Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

13. 10. 2003.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 100
Broj zadataka: 6
Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.
Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica ili vlastitih formula, i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

---

1. Za zadano $p_x = 0.9$ izračunajte ${}_{0.5}p_x$ i ${}_{0.5}p_{x+0.5}$ koristeći sljedeće pretpostavke o smrtnosti između dobi x i $x+1$:

(a) pretpostavka uniformne razdiobe smrti; (7 bodova)

(b) Balduccijevu pretpostavku. (8 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. U jednom istraživanju smrtnosti opažano je šest osoba u dobi između (točno) 70 i 71. Neka su:

a_i vrijeme u godinama kada se osoba i, već u dobi 70, počela opažati;
b_i vrijeme u godinama kada je osoba i, već u dobi 70, cenzurirana;
d_i $= 1$ ako je i-ta osoba preminula prije $x + b_i$;
$= 0$ ako je i-ta osoba doživjela dob $x + b_i$.
t_i Ako je $d_i = 1$ tada je $x + t_i$ dob u kojoj je osoba i preminula.

osoba (i)	a_i	b_i	d_i	t_i
1	0	1	0	–
2	0.3	0.9	0	–
3	0.5	1	1	0.9
4	0	0.4	0	–
5	0	0.9	1	0.7
6	0	1	1	0.8

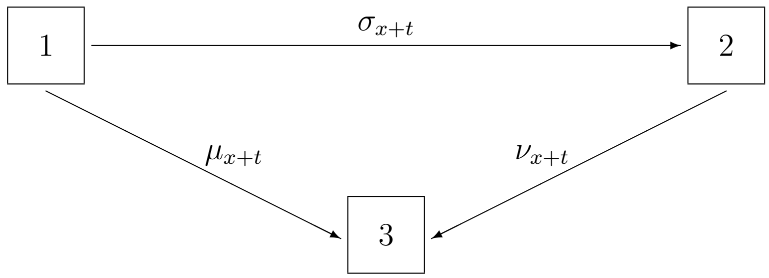
(a) Koristeći Poissonov model smrtnosti i uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti $\bar{\mu}_{70}$ duž dobnog intervala $\langle 70, 71 \rangle$, napišite vjerodostojnost od $\bar{\mu}_{70}$ na osnovi zadanih podataka. (5 bodova)

(b) Procijenite $\bar{\mu}_{70}$ metodom maksimalne vjerodostojnosti. (5 bodova)

(c) Izračunajte procjenu maksimalne vjerodostojnosti od q_{70}. (5 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Navedeni dijagram predstavlja Markovljev model s tri stanja, neprekidan u vremenu. Stanja 1 (*zdrav*) i 2 (*bolestan*) predstavljaju dvije faze u oboljevanju od neizlječive bolesti, dakle, nije moguć prijelaz iz stanja 2 u stanje 1. Stanje 3 označava smrt.



Simboli σ_{x+t}, μ_{x+t} i ν_{x+t} predstavljaju intenzitete prijelaza. Vjerojatnost ${}_tp_x^{ab}$ definirana je izrazom:

$$ {}_tp_x^{ab} := \mathbb{P}(S(t) = b \,|\, S(0) = a), $$

gdje je $S(t)$ stanje u kojoj se osoba (koja je dobi x u vremenu 0) nalazi u vremenu t.

(a) Za $a = 1, 2, 3$ izrazite ${}_tp_x^{aa}$ pomoću intenziteta prijelaza. (5 bodova)

(b) Izrazite ${}_tp_x^{23}$ pomoću intenziteta prijelaza.
(4 boda)

(c) Izvedite Kolmogorovljevu diferencijalnu jednadžbu unaprijed za ${}_tp_x^{12}$ i navedite pripadni početni uvjet, tj. vrijednost za ${}_0p_x^{12}$. (6 bodova)

(d) Ako pretpostavimo da su svi intenziteti prijelaza konstantni, pokažite da je

$$ {}_tp_x^{12} = \frac{\sigma}{\nu - \sigma - \mu}(e^{-(\sigma+\mu)t} - e^{-\nu t}). $$

(5 bodova)

(ukupno 20 bodova)

4. Osiguravajuće društvo sprovelo je sljedeće istraživanje smrtnosti svojih osiguranika. Odabran je uzorak osiguranika u dobi između 40 i 45. Svaka osoba u uzorku opažana je od svog četrdesetog rođendana pa sve do, ili svoje smrti, ili do njenog izlaska, tj. prestanka opažanja zbog raznih razloga osim smrti, ili do svojeg četrdesetpetog rođendana, ovisno o tome što se prvo dogodilo.

(a) Opišite vrste cenzuriranja koja se pojavljuju u tom straživanju. (4 boda)

(b) Dio podataka prikazan je u tablici:

osoba broj	zadnja opažena dob (godine i mjeseci)	ishod
1	40 6	umrla
2	40 6	izašla
3	41 0	umrla
4	41 0	umrla
5	41 6	izašla
6	42 3	umrla
7	42 3	izašla
8	42 3	umrla
9	42 6	izašla
10	43 0	izašla
11	43 3	umrla
12	43 3	izašla
13	44 3	izašla
14	44 6	izašla
15	44 9	umrla
16	45 0	doživjela
17	45 0	doživjela
18	45 0	doživjela
19	45 0	doživjela
20	45 0	doživjela

Na osnovi tih podataka izračunajte Kaplan-Meierovu procjenu funkcije doživljenja. Odredite i aproksimativne 95%-pouzdane intervale za vrijednosti funkcije doživljenja. Procjenu funkcije doživljenja i pripadnu 95%-pouzdanu "prugu" prikažite grafički. (16 bodova)

(ukupno 20 bodova)

5. Procjenjuje se tablica smrtnosti za osobe dobi od 4 do 100 uključivo. Sirove stope smrtnosti izglađene su matematičkom formulom. Izračunate su devijacije opaženih brojeva umrlih od očekivanih, izračunatih na osnovi izglađenih stopa smrtnosti, za svaku dob. Ukupno je 57 pozitivnih i 40 negativnih devijacija.
Testirajte glatkoću pomoću testa predznaka (*Signs Test*):

(a) Navedite nulhipotezu. (4 boda)

(b) Navedite koju razdiobu ima testna statistika uz pretpostavku da vrijedi nulhipoteza. (4 boda)

(c) Sprovedite test i donesite zaključak. (7 bodova)

(ukupno 15 bodova)

6. Neka je T_x buduće trajanje života osobe sadašnje dobi x i neka je K_x cjelobrojno buduće trajanje života iste osobe.

(a) Definirajte $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ i $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ kao matematičko očekivanje funkcija od K_x, odnosno od T_x. (6 bodova)

(b) Pokažite da je

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_t p_x \, dt,$$

i izvedite odgovarajući izraz za $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. (9 bodova)

(ukupno 15 bodova)

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

13. 10. 2003.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (*a*) Uz pretpostavku uniformne razdiobe smrti između cjelobrojnih dobi:

$$
\begin{aligned}
& {}_tq_x = t \cdot q_x && (2)\\
\Rightarrow\ & {}_{0.5}p_x = 1 - {}_{0.5}q_x = 1 - 0.5 \cdot q_x = && (1)\\
& = 1 - 0.5 \cdot (1 - 0.9) = 0.95, && (1)\\
& p_x = {}_{0.5}p_{x+0.5} \cdot {}_{0.5}p_x && (1)\\
\Rightarrow\ & {}_{0.5}p_{x+0.5} = \frac{p_x}{{}_{0.5}p_x} = && (1)\\
& = \frac{0.9}{0.95} = 0.9474. && (1)
\end{aligned}
$$

(*b*) Uz Balduccijevu pretpostavku:

$$
\begin{aligned}
& {}_{1-t}q_{x+t} = (1 - t) \cdot q_x && (3)\\
\Rightarrow\ & {}_{0.5}p_{x+0.5} = 1 - {}_{0.5}q_{x+0.5} = 1 - 0.5 \cdot q_x = && (1)\\
& = 1 - 0.5 \cdot (1 - 0.9) = 0.95, && (1)\\
& p_x = {}_{0.5}p_{x+0.5} \cdot {}_{0.5}p_x && (1)\\
\Rightarrow\ & {}_{0.5}p_x = \frac{p_x}{{}_{0.5}p_{x+0.5}} = && (1)\\
& = \frac{0.9}{0.95} = 0.9474. && (1)
\end{aligned}
$$

(15)

2. (a) Neka je $v_i = t_i - a_i$ ako je $d_i = 1$, a $v_i = b_i - a_i$ ako je $d_i = 0$. Tada je vjerodostojnost od $\bar{\mu}_{70}$ jednaka (do na konstantu):

$$L(\bar{\mu}_{70}) = \prod_{i=1}^{6} e^{-v_i \bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70}^{d_i} \quad (2)$$

$$L(\bar{\mu}_{70}) = e^{-\bar{\mu}_{70}} \cdot e^{-0.6\bar{\mu}_{70}} \cdot e^{-0.4\bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70} \cdot e^{-0.4\bar{\mu}_{70}} \cdot e^{-0.7\bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70} \cdot e^{-0.8\bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70} \quad (1)$$

$$L(\bar{\mu}_{70}) = e^{-3.9\bar{\mu}_{70}} \cdot \bar{\mu}_{70}^{3} \quad (2)$$

(b) MLE od $\bar{\mu}_{70}$ je rješenje stacionarne jednadžbe logvjerodostojnosti:

$$\ell(\bar{\mu}_{70}) = \log L(\bar{\mu}_{70}) = -3.9\bar{\mu}_{70} + 3 \log \bar{\mu}_{70} \quad (1)$$

$$\ell'(\bar{\mu}_{70}) = -3.9 + \frac{3}{\bar{\mu}_{70}} = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\bar{\mu}}_{70} = \frac{3}{3.9} = 0.7692 \quad (2)$$

(c) Budući da je

$$q_{70} = 1 - e^{-\bar{\mu}_{70}} \quad (2)$$

uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti duž dobnog intervala, MLE od q_{70} je

$$\begin{aligned} \hat{q}_{70} &= 1 - e^{-\hat{\bar{\mu}}_{70}} = & (2) \\ &= 1 - e^{-0.7692} = 0.5366. & (1) \end{aligned}$$

(15)

3. (a) Budući da je za svako stanje $a = 1, 2, 3$, ${}_tp_x^{aa} = {}_tp_x^{\overline{aa}}$, (1)

$$ {}_tp_x^{aa} = \exp\{-\int\limits_0^t \sum_{j\neq a} \mu_{x+s}^j \, ds\} \qquad (1)$$

slijedi

$$ {}_tp_x^{11} = \exp\{-\int\limits_0^t (\sigma_{x+s} + \mu_{x+s})\, ds\} \qquad (1)$$
$$ {}_tp_x^{22} = \exp\{-\int\limits_0^t \nu_{x+s}\, ds\} \qquad (1)$$
$$ {}_tp_x^{33} = 1. \qquad (1)$$

(b) Iz formule potpune vjerojatnosti slijedi:

$$ \begin{aligned} {}_tp_x^{23} &= 1 - {}_tp_x^{22} = && (2)\\ &= 1 - \exp\{-\int\limits_0^t \nu_{x+s}\, ds\}. && (2) \end{aligned}$$

(c) Iz Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti slijedi:

$$ \begin{aligned} {}_{t+h}p_x^{12} &= \textstyle\sum_{a=1}^3 {}_tp_x^{1a}\,{}_hp_{x+t}^{a2} = \\ &= {}_tp_x^{11}\,{}_hp_{x+t}^{12} + {}_tp_x^{12}\,{}_hp_{x+t}^{22}. && (1) \end{aligned}$$

Uvrštavajući u dobivenu jednakost definicijske izraze za intenzitete prijelaza:

$$ \begin{aligned} {}_hp_{x+t}^{12} &= h\sigma_{x+t} + o(h), \quad h \to 0 \\ {}_hp_{x+t}^{23} &= h\nu_{x+t} + o(h), \quad h \to 0 && (1) \end{aligned}$$

i koristeći formulu potpune vjerojatnosti:

$$ {}_hp_{x+t}^{21} + {}_hp_{x+t}^{22} + {}_hp_{x+t}^{23} = 1, \qquad (1)$$

dobivamo

$$ \begin{aligned} {}_{t+h}p_x^{12} &= {}_tp_x^{11}(h\sigma_{x+t} + o(h)) + {}_tp_x^{12}(1 - h\nu_{x+t} + o(h)), \quad h \to 0 && (1)\\ \Rightarrow \quad \frac{\partial\, {}_tp_x^{12}}{\partial t} &= \lim_{h\to 0} \frac{{}_{t+h}p_x^{12} - {}_tp_x^{12}}{h} = {}_tp_x^{11}\sigma_{x+t} - {}_tp_x^{12}\nu_{x+t} && (1) \end{aligned}$$

uz početni uvjet

$$ {}_0p_x^{21} = 0. \qquad (1)$$

(d) Iz (c) slijedi da je diferencijalna jednadžba (uz konstantne intenzitete prijelaza):

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{12} + \nu \cdot {}_tp_x^{12} = \sigma e^{-(\sigma+\mu)t}. \qquad (1)$$

Množenjem sa $e^{\nu t}$ i integriranjem po t, uz korištenje početnog uvjeta, slijedi:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}({}_tp_x^{12}e^{\nu t}) &= \sigma e^{(\nu-\sigma-\mu)t} && (1)\\ \Rightarrow \qquad {}_tp_x^{12} &= e^{-\nu t}\int_0^t \sigma e^{(\nu-\sigma-\mu)s}\,ds = && (2)\\ &= \tfrac{\sigma}{\nu-\sigma-\mu}(e^{-(\sigma+\mu)t} - e^{-\nu t}). && (1) \end{aligned}$$

(20)

Napomena: (d) dio zadatka se može riješiti i tako da se provjeri da zadani izraz za ${}_tp_x^{12}$ kao funkcija po t zadovoljava pripadnu diferencijalnu jednadžbu i početni uvjet.

4. (a) Postoji *desno cenzoriranje* do kojega dolazi kada osoba doživi četrdesetpetu godinu života ili izađe iz promatranja (a ne umre). (2)
Postoji i *slučajno cenzuriranje* osoba koje izađu iz promatranja, a da nisu umrle ili navršile četrdesetpetu godinu života, jer se vremena izlazaka tih osoba ne mogu predvidjeti. (2)

(b) Razdoblje opažanja počinje u trenutku $t = 0$ odmah nakon navršene dobi 40 i mjeri se u mjesecima. Opažena vremena iz tablice su ("+" označava vrijeme cenzuriranja): 6, 6+, 12, 12, 18+, 27, 27+, 27, 30+, 36, 39, 39+, 51+, 54+, 57, 60+, 60+, 60+, 60+, 60+. Od toga su vremena smrti: 6, 12, 27, 39, 57.
Tablica s osnovnim statistikama: (5)

t_j	d_j	c_j	n_j	$\hat{\lambda}_j = \frac{d_j}{n_j}$	$1-\hat{\lambda}_j$	$\frac{d_j}{n_j(n_j-d_j)}$	$\sum_{i\le j}\frac{d_i}{n_i(n_i-d_i)}$
0	0	0	20	0	1	0	0
6	1	1	20	0.050	0.950	0.00263	0.00263
12	2	1	18	0.111	0.889	0.00694	0.00957
27	2	3	15	0.133	0.867	0.01026	0.01983
39	1	3	10	0.100	0.900	0.01111	0.03094
57	1	5	6	0.167	0.833	0.03333	0.06427

Kaplan-Meierova procjena funkcije doživljenja:

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_j \le t}(1-\hat{\lambda}_j), \quad t \ge 0. \qquad (2)$$

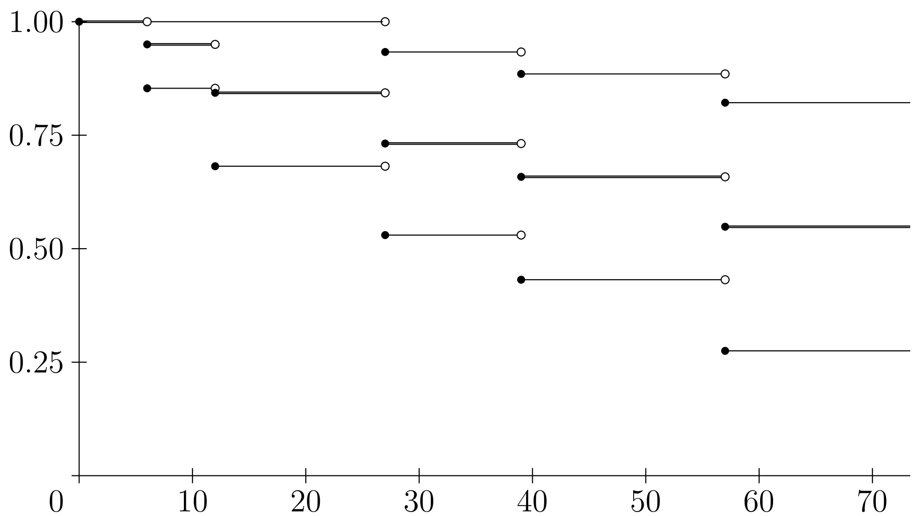
Aproksimativni 95%-pouzdan interval za $S(t)$ (koristi se Greenwoodova formula za aproksimaciju varijance od $\hat{S}(t)$):

$$\hat{S}(t) \pm 2 \cdot \hat{S}(t) \cdot \sqrt{\sum_{t_j \leq t} \frac{d_j}{n_j(n_j - d_j)}}, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Tablično: (2+3)

$t \in$	$\hat{S}(t)$	$\pm 2\hat{S}(t)\sqrt{\sum_{t_j \leq t} \frac{d_j}{n_j(n_j-d_j)}}$	95%-p.i. za $S(t)$
$[0, 6\rangle$	1.000	± 0.000	$[1, 1]$
$[6, 12\rangle$	0.950	± 0.096	$[0.854, 1]$
$[12, 27\rangle$	0.844	± 0.162	$[0.682, 1]$
$[27, 39\rangle$	0.732	± 0.202	$[0.530, 0.934]$
$[39, 57\rangle$	0.659	± 0.227	$[0.432, 0.886]$
$[57, +\infty\rangle$	0.549	± 0.273	$[0.276, 0.822]$

Slika: (1+1)



(20)

5. (a) Nulhipoteza (H_0) je: $q_x = \mathring{q}_x$ za sve $x = 4, \ldots, 100$. (4)

(b) Uz H_0, testna statistika

$$P = \text{broj pozitivnih devijacija} \qquad (2)$$

ima binomnu razdiobu:

$$P \sim b(97, \frac{1}{2}). \qquad (2)$$

(c) Budući da je parametar binomne razdiobe $n = 97$ velik, koristimo normalnu aproksimaciji za P. Za njenu standardiziranu vrijednost vrijedi:

$$Z = \frac{P - 97 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{97}} \overset{H_0}{\approx} N(0,1). \qquad (2)$$

Opažena vrijednost od Z: $z = \frac{57-97/2}{\sqrt{97}/2} = 8.5/4.92 = 1.73$ (1)

P-vrijednost: $\mathbb{P}(|Z| > 1.73 | H_0) = 0.08$ (2)

Dakle, nulhipotezu ne odbacujemo na razini značajnosti od 5%. (2)

(15)

6. (a) Uz $\bar{a}_{\overline{t}|} = \int\limits_0^t v^s\, ds$ i $\ddot{a}_{\overline{k}|} = \sum_{i=0}^{k-1} v^i$,

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}[\bar{a}_{\overline{\min(T_x,\,n)}|}] \qquad (3)$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}[\ddot{a}_{\overline{\min(K_x+1,\,n)}|}]. \qquad (3)$$

(b) Po definiciji mat. očekivanja je:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}[\bar{a}_{\overline{\min(T_x,\,n)}|}] = \int\limits_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} f_x(t)\, dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x = && (2)\\
&= \int\limits_0^n \int\limits_0^t v^s\, ds\, f_x(t)\, dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x = \\
&= \int\limits_0^n v^s \int\limits_s^t f_x(t)\, dt\, ds + \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x = \\
&= \int\limits_0^n v^s ({}_s p_x - {}_n p_x)\, ds + \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x = \\
&= \int\limits_0^s v^s\, {}_s p_x\, ds && (2)\\
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}[\ddot{a}_{\overline{\min(K_x+1,\,n)}|}] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x = && (2)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} v^i\, {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i \sum_{k=i}^{n-1} {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i ({}_i p_x - {}_n p_x) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x = && (2)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i\, {}_i p_x. && (1)
\end{aligned}$$

(15)