Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski specijalistički sveučilišni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

10. 4. 2007.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 100
Broj zadataka: 6
Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.
Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica ili vlastitih formula, i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

---

1. Stopa smrtnosti osobe iz određene populacije u dobi 75 je $q_{75} = 0.06229$.

(a) Izračunajte ${}_{0.25}p_{75}$ i ${}_{0.25}p_{75.75}$ uz pretpostavku uniformne razdiobe smrti između cjelobrojnih dobi. (8 bodova)

(b) Izračunajte iste vjerojatnosti kao u (a), ali uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti između cjelobrojnih dobi. (7 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. U jednom istraživanju smrtnosti opažano je šest osoba u dobi između (točno) 70 i 71. Neka su:

a_i vrijeme u godinama kada se osoba i, već u dobi 70, počela opažati;
b_i vrijeme u godinama kada je osoba i, već u dobi 70, cenzurirana;
d_i $= 1$ ako je i-ta osoba preminula prije $x + b_i$;
$= 0$ ako je i-ta osoba doživjela dob $x + b_i$.
t_i Ako je $d_i = 1$ tada je $x + t_i$ dob u kojoj je osoba i preminula.

osoba (i)	a_i	b_i	d_i	t_i
1	0	1	0	–
2	0.3	0.9	0	–
3	0.5	1	1	0.9
4	0	0.4	0	–
5	0	0.9	1	0.7
6	0	1	1	0.8

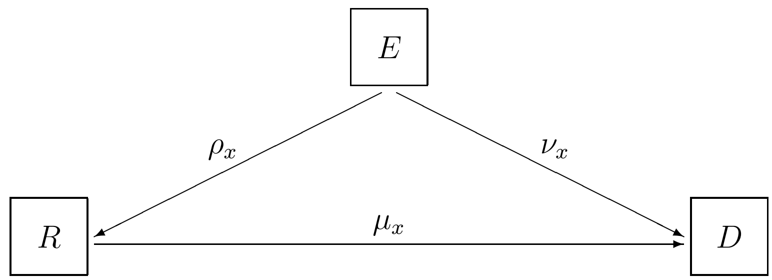
(a) Koristeći Poissonov model smrtnosti i uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti $\bar{\mu}_{70}$ duž dobnog intervala $\langle 70, 71 \rangle$, napišite vjerodostojnost od $\bar{\mu}_{70}$ na osnovi zadanih podataka. (5 bodova)

(b) Procijenite $\bar{\mu}_{70}$ metodom maksimalne vjerodostojnosti. (5 bodova)

(c) Izračunajte procjenu maksimalne vjerodostojnosti od q_{70}. (5 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Za svoju mirovinsku shemu veliko poduzeće koristi Markovljev model s tri stanja (E = "zaposlen", R = "umirovljen", D = "mrtav") kao na slici.



(a) Definirajte ${}_tp_x^{RD}$. (3 boda)

(b) Napišite odgovarajući sustav diferencijalnih jednadžbi za ${}_tp_x^{EE}$, ${}_tp_x^{ER}$, ${}_tp_x^{ED}$, ${}_tp_x^{RR}$ i ${}_tp_x^{RD}$. (7 bodova)

Pretpostavimo da opažamo veliki broj N zaposlenika dobi x. i-ta osoba se opaža od dobi $x + a_i$ do dobi $x + b_i$, gdje su $0 \leq a_i < b_i \leq 1$. Među njima opaženo je K umirovljenih i M umrlih.

(c) Uz pretpostavku da su intenziteti prijelaza konstantni između dobi x i $x + 1$, napišite njihovu vjerodostojnost na osnovi opaženih podataka o zaposlenicima. (5 bodova)

(d) Nađite procjenitelj maksimalne vjerodostojnosti za ρ_x. (5 bodova)

(ukupno 20 bodova)

4. Kao dio jednog istraživanja smrtnosti, zabilježen je ukupan broj umrlih d_x tijekom razdoblja opažanja gdje je x definirano kao dob na **najbliži** rođendan u trenutku smrti, $x = 55, 56, 57$. S druge strane, tijekom istoga razdoblja opažanja koje je trajalo od 1. ožujka 2001. do 1. ožujka 2004. godine zabilježen je broj živih osoba i pod rizikom, $P_{x,t}$, dobi $x = 55, 56, 57$ na **zadnji** rođendan u trenutcima $t =$ 1. ožujka 2001., 1. ožujka 2002., 1. ožujka 2003. i 1. ožujka 2004. godine.

(a) Navedite princip korespondencije i definirajte censusni podatak $P'_{x,t}$ koji je konzistentan s navedenom definicijom dobi. Navedite formulu za aproksimaciju $P'_{x,t}$ pomoću opaženih podataka $P_{x,t}$. (6 bodova)

(b) Navedite formulu kojom se iz prikupljenih podataka $P_{x,t}$, $x = 55, 56, 57$, $t =$ 1.3.2001., 1.3.2002., 1.3.2003., 1.3.2004., procjenjuje odgovarajuća centralna izloženost riziku E^c_{56}. (5 bodova)

(c) Formulom

$$\hat{\mu} = \frac{d_{56}}{E^c_{56}}$$

procjenjuje se parametar intenziteta smrtnosti μ_{56+f}. Odredite vrijednost od f navodeći sve pretpostavke koje ste pri tome koristili. (4 boda)

(ukupno 15 bodova)

5. Osiguravajuće društvo istražuje nedavno iskustvo o smrtnosti svojih muških osiguranika rentnog osiguranja. Izvod iz prikupljenih podataka se nalazi u tablici:

dob (x)	početna izloženost riziku (E_x)	opaženi broj umrlih (d_x)
70	600	23
71	750	31
72	725	33
73	650	29
74	700	35
75	675	39

(a) Pomoću χ^2-testa usporedite da li opaženo iskustvo odgovara iskustvu smrtnosti iz tablice $a(55)$ *Ultimate Mortality Table for Male Annuitants*. Na bazi te tablice su određene premije za rente navedenog osiguravajućeg društva (OD). Navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte. (14 bodova)

(b) Komentirajte kakve će financijske posljedice biti po OD ako nastavi prodavati rente koje su vrednovane na bazi tablica $a(55)$. (2 boda)

(c) Navedite koje su razlike u primjeni testa iz (a) ako opažene stope smrtnosti uspoređujemo sa izglađenim stopama

$$\mathring{q}_x = a + bq_x^s,$$

pri čemu parametre a, b treba procijeniti iz podataka, a q_x^s su standardne stope iz tablice $a(55)$. (4 boda)

(ukupno 20 bodova)

6. Neka je T_x buduće trajanje života osobe sadašnje dobi x i neka je K_x cjelobrojno buduće trajanje života iste osobe.

(a) Definirajte $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ i $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ kao matematičko očekivanje funkcija od K_x, odnosno od T_x. (6 bodova)

(b) Pokažite da je

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, dt,$$

i izvedite odgovarajući izraz za $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. (9 bodova)

(ukupno 15 bodova)

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski specijalistički sveučilišni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

10. 4. 2007.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (a) Uz pretpostavku uniformne razdiobe smrti između cjelobrojnih dobi:

$$ {}_tq_{75} = \int\limits_{75}^{75+t} c\,ds = ct,\ 0 < t \le 1 \quad \Rightarrow \quad c = q_{75} \ \ (\text{za } t = 1) \qquad (2) $$

$$ \Rightarrow \ {}_{0.25}p_{75} = 1 - {}_{0.25}q_{75} = 1 - 0.25 \cdot q_{75} = \qquad (2) $$

$$ = 1 - 0.25 \cdot 0.06229 = 0.98443, \qquad (1) $$

$$ p_{75} = {}_{0.75}p_{75} \cdot {}_{0.25}p_{75.75} \qquad (1) $$

$$ \Rightarrow \ {}_{0.25}p_{75.75} = \frac{1 - q_{75}}{1 - 0.75 \cdot q_{75}} = \qquad (1) $$

$$ = \frac{0.93771}{0.95328} = 0.98366. \qquad (1) $$

(b) Uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti između cjelobrojnih dobi:

$$ p_{75} = \exp\{-\int\limits_0^1 \mu_{75+t}\,dt\} = e^{-\mu} = 1 - q_{75} = 0.93771 \qquad (2) $$

$$ \Rightarrow \ \mu = -\ln 0.93771 = 0.0643145. \qquad (1) $$

$$ {}_{0.25}p_{75} = \exp\{-\int\limits_0^{0.25} \mu\,dt\} = e^{-0.25\mu} = 0.98405, \qquad (2) $$

$$ {}_{0.25}p_{75.75} = \exp\{-\int\limits_0^{0.25} \mu\,dt\} = e^{-0.25\mu} = 0.98405. \qquad (2) $$

(15)

2. (a) Neka je $v_i = t_i - a_i$ ako je $d_i = 1$, a $v_i = b_i - a_i$ ako je $d_i = 0$. Tada je vjerodostojnost od $\bar{\mu}_{70}$ jednaka (do na konstantu):

$$L(\bar{\mu}_{70}) = \prod_{i=1}^{6} e^{-v_i \bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70}^{d_i} \qquad (2)$$

$$L(\bar{\mu}_{70}) = e^{-\bar{\mu}_{70}} \cdot e^{-0.6\bar{\mu}_{70}} \cdot e^{-0.4\bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70} \cdot e^{-0.4\bar{\mu}_{70}} \cdot e^{-0.7\bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70} \cdot e^{-0.8\bar{\mu}_{70}} \bar{\mu}_{70} \qquad (1)$$

$$L(\bar{\mu}_{70}) = e^{-3.9\bar{\mu}_{70}} \cdot \bar{\mu}_{70}^{3} \qquad (2)$$

(b) MLE od $\bar{\mu}_{70}$ je rješenje stacionarne jednadžbe logvjerodostojnosti:

$$\ell(\bar{\mu}_{70}) = \log L(\bar{\mu}_{70}) = -3.9\bar{\mu}_{70} + 3 \log \bar{\mu}_{70} \qquad (1)$$

$$\ell'(\bar{\mu}_{70}) = -3.9 + \frac{3}{\bar{\mu}_{70}} = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\bar{\mu}}_{70} = \frac{3}{3.9} = 0.7692 \qquad (2)$$

(c) Budući da je

$$q_{70} = 1 - e^{-\bar{\mu}_{70}} \qquad (2)$$

uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti duž dobnog intervala, MLE od q_{70} je

$$\begin{aligned} \hat{q}_{70} &= 1 - e^{-\hat{\bar{\mu}}_{70}} = & (2) \\ &= 1 - e^{-0.7692} = 0.5366. & (1) \end{aligned}$$

(15)

3. (a) ${}_tp_x^{RD}$ je vjerojatnost da će osoba dobi x koja je u toj dobi u mirovini, u dobi $x+t$ biti pokojna. (3)

(b) Prema općoj formuli:

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ab} = \textstyle\sum_{c\neq b}({}_tp_x^{ac}\mu_{x+t}^{cb} - {}_tp_x^{ab}\mu_{x+t}^{bc}),\quad a,b = E,R,D, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{EE} = -{}_tp_x^{EE}(\rho_{x+t}+\nu_{x+t}),\quad {}_0p_x^{EE} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ER} = {}_tp_x^{EE}\rho_{x+t} - {}_tp_x^{ER}\mu_{x+t},\quad {}_0p_x^{ER} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ED} = {}_tp_x^{ER}\mu_{x+t} + {}_tp_x^{EE}\nu_{x+t},\quad {}_0p_x^{ED} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{RR} = -{}_tp_x^{RR}\mu_{x+t},\quad {}_0p_x^{RR} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{RD} = {}_tp_x^{RR}\mu_{x+t},\quad {}_0p_x^{RD} = 0. \qquad (1)$$

(c) $L(\rho,\nu) = \text{const.}\cdot\prod_{i=1}^{N} e^{-(\rho+\nu)(b_i-a_i)}\cdot\rho^K\nu^M$ (5)

(d) MLE je rješenje stacionarne jednadžbe (za $\ell = \ln L$):

$$\frac{\partial\ell}{\partial\rho} = -\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i) + \frac{K}{\rho} = 0 \ \Rightarrow\ \hat\rho_x = \hat\rho = \frac{K}{\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)}. \qquad (5)$$

(20)

4. (a) Princip korespondencije (suglasnosti, odgovaranja):
Za osobu živu u trenutku t kažemo da je dobi x ako i samo ako bi se njena smrt u trenutku t uračunala u statistiku d_x. (2)
$P'_{x,t}$ = broj osoba živih i pod rizikom koje su dobi x na najbliži rođendan, u trenutku t. (2)
$P'_{x,t} \approx \frac{1}{2}(P_{x-1,t} + P_{x,t})$ (2)

(b) Označimo: $t_i = 1$. ožujka $(2000+i)$. g., $i = 1,2,3,4$. Tada:

$$\begin{aligned} E_{56}^c &= \int_{t_1}^{t_4} P'_{56,t}\,dt = & (1)\\ &\approx \tfrac{1}{2}P'_{56,t_1} + P'_{56,t_2} + P'_{56,t_3} + \tfrac{1}{2}P'_{56,t_4} = & (2)\\ &\approx \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{x=55}^{56}(\tfrac{1}{2}P_{x,t_1} + P_{x,t_2} + P_{x,t_3} + \tfrac{1}{2}P_{x,t_4}) & (2)\end{aligned}$$

(c) Budući da je interval stope dobni interval $[x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}] = [55.5, 56.5]$, uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti duž tog intervala, te da se smrt u srednjem događa na sredini tog intervala, (2)
$f = 0$. (2)

(15)

5. (a) Nulhipoteza (H_0) je: $q_x = q_x^s$ za sve $x = 70, \dots, 75$. (2)
Uz H_0, broj umrlih $D_x \sim N(E_x q_x^s, E_x q_x^s(1 - q_x^s))$, (1)
pa se standardizirane devijacije z_x računaju po formuli:

$$z_x = \frac{d_x - E_x q_x^s}{\sqrt{E_x q_x^s (1 - q_x^s)}}. \quad (1)$$

Testna statistika: $H = \sum_{x=70}^{75} z_x^2 \sim \chi^2(6)$. (2)
Račun: (1+1+1)

x	E_x	d_x	q_x^s	z_x	z_x^2
70	600	23	0.03776	0.073676	0.00543
71	750	31	0.04170	-0.050232	0.00252
72	725	33	0.04602	-0.064608	0.00417
73	650	29	0.05075	-0.712583	0.50778
74	700	35	0.05595	-0.684965	0.46918
75	675	39	0.06164	-0.417228	0.17408
					1.16316

Opažena vrijednost $h = 1.16316$ je manja od $\chi^2_{0.05}(6) = 12.59$ pa ne odbacujemo H_0. (3)
S druge strane, sve devijacije su negativne osim prve što upućuje da je opažena smrtnost manja od smrtnosti pretpostavljene tablicom $a(55)$. To χ^2-test nije indicirao. (2)

(b) Ako je prava smrtnost manja od smrtnosti opisane tablicom $a(55)$, OD će trpiti veće štete po policama rentnog osiguranja od očekivanih. (2)

(c) Nulhipoteza se od H_0 u (a) razlikuje po tome što umjesto q_x^s svugdje treba s desne strane jednakosti biti $\mathring{q}_x$, a z_x se, isto tako, računa po istoj formuli kao u (a), samo što se svugdje q_x^s zamijeni sa $\mathring{q}_x$. Testna statistika H je ista (formulom), ali njena asimptotska χ^2-razdioba ima barem dva stupnja slobode manje od testne statistike u (a). To je zato jer treba procijeniti dva nepoznata parametra a i b iz podataka. (4)

(20)

6. (a) Uz $\bar{a}_{\overline{t|}} = \int\limits_0^t v^s\,ds$ i $\ddot{a}_{\overline{k|}} = \sum_{i=0}^{k-1} v^i$,

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \mathbb{E}[\bar{a}_{\overline{\min(T_x,\,n)|}}] \qquad (3)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \mathbb{E}[\ddot{a}_{\overline{\min(K_x+1,\,n)|}}]. \qquad (3)$$

(b) Po definiciji mat. očekivanja je:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n|}} &= \mathbb{E}[\bar{a}_{\overline{\min(T_x,\,n)|}}] = \int\limits_0^n \bar{a}_{\overline{t|}} f_x(t)\,dt + \bar{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_x = \\
&= \int\limits_0^n \int\limits_0^t v^s\,ds\, f_x(t)\,dt + \bar{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_x = && (2)\\
&= \int\limits_0^n v^s \int\limits_s^t f_x(t)\,dt\,ds + \bar{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_x = \\
&= \int\limits_0^n v^s({}_sp_x - {}_np_x)\,ds + \bar{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_x = \\
&= \int\limits_0^s v^s\,{}_sp_x\,ds && (2)\\
\ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= \mathbb{E}[\ddot{a}_{\overline{\min(K_x+1,\,n)|}}] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\,{}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_x = && (2)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} v^i\,{}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_x = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i \sum_{k=i}^{n-1}\,{}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_x = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i({}_ip_x - {}_np_x) + \ddot{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_x = && (2)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} v^i\,{}_ip_x. && (1)
\end{aligned}$$

(15)