Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

13. 9. 2004.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 100
Broj zadataka: 6
Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.
Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica ili vlastitih formula, i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

---

1. Pomoću *English Life Table No. 12* izračunajte uvjetnu vjerojatnost smrti muške osobe prije navršene točne dobi 56, a koja je doživjela točnu dob od 55 godina i 6 mjeseci koristeći sljedeće pretpostavke o smrtnosti između dobi 55 i 56:

(a) pretpostavku uniformne razdiobe smrti; (7 bodova)

(b) intenzitet smrtnosti se ravna po Gompertzovom zakonu. (8 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. U tablici se nalaze podaci dobiveni iz malog uzorka zaposlenika jedne tvornice koji predstavljaju vremena u mjesecima do prvog izostajanja s posla. Sufiksom "+" označena su vremena napuštanja posla koja se ne smatraju izostancima (npr. prekid radnog odnosa i sl.).

muškarci:	6+	11	13+	15	16+	19+	20	
žene:	2+	4	7	8+	10+	12+	17	21+

Za stopu hazarda vremena do prvog izostanka s posla koristi se Coxov model:

$$\lambda(t|x) = \lambda_0(t)e^{\beta x},$$

gdje je $x = 0$ za muškarce, a $x = 1$ za žene.

(a) Na koju skupinu zaposlenika se odnosi bazna stopa hazarda? (1 bod)

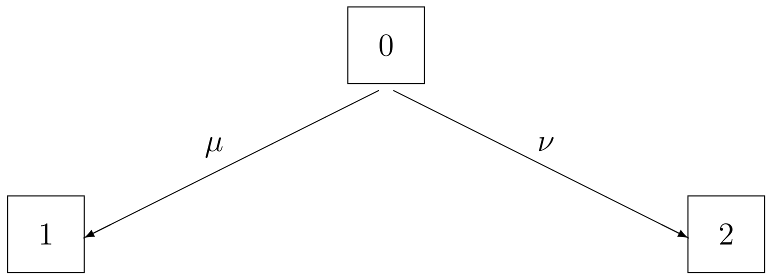
(b) Odredite parcijalnu vjerodostojnost parametra β na osnovi opaženih podataka i procijenite taj parametar metodom maksimalne (parcijalne) vjerodostojnosti. (7 bodova)

(c) Procijenite aproksimativni 95% pouzdan interval za β. (5 bodova)

(d) Imaju li žene značajno veću stopu izostanaka s posla od muškaraca? Sprovedite test. (7 bodova)

(ukupno 20 bodova)

3. Navedeni dijagram predstavlja Markovljev model za dva uzroka smanjenja, neprekidan u vremenu. Osoba koja je zaposlena, aktivna (u stanju 0) može iz tog stanja izaći jedino ako je umrla (stanje 1) ili se umirovila (stanje 2). Pretpostavlja se da su intenziteti prijelaza iz stanje 0 u stanje 1 i iz stanja 0 u stanje 2, μ i ν (tim redom), konstantni u vremenu.



Uvjetna vjerojatnost ${}_tp_x^{ab}$ definirana je izrazom:

$$ {}_tp_x^{ab} := \mathbb{P}(S(t) = b \,|\, S(0) = a), $$

gdje je $S(t)$ stanje u kojoj se osoba (koja je dobi x u vremenu 0) nalazi u vremenu t.

(a) Postavite Kolmogorovljeve jednažbe za ${}_tp_x^{0a}$, $a = 0, 1, 2$, i pripadne početne uvjete. (7 bodova)

(b) Izrazite ${}_tp_x^{0a}$ za sve $a = 0, 1, 2$, kao funkcije parametara μ, ν i vremena t i x (tj. riješite jednažbe iz (a) dijela zadatka).
(8 bodova)

(ukupno 15 bodova)

4. Kao dio jednog istraživanja smrtnosti, zabilježen je ukupan broj umrlih d_x tijekom razdoblja opažanja gdje je x definirano kao dob na **najbliži** rođendan u trenutku smrti, $x = 55, 56, 57$. S druge strane, tijekom istoga razdoblja opažanja koje je trajalo od 1. ožujka 2001. do 1. ožujka 2004. godine zabilježen je broj živih osoba i pod rizikom, $P_{x,t}$, dobi $x = 55, 56, 57$ na **zadnji** rođendan u trenutcima $t =$ 1. ožujka 2001., 1. ožujka 2002., 1. ožujka 2003. i 1. ožujka 2004. godine.

(a) Navedite princip korespondencije i definirajte censusni podatak $P'_{x,t}$ koji je konzistentan s navedenom definicijom dobi. Navedite formulu za aproksimaciju $P'_{x,t}$ pomoću opaženih podataka $P_{x,t}$. (6 bodova)

(b) Navedite formulu kojom se iz prikupljenih podataka $P_{x,t}$, $x = 55, 56, 57$, $t =$ 1.3.2001., 1.3.2002., 1.3.2003., 1.3.2004., procjenjuje odgovarajuća centralna izloženost riziku E^c_{56}. (5 bodova)

(c) Formulom

$$\hat{\mu} = \frac{d_{56}}{E^c_{56}}$$

procjenjuje se parametar intenziteta smrtnosti μ_{56+f}. Odredite vrijednost od f navodeći sve pretpostavke koje ste pri tome koristili. (4 boda)

(ukupno 15 bodova)

5. Izglađivanje podataka o smrtnosti muške populacije jedne regije u UK sprovedena je upotrebom matematičke formule koja ovisi o 3 parametra procijenjenih metodom maksimalne vjerodostojnosti na osnovi binomnog modela. Izvod iz prikupljenih i izglađenih podataka nalazi se u tablici:

dob x	broj umrlih d_x	izglađene stope $\mathring{q}_x$	početna izloženost riziku E_x	$E_x \cdot \mathring{q}_x$
14	3	0.00038	12800	4.86
15	8	0.00043	15300	6.58
16	5	0.00048	12500	6.00
17	14	0.00053	15000	7.95
18	17	0.00059	16500	9.74
19	9	0.00066	10100	6.67
20	15	0.00074	12800	9.47
21	10	0.00083	13700	11.37
22	10	0.00093	11900	11.07
ukupno	91			73.71

(a) Pomoću χ^2-testa testirajte prilagođenost izglađenih stopa podacima: navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte (uz razinu značajnosti od 5%). (10 bodova)

(b) Sprovedite test predznaka: navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte (uz razinu značajnosti od 5%) i navedite koje se loše karakteristike prilagodbe detektiraju tim testom u odnosu na test iz (a) dijela zadatka. (10 bodova)

(ukupno 20 bodova)

6. Neka je T_x buduće trajanje života osobe sadašnje dobi x i neka je K_x cjelobrojno buduće trajanje života iste osobe.

(a) Definirajte $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ i $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ kao matematičko očekivanje funkcija od K_x, odnosno od T_x. (6 bodova)

(b) Pokažite da je

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, dt,$$

i izvedite odgovarajući izraz za $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. (9 bodova)

(ukupno 15 bodova)

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

13. 9. 2004.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Treba izračunati ${}_{0.5}q_{55.5}$.

(a) Uz pretpostavku uniformne razdiobe smrti:

$$
\begin{aligned}
& {}_tq_{55} = t \cdot q_{55} && (1)\\
& q_{55} = (\text{tablice}) = 0.01331 && (2)\\
\Rightarrow\ & {}_{0.5}q_{55} = 0.5 \cdot q_{55} = 0.5 \cdot 0.01331 = 0.00666, && (1)\\
& p_{55} = {}_{0.5}p_{55.5} \cdot {}_{0.5}p_{55} && (1)\\
\Rightarrow\ & {}_{0.5}q_{55.5} = 1 - {}_{0.5}p_{55.5} = 1 - \frac{p_{55}}{{}_{0.5}p_{55}} = \frac{0.5 \cdot q_{55}}{1 - {}_{0.5}q_{55}} = && (1)\\
& = \frac{0.00666}{0.99335} = 0.00670. && (1)
\end{aligned}
$$

(b) Intenzitet smrtnosti (Gompertz): $\mu_x = B \cdot C^x$ (1)
Tablice: $\mu_{55} = 0.01263$, $\mu_{56} = 0.01420$ (2)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ & 0.01263 = B \cdot C^{55}, 0.01420 = B \cdot C^{56} && \\
\Rightarrow\ & C = \tfrac{0.01420}{0.01263} = 1.12431, B = \tfrac{\mu_{55}}{C^{55}} = \tfrac{0.01263}{629.035} = 2.0078 \cdot 10^{-5}. && (2)\\
& {}_tp_x = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds) && \\
\Rightarrow\ & {}_{0.5}q_{55.5} = 1 -_{0.5} p_{55.5} = 1 - \exp(-\int_0^{0.5} \mu_{55.5+t}\, dt) = && (1)\\
& = 1 - \exp(-B \cdot C^{55.5} \int_0^{0.5} C^t\, dt) = && (1)\\
& = 1 - \exp(-B \cdot C^{55.5} \tfrac{C^{0.5}-1}{\ln C}) = 1 - e^{-0.0068959} = 0.00687. && (1)
\end{aligned}
$$

(15)

2. (a) Bazni hazard se odnosi na muškarce. (1)

(b) Neka su t_i vremena izostanaka, a $R(t_j)$ neka je broj osoba koje još nisu izostale s posla i pod rizikom. Tada je parcijalna vjerodostojnost: (2)

$$L(\beta) = \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{\beta x_j}}{\sum\limits_{i \in R(t_j)} e^{\beta x_i}}.$$

t_j : 4(ž) 7(ž) 11(m) 15(m) 17(ž) 20(m) (1)

$$L(\beta) = \frac{e^{\beta\cdot 1}}{7e^{\beta}+7} \cdot \frac{e^{\beta\cdot 1}}{6e^{\beta}+6} \cdot \frac{e^{\beta\cdot 0}}{3e^{\beta}+6} \cdot \frac{e^{\beta\cdot 0}}{2e^{\beta}+4} \cdot \frac{e^{\beta\cdot 1}}{2e^{\beta}+2} \cdot \frac{e^{\beta\cdot 0}}{e^{\beta}+1}$$

$$L(\beta) = \frac{e^{3\beta}}{504 \cdot (e^{\beta}+1)^4 \cdot (e^{\beta}+2)^2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \ell(\beta) = \ln L(\beta) = 3\beta - 4\ln(e^{\beta}+1) - 2\ln(e^{\beta}+2) - \ln 504$$

$$\ell'(\beta) = -3 + \tfrac{4}{e^{\beta}+1} + \tfrac{4}{e^{\beta}+2} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3e^{2\beta} + e^{\beta} - 6 = 0 \Leftrightarrow e^{\beta} = \tfrac{\sqrt{73}-1}{6} \Rightarrow \hat{\beta} = 0.2290. \quad (2)$$

(c) Iz (a) slijedi

$$\ell''(\beta) = -\tfrac{4e^{\beta}}{(1+e^{\beta})^2} - \tfrac{4e^{\beta}}{(2+e^{\beta})^2} \Rightarrow \ell''(\hat{\beta}) = -1.46101. \quad (2)$$

Budući da je $(\hat{\beta} - \beta)\sqrt{-\ell''(\hat{\beta})} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1),$ (1)

$\Rightarrow$ 95% p.i. je $\hat{\beta} \pm 2 \cdot 0.8273 = 0.2290 \pm 1.6546.$ (2)

(d) Testiraju se hipoteze:
H_0: $\beta = 0$
$H_1 : \beta > 0$ (1)
Testna statistika: $Z = (\hat{\beta} - 0)\sqrt{-\ell''(0)} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$ (2)
Opažena vrijednost: $z = \frac{0.2290}{0.8321} = 0.2752$ (1)
P-vrijednost: $\mathbb{P}(Z > 0.2752 | H_0) = 1 - \Phi(0.2752) = 0.39$ (2)
Ne odbacujemo H_0 u korist alternative H_1, tj. žene nemaju značajno veću stopu izostanaka s posla od muškaraca. (1)

(20)

3. (*a*) Prema općoj formuli:

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{0a} = \sum_{b\neq a}({}_tp_x^{0b}\mu_{x+t}^{ba} - {}_tp_x^{0a}\mu_{x+t}^{ab}), \quad a = 0, 1, 2, \qquad (2)$$

$$\text{(I)} \quad \frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{00} = -{}_tp_x^{00}(\mu+\nu), \quad {}_0p_x^{00} = 1 \qquad (2)$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{01} = {}_tp_x^{00}\mu, \quad {}_0p_x^{01} = 0 \qquad (2)$$

$$\text{(III)} \quad \frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{02} = {}_tp_x^{00}\nu, \quad {}_0p_x^{02} = 0. \qquad (1)$$

(*b*) Iz (*a*) slijedi:

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad \ln {}_tp_x^{00} - \ln {}_0p_x^{00} = -(\mu+\nu)t, \ {}_0p_x^{00} = 1$$

$$\Rightarrow \quad {}_tp_x^{00} = e^{-(\mu+\nu)t} \qquad (2)$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{01} = \mu e^{-(\mu+\nu)t}, \ {}_0p_x^{01} = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad {}_tp_x^{01} = {}_0p_x^{01} + \int_0^t \mu e^{-(\mu+\nu)s}\,ds = \frac{\mu}{\mu+\nu}(1-e^{-(\mu+\nu)t}) \qquad (2)$$

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{02} = \nu e^{-(\mu+\nu)t}, \ {}_0p_x^{02} = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad {}_tp_x^{02} = {}_0p_x^{02} + \int_0^t \nu e^{-(\mu+\nu)s}\,ds = \frac{\nu}{\mu+\nu}(1-e^{-(\mu+\nu)t}) \qquad (2)$$

(15)

4. (*a*) Princip korespondencije (suglasnosti, odgovaranja):
Za osobu živu u trenutku t kažemo da je dobi x ako i samo ako bi se njena smrt u trenutku t uračunala u statistiku d_x. (2)
$P'_{x,t}$ = broj osoba živih i pod rizikom koje su dobi x na najbliži rođendan, u trenutku t. (2)
$P'_{x,t} \approx \frac{1}{2}(P_{x-1,t} + P_{x,t})$ (2)

(*b*) Označimo: $t_i = 1$. ožujka $(2000+i)$. g., $i = 1, 2, 3, 4$. Tada:

$$E_{56}^c = \int_{t_1}^{t_4} P'_{56,t}\,dt = \qquad (1)$$

$$\approx \frac{1}{2}P'_{56,t_1} + P'_{56,t_2} + P'_{56,t_3} + \frac{1}{2}P'_{56,t_4} = \qquad (2)$$

$$\approx \frac{1}{2}\sum_{x=55}^{56}(\tfrac{1}{2}P_{x,t_1} + P_{x,t_2} + P_{x,t_3} + \tfrac{1}{2}P_{x,t_4}) \qquad (2)$$

(*c*) Budući da je interval stope dobni interval $[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}] = [55.5, 56.5]$, uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti duž tog intervala, te da se smrt u srednjem događa na sredini tog intervala, (2)
$f = 0$. (2)

(15)

5. Tablica:

x	d_x	$\mathring{q}_x$	E_x	$E_x \cdot \mathring{q}_x$	z_x	z_x^2
14	3	0.00038	12800	4.86	-0.84	0.7056
15	8	0.00043	15300	6.58	0.55	0.3025
16	5	0.00048	12500	6.00	-0.41	0.1681
17	14	0.00053	15000	7.95	2.15	4.6225
18	17	0.00059	16500	9.74	2.33	5.4289
19	9	0.00066	10100	6.67	0.90	0.8100
20	15	0.00074	12800	9.47	1.80	3.2400
21	10	0.00083	13700	11.37	-0.41	0.1681
22	10	0.00093	11900	11.07	-0.32	0.1024
ukupno	91			73.71		15.5481

(a) H_0: $q_x = \mathring{q}_x$ za sve $x = 14, 15, \ldots, 22$
H_1: $q_x \neq \mathring{q}_x$ za neki $x = 14, 15, \ldots, 22$ (1)
Testna statistika: $H = \sum_{x=14}^{22} Z_x^2 \overset{H_0}{\sim} \chi^2(9-3) = \chi^2(6)$ (2)
gdje je $Z_x = \frac{D_x - E_x \mathring{q}_x}{\sqrt{E_x \mathring{q}_x (1-\mathring{q}_x)}}$. (2)
Opažena vrijednost: $h = 15.55$ (2)
P-vrijednost: $\mathbb{P}(H > 15.55 | H_0) = 0.016$ (2)
Odbacujemo H_0 (uz 5% rizika). (1)

(b) Hipoteze koje se testiraju su iste kao u (a). (1)
Testna staistika: $P =$ broj pozitivnih devijacija $\overset{H_0}{\sim} b(9, \frac{1}{2})$ (2)
Opažena vrijednost: $p = 5$ (1)
P-vrijednost: $2 \sum_{j=1}^{\min\{p, 9-p\}} \binom{9}{j} \frac{1}{2^9} = 2 \sum_{j=1}^{4} \binom{9}{j} \frac{1}{2^9} = 0.51$ (3)
Ne odbacujemo H_0. (1)
Testom predznaka detektiramo pristranost izglađivanja. (2)
(20)

6. (a) Uz $\bar{a}_{\overline{t}|} = \int_0^t v^s\,ds$ i $\ddot{a}_{\overline{k}|} = \sum_{i=0}^{k-1} v^i$,

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}[\bar{a}_{\overline{\min(T_x,\,n)}|}] && (3)\\
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}[\ddot{a}_{\overline{\min(K_x+1,\,n)}|}]. && (3)
\end{aligned}
$$

(b) Po definiciji mat. očekivanja je:

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}[\bar{a}_{\overline{\min(T_x,\,n)}|}] = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} f_x(t)\,dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = && (2)\\
&= \int_0^n \int_0^t v^s\,ds\, f_x(t)\,dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = \\
&= \int_0^n v^s \int_s^t f_x(t)\,dt\,ds + \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = \\
&= \int_0^n v^s({}_sp_x - {}_np_x)\,ds + \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = \\
&= \int_0^s v^s\,{}_sp_x\,ds && (2)\\
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \mathbb{E}[\ddot{a}_{\overline{\min(K_x+1,\,n)}|}] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\,{}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = && (2)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} v^i\,{}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i \sum_{k=i}^{n-1} {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i({}_ip_x - {}_np_x) + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x = && (2)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i\,{}_ip_x. && (1)
\end{aligned}
$$

(15)