i 45. Svaka osoba u uzorku opažana je od svog četrdesetog rođendana pa sve do, ili svoje smrti, ili do njenog izlaska, tj. prestanka opažanja zbog raznih razloga osim smrti, ili do svojeg četrdesetpetog rođendana, ovisno o tome što se prvo dogodilo.

(a) Opišite vrste cenzuriranja koja se pojavljuju u tom straživanju. (4 boda)

(b) Dio podataka prikazan je u tablici:

osoba broj	zadnja opažena dob (godine i mjeseci)	ishod
1	40 6	umrla
2	40 6	izašla
3	41 0	umrla
4	41 0	umrla
5	41 6	izašla
6	42 3	umrla
7	42 3	izašla
8	42 3	umrla
9	42 6	izašla
10	43 0	izašla
11	43 3	umrla
12	43 3	izašla
13	44 3	izašla
14	44 6	izašla
15	44 9	umrla
16	45 0	doživjela
17	45 0	doživjela
18	45 0	doživjela
19	45 0	doživjela
20	45 0	doživjela

Na osnovi tih podataka izračunajte Kaplan-Meierovu procjenu funkcije doživljenja. Odredite i aproksimativne 95%-pouzdane intervale za vrijednosti funkcije doživljenja. Procjenu funkcije doživljenja i pripadnu 95%-pouzdanu "prugu" prikažite grafički. (16 bodova)

(ukupno 20 bodova)

5. Osiguravajuće društvo istražuje nedavno iskustvo o smrtnosti svojih muških osiguranika rentnog osiguranja. Izvod iz prikupljenih podataka se nalazi u tablici:

dob (x)	početna izloženost riziku (E_x)	opaženi broj umrlih (d_x)
70	600	23
71	750	31
72	725	33
73	650	29
74	700	35
75	675	39

(a) Pomoću χ^2-testa usporedite da li opaženo iskustvo odgovara iskustvu smrtnosti iz tablice $a(55)$ *Ultimate Mortality Table for Male Annuitants*. Na bazi te tablice su određene premije za rente navedenog osiguravajućeg društva (OD). Navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte. (14 bodova)

(b) Komentirajte kakve će financijske posljedice biti po OD ako nastavi prodavati rente koje su vrednovane na bazi tablica $a(55)$. (2 boda)

(c) Navedite koje su razlike u primjeni testa iz (a) ako opažene stope smrtnosti uspoređujemo sa izglađenim stopama

$$\mathring{q}_x = a + bq_x^s,$$

pri čemu parametre a, b treba procijeniti iz podataka, a q_x^s su standardne stope iz tablice $a(55)$. (4 boda)

(ukupno 20 bodova)

6. U tablici se nalaze podaci o broju osiguranika $P_{x,t}$ koji su bili dobi x ($x = 40$, 41, 42) na zadnji rođendan na dane $t = 1$. siječnja kalendarskih godina 1999., 2000. i 2001. Broj umrlih $d_x(k)$ u kalendarskim godinama $k = 1999$. i 2000. izražen je obzirom na dob na najbliži rođendan u trenutku smrti. Prikazani podaci su dio istraživanja smrtnosti osiguranika nekog osiguravajućeg društva.

x	$P_{x,1999.}$	$P_{x,2000.}$	$P_{x,2001.}$	$d_x(1999.)$	$d_x(2000.)$
40	473	512	491	17	18
41	450	470	482	20	18
42	490	460	480	21	19

Pretpostavljamo da su intenziteti smrtnosti za sve dobi konstantni u razdoblju od 1. siječnja 1999. do 1. siječnja 2001. godine.

(a) Navedite princip korespondencije i definirajte censusni podatak $P'_{x,t}$ koji je konzistentan s navedenom definicijom dobi. Navedite formulu za aproksimaciju $P'_{x,t}$ pomoću opaženih podataka $P_{x,t}$. (5 bodova)

(b) Navedite formulu kojom se iz prikupljenih podataka $P_{x,t}$ za dobi $x = 40, 41, 42$ u trenutcima $t = 1$. siječnja 1999., 2000. i 2001. godine, procjenjuje intenzitet smrtnosti za osobe dobi x na najbliži rođendan ($x =$ 41, 42) i izračunajte ih. (8 bodova)

(c) Koji interval stope odgovara procjeni iz (b) dijela zadatka? (2 boda)

(ukupno 15 bodova)

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

21. 2. 2005.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Treba izračunati ${}_{0.5}q_{55.5}$.

(a) Uz Balduccijevu pretpostavku:

$$ {}_{t}q_{x+t} = (1-t)\cdot q_x \qquad (1)$$

$$ q_{55} = (\text{tablice}) = 0.01331 \qquad (2)$$

$$ \Rightarrow \; {}_{0.5}q_{55.5} = 0.5\cdot q_{55} = 0.5\cdot 0.01331 = 0.00666. \qquad (3)$$

(b) Intenzitet smrtnosti (Gompertz): $\mu_x = B\cdot C^x$ (1)

Tablice: $\mu_{55} = 0.01263$, $\mu_{56} = 0.01420$ (2)

$$ \Rightarrow \; 0.01263 = B\cdot C^{55}, 0.01420 = B\cdot C^{56}$$

$$ \Rightarrow \; C = \frac{0.01420}{0.01263} = 1.12431, B = \frac{\mu_{55}}{C^{55}} = \frac{0.01263}{629.035} = 2.0078\cdot 10^{-5}. \qquad (2)$$

$$ {}_{t}p_x = \exp(-\int\limits_0^t \mu_{x+s}\,ds)$$

$$ \Rightarrow \; {}_{0.5}q_{55.5} = 1 - {}_{0.5}\,p_{55.5} = 1-\exp(-\int\limits_0^{0.5}\mu_{55.5+t}\,dt) = \qquad (1)$$

$$ = 1-\exp(-B\cdot C^{55.5}\int\limits_0^{0.5} C^t\,dt) = \qquad (1)$$

$$ = 1-\exp(-B\cdot C^{55.5}\frac{C^{0.5}-1}{\ln C}) = 1-e^{-0.0068959} = 0.00687. \qquad (2)$$

(15)

2. (a) Neka je $v_i = t_i - a_i$ ako je $d_i = 1$, a $v_i = b_i - a_i$ ako je $d_i = 0$. Tada je vjerodostojnost od $\bar{\mu}_{70}$ jednaka (do na konstantu):

$$L(\bar{\mu}_{70}) = \prod_{i=1}^{6} e^{-v_i \bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70}^{d_i} \qquad (2)$$

$$L(\bar{\mu}_{70}) = e^{-\bar{\mu}_{70}} \cdot e^{-0.6\bar{\mu}_{70}} \cdot e^{-0.4\bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70} \cdot e^{-0.4\bar{\mu}_{70}} \cdot e^{-0.7\bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70} \cdot e^{-0.8\bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70} \qquad (1)$$

$$L(\bar{\mu}_{70}) = e^{-3.9\bar{\mu}_{70}} \cdot \bar{\mu}_{70}^{3} \qquad (2)$$

(b) MLE od $\bar{\mu}_{70}$ je rješenje stacionarne jednadžbe logvjerodostojnosti:

$$\ell(\bar{\mu}_{70}) = \log L(\bar{\mu}_{70}) = -3.9\bar{\mu}_{70} + 3 \log \bar{\mu}_{70} \qquad (1)$$

$$\ell'(\bar{\mu}_{70}) = -3.9 + \frac{3}{\bar{\mu}_{70}} = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\bar{\mu}}_{70} = \frac{3}{3.9} = 0.7692 \qquad (2)$$

(c) Budući da je

$$q_{70} = 1 - e^{-\bar{\mu}_{70}} \qquad (2)$$

uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti duž dobnog intervala, MLE od q_{70} je

$$\begin{aligned} \hat{q}_{70} &= 1 - e^{-\hat{\bar{\mu}}_{70}} = && (2) \\ &= 1 - e^{-0.7692} = 0.5366. && (1) \end{aligned}$$

(15)

3. (a) $L(\sigma,\rho,\mu,\nu) = e^{-512(\sigma+\mu)} \cdot e^{-20(\rho+\nu)}\sigma^{10}\rho^7\mu^2\nu^3$ (3)

(b) MLE je rješenje stacionarne jednadžbe (za $\ell = \ln L$):

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -512 + \frac{10}{\sigma} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\sigma} = \frac{10}{512} = 0.0195. \qquad (3)$$

(c) Asimptotska razdioba od MLE:

$$\tilde{\sigma}-\sigma \mathrel{\dot\sim} N(0, (-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2})^{-1}) = N(0, \frac{\sigma^2}{10}) \quad \text{ili} \quad \tilde{\sigma}-\sigma \mathrel{\dot\sim} N(0, \frac{\sigma}{\mathbb{E}[V]}). \qquad (2)$$

Budući da je standardna pogreška od $\tilde{\sigma}$ jednaka njenoj standardnoj devijaciji, asimptotski je:

$$\text{s.e.}(\tilde{\sigma}) = \tfrac{\sigma}{\sqrt{10}} \quad \text{ili} \quad \text{s.e.}(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\tfrac{\sigma}{\mathbb{E}[V]}} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\text{s.e.}}(\tilde{\sigma}) = \tfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}} (\text{ili } = \sqrt{\tfrac{\hat{\sigma}}{512}}) = 0.00618. \qquad (2)$$

(d) Diferencijalne jednadžbe za ${}_tp_x^{22}$ i $t p_x^{\overline{22}}$ s pripadnim početnim uvjetima:

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{22} = \sigma \cdot {}_tp_x^{21} - (\rho+\nu)\,{}_tp_x^{22}, \quad {}_0p_x^{22} = 1 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{\overline{22}} = -(\rho+\nu)\,{}_tp_x^{\overline{22}}, \qquad {}_0p_x^{\overline{22}} = 1. \qquad (2)$$

(15)

4. (*a*) Postoji *desno cenzoriranje* do kojega dolazi kada osoba doživi četrdesetpetu godinu života ili izađe iz promatranja (a ne umre). (2)
Postoji i *slučajno cenzuriranje* osoba koje izađu iz promatranja, a da nisu umrle ili navršile četrdesetpetu godinu života, jer se vremena izlazaka tih osoba ne mogu predvidjeti. (2)

(*b*) Razdoblje opažanja počinje u trenutku $t = 0$ odmah nakon navršene dobi 40 i mjeri se u mjesecima. Opažena vremena iz tablice su ("+" označava vrijeme cenzuriranja): 6, 6+, 12, 12, 18+, 27, 27+, 27, 30+, 36, 39, 39+, 51+, 54+, 57, 60+, 60+, 60+, 60+, 60+. Od toga su vremena smrti: 6, 12, 27, 39, 57.
Tablica s osnovnim statistikama: (5)

t_j	d_j	c_j	n_j	$\hat{\lambda}_j = \frac{d_j}{n_j}$	$1 - \hat{\lambda}_j$	$\frac{d_j}{n_j(n_j - d_j)}$	$\sum_{i \le j} \frac{d_i}{n_i(n_i - d_i)}$
0	0	0	20	0	1	0	0
6	1	1	20	0.050	0.950	0.00263	0.00263
12	2	1	18	0.111	0.889	0.00694	0.00957
27	2	3	15	0.133	0.867	0.01026	0.01983
39	1	3	10	0.100	0.900	0.01111	0.03094
57	1	5	6	0.167	0.833	0.03333	0.06427

Kaplan-Meierova procjena funkcije doživljenja:

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_j \le t} (1 - \hat{\lambda}_j), \quad t \ge 0. \qquad (2)$$

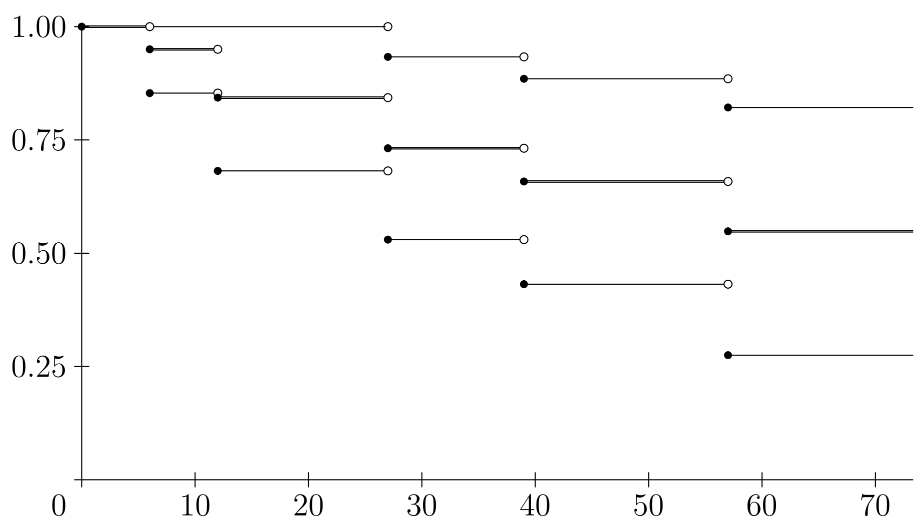
Aproksimativni 95%-pouzdan interval za $S(t)$ (koristi se Greenwoodova formula za aproksimaciju varijance od $\hat{S}(t)$):

$$\hat{S}(t) \pm 2 \cdot \hat{S}(t) \cdot \sqrt{\sum_{t_j \le t} \frac{d_j}{n_j(n_j - d_j)}}, \quad t \ge 0. \tag{2}$$

Tablično: (2+3)

$t \in$	$\hat{S}(t)$	$\pm 2\hat{S}(t)\sqrt{\sum_{t_j \le t} \frac{d_j}{n_j(n_j-d_j)}}$	95%-p.i. za $S(t)$
$[0, 6\rangle$	1.000	± 0.000	$[1, 1]$
$[6, 12\rangle$	0.950	± 0.096	$[0.854, 1]$
$[12, 27\rangle$	0.844	± 0.162	$[0.682, 1]$
$[27, 39\rangle$	0.732	± 0.202	$[0.530, 0.934]$
$[39, 57\rangle$	0.659	± 0.227	$[0.432, 0.886]$
$[57, +\infty\rangle$	0.549	± 0.273	$[0.276, 0.822]$

Slika: (1+1)



(20)

5. (a) Nulhipoteza (H_0) je: $q_x = q_x^s$ za sve $x = 70, \ldots, 75$. (2)
Uz H_0, broj umrlih $D_x \sim N(E_x q_x^s, E_x q_x^s(1 - q_x^s))$, (1)
pa se standardizirane devijacije z_x računaju po formuli:

$$z_x = \frac{d_x - E_x q_x^s}{\sqrt{E_x q_x^s(1 - q_x^s)}}. \quad (1)$$

Testna statistika: $H = \sum_{x=70}^{75} z_x^2 \sim \chi^2(6)$. (2)
Račun: (1+1+1)

x	E_x	d_x	q_x^s	z_x	z_x^2
70	600	23	0.03776	0.073676	0.00543
71	750	31	0.04170	-0.050232	0.00252
72	725	33	0.04602	-0.064608	0.00417
73	650	29	0.05075	-0.712583	0.50778
74	700	35	0.05595	-0.684965	0.46918
75	675	39	0.06164	-0.417228	0.17408
					1.16316

Opažena vrijednost $h = 1.16316$ je manja od $\chi^2_{0.05}(6) = 12.59$ pa ne odbacujemo H_0. (3)
S druge strane, sve devijacije su negativne osim prve što upućuje da je opažena smrtnost manja od smrtnosti pretpostavljene tablicom $a(55)$. To χ^2-test nije indicirao. (2)

(b) Ako je prava smrtnost manja od smrtnosti opisane tablicom $a(55)$, OD će trpiti veće štete po policama rentnog osiguranja od očekivanih. (2)

(c) Nulhipoteza se od H_0 u (a) razlikuje po tome što umjesto q_x^s svugdje treba s desne strane jednakosti biti $\mathring{q}_x$, a z_x se, isto tako, računa po istoj formuli kao u (a), samo što se svugdje q_x^s zamijeni sa $\mathring{q}_x$. Testna statistika H je ista (formulom), ali njena asimptotska χ^2-razdioba ima barem dva stupnja slobode manje od testne statistike u (a). To je zato jer treba procijeniti dva nepoznata parametra a i b iz podataka. (4)

(20)

6. (*a*) Princip korespondencije (suglasnosti, odgovaranja):
Za osobu živu u trenutku t kažemo da je dobi x ako i samo ako bi se njena smrt u trenutku t uračunala u statistiku d_x. (2)
$P'_{x,t}$ = broj osoba živih i pod rizikom koje su dobi x na najbliži rođendan, u trenutku t. (1)
$P'_{x,t} \approx \frac{1}{2}(P_{x-1,t} + P_{x,t})$ (2)

(*b*) Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
E_x^c &= \int_{1.1.1999.}^{1.1.2001.} P'_{x,t}\, dt = && (1)\\
&\approx \tfrac{1}{2}P'_{x,1999} + P'_{x,2000} + \tfrac{1}{2}P'_{x,2001} = && (1)\\
&\approx \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{1}\left(\tfrac{1}{2}P_{x-i,1999} + P_{x-i,2000} + \tfrac{1}{2}P_{x-i,2001}\right) && (1)\\
\Rightarrow \quad \hat{\mu}_x &= \tfrac{d_x(1999)+d_x(2000)}{E_x^c} && (1)\\
\Rightarrow \quad \hat{\mu}_{41} &= \tfrac{20+18}{965} = 0.03938 && (2)\\
\Rightarrow \quad \hat{\mu}_{42} &= \tfrac{21+19}{940.5} = 0.04253. && (2)
\end{aligned}
$$

(*c*) Interval stope je dobni interval $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$ za $x = 41$, 42. (2)

(15)