Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

# ISPIT

## MODELI DOŽIVLJENJA

12. 5. 2003.

---

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 100
Broj zadataka: 6
Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.
Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica ili vlastitih formula, i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

---

**1.** Stopa smrtnosti osobe iz određene populacije u dobi 75 je $q_{75} = 0.06229$.

($a$) Izračunajte ${}_{0.25}p_{75}$ i ${}_{0.25}p_{75.75}$ uz pretpostavku uniformne razdiobe smrti između cjelobrojnih dobi. (8 bodova)

($b$) Izračunajte iste vjerojatnosti kao u ($a$), ali uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti između cjelobrojnih dobi. (7 bodova)

(ukupno 15 bodova)

**2.** Navedeni Coxov model proporcionalnog hazarda prilagođen je podacima dobivenim opažanjem određene skupine osiguranika životnih osiguranja:

$$\lambda_i(t) = \lambda_0(t) \exp\{0.01(x_i - 30) + 0.2y_i - 0.05z_i\},$$

gdje su:

| | |
|---|---|
| $\lambda_i(t)$ | hazard za $i$-tu osobu u trenutku $t$ |
| $\lambda_0(t)$ | osnovni hazard u trenutku $t$ |
| $x_i$ | pristupna dob osobe $i$ |
| $y_i$ | je 1 ako je osoba $i$ pušač, inače je 0 |
| $z_i$ | je 1 ako je osoba $i$ žena, a 0 ako je muškarac. |

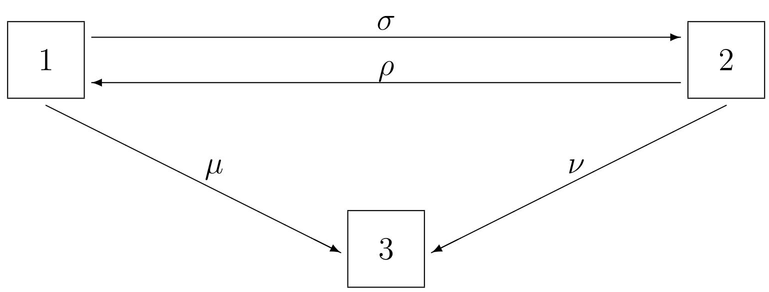
($a$) Opišite klasu osiguranika na koje se osnovni hazard odnosi. (3 boda)

($b$) Što možete (na osnovi pretpostavljenog modela) zaključiti o odnosu funkcija doživljenja pušača (muškarca) pristupne dobi 30 i pušačice pristupne dobi 40? (9 bodova)

($c$) Što možete (na osnovi pretpostavljenog modela) zaključiti o odnosu funkcija doživljenja pušačice pristupne dobi 30 i nepušača (muškarca) pristupne dobi 40? (8 bodova)

(ukupno 20 bodova)

**3.** Za vrednovanje svojih polica zdravstvenog osiguranja osiguravajuće društvo koristi Markovljev model s tri stanja (1 = "zdrav", 2 = "bolestan", 3 = "mrtav") kao na slici. Pretpostavlja se da su intenziteti prijelaza $\sigma$, $\rho$, $\mu$, $\nu$ konstantni.




Promatranje grupe osiguranika tijekom jednogodišnjeg razdoblja dalo je sljedeće rezultate. Opaženo je:

- 10 prijelaza iz stanja 1 u stanje 2
- 7 prijelaza iz stanja 2 u stanje 1
- 2 umrla iz stanja 1
- 3 umrla iz stanja 2.

Ukupno vrijeme provedeno u stanju 1 je 512 godina, a u stanju 2, 20 godina.

($a$) Napišite funkciju vjerodostojnosti za opažene podatke. (3 boda)

($b$) Izračunajte procjenu $\hat{\sigma}$ od $\sigma$ metodom maksimalne vjerodostojnosti. (3 boda)

($c$) Procijenite standardnu pogrešku procjenitelja maksimalne vjerodostojnosti $\tilde{\sigma}$ od $\sigma$. (5 bodova)

($d$) Postavite diferencijalne jednadžbe i pripadajuće početne uvjete za vjerojatnosti ${}_tp_x^{22}$ i ${}_tp_x^{\overline{22}}$. (4 boda)

(ukupno 15 bodova)

**4.** U nekom određenom istraživanju smrtnosti opaža se broj umrlih $d_x$ u dobi $x$ koja je definirana na sljedeći način:

$x =$ [ dob na zadnji rođendan na dan 6. travnja koji je neposredno prije datuma izdavanja police ] + [ broj "5. travnja" koji su prošli nakon datuma izdavanja police ].

($a$) Odredite interval stope na koji se odnosi statistika $d_x$. (3 boda)

($b$) Izrecite princip korespondencije (suglasnosti).
Pomoću tog principa opišite centralnu izloženost riziku $E_x^c$ koja odgovara statistici $d_x$. (3 boda)

($c$) Procjena intenziteta smrtnosti

$$\hat{\mu} = \frac{d_x}{E_x^c}$$

procjenjuje parametar $\mu_{x+f}$. Koliki je $f$? Navedite sve pretpostavke koje ste koristili. (4 boda)

(ukupno 10 bodova)

**5.** Osiguravajuće društvo istražuje nedavno iskustvo o smrtnosti svojih muških osiguranika rentnog osiguranja. Izvod iz prikupljenih podataka se nalazi u tablici:

| dob ($x$) | početna izloženost riziku ($E_x$) | opaženi broj umrlih ($d_x$) |
|---|---|---|
| 70 | 600 | 23 |
| 71 | 750 | 31 |
| 72 | 725 | 33 |
| 73 | 650 | 29 |
| 74 | 700 | 35 |
| 75 | 675 | 39 |

($a$) Pomoću $\chi^2$-testa usporedite da li opaženo iskustvo odgovara iskustvu smrtnosti iz tablice $a(55)$ *Ultimate Mortality Table for Male Annuitants*. Na bazi te tablice su određene premije za rente navedenog osiguravajućeg društva (OD). Navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte. (14 bodova)

($b$) Komentirajte kakve će financijske posljedice biti po OD ako nastavi prodavati rente koje su vrednovane na bazi tablica $a(55)$. (2 boda)

($c$) Navedite koje su razlike u primjeni testa iz ($a$) ako opažene stope smrtnosti uspoređujemo sa izglađenim stopama

$$\mathring{q}_x = a + b q_x^s,$$

pri čemu parametre $a$, $b$ treba procijeniti iz podataka, a $q_x^s$ su standardne stope iz tablice $a(55)$. (4 boda)

(ukupno 20 bodova)

**6.** $K_{70}$ je cjelobrojno buduće tajanje života osobe dobi 70. Neka je $Z$ slučajna varijabla koja predstavlja sadašnju vrijednost osiguranja za slučaj smrti s trajanjem od 20 godina, a koja je izdana muškarcu sadašnje dobi 70. Osigurana svota koja se isplaćuje na kraju godine u kojoj se dogodila smrt (i ako nije isteklo razdoblje trajanja osiguranja) je 10000 kn.

Osnova za izračun:

*Smrtnost:* English Life Table No. 12 Males
*Kamatna stopa:* 5% godišnje.

($a$) Odredite funkciju vjerojatnosti (gustoću) od $Z$ i *skicirajte* njezin graf naznačujući bitne karakteristike razdiobe. (10 bodova)

($b$) Izračunajte

$$\mathbb{P}(Z > 5000).$$

(4 boda)

($c$) Dokažite formulu za varijancu od $Z$:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = 10000^2 \cdot ({}^2A^1_{70:\overline{20|}} - (A^1_{70:\overline{20|}})^2)$$

i definirajte sve oznake koje se koriste u toj formuli. Uz koju kamatnu stopu se računa ${}^2A^1_{70:\overline{20|}}$? (6 bodova)

(ukupno 20 bodova)

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

# ISPIT

## MODELI DOŽIVLJENJA

12. 5. 2003.

## RJEŠENJA ZADATAKA

**1.** $(a)$ Uz pretpostavku uniformne razdiobe smrti između cjelobrojnih dobi:

$$ {}_tq_{75} = \int\limits_{75}^{75+t} c\,ds = ct,\ 0 < t \le 1 \quad \Rightarrow \quad c = q_{75} \ \ (\text{za } t = 1) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \ {}_{0.25}p_{75} = 1 - {}_{0.25}q_{75} = 1 - 0.25 \cdot q_{75} = \qquad (2)$$

$$= 1 - 0.25 \cdot 0.06229 = 0.98443, \qquad (1)$$

$$p_{75} = {}_{0.75}p_{75} \cdot {}_{0.25}p_{75.75} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \ {}_{0.25}p_{75.75} = \frac{1 - q_{75}}{1 - 0.75 \cdot q_{75}} = \qquad (1)$$

$$= \frac{0.93771}{0.95328} = 0.98366. \qquad (1)$$

$(b)$ Uz pretpostavku konstantnosti intenziteta smrtnosti između cjelobrojnih dobi:

$$p_{75} = \exp\{-\int\limits_0^1 \mu_{75+t}\,dt\} = e^{-\mu} = 1 - q_{75} = 0.93771 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \ \mu = -\ln 0.93771 = 0.0643145. \qquad (1)$$

$${}_{0.25}p_{75} = \exp\{-\int\limits_0^{0.25} \mu\,dt\} = e^{-0.25\mu} = 0.98405, \qquad (2)$$

$${}_{0.25}p_{75.75} = \exp\{-\int\limits_0^{0.25} \mu\,dt\} = e^{-0.25\mu} = 0.98405. \qquad (2)$$

(15)

**2.** ($a$) Muškarci nepušači pristupne dobi 30. (3)

*Napomena.* Osnovni hazard se odnosi na više klasa osiguranika ovisno o izboru mogućih vrijednosti $(x_i, y_i, z_i)$ nezavisne varijable tako da bude

$$0.01 \cdot (x_i - 30) + 0.2 \cdot y_i - 0.05 \cdot z_i = 0.$$

Na primjer, gornja klasa je opisana vrijednostima $(30, 0, 0)$. Druga mogućnost je: $(35, 0, 1)$ što odgovara klasi žena nepušačica pristupne dobi 35. Bilo koji od navedenih mogućih odgovora donosi 3 boda.

($b$) Označimo sa $\lambda_i(t)$ hazard osobe $i$ ($i = 1$ ili 2) koja pripada klasi opisanoj sa varijablom $(x_i, y_i, z_i)$, a sa $S_i(t)$ njenu funkciju doživljenja,

$$S_i(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda_i(s)\, ds\}. \tag{1}$$

Osoba 1 (pušač pristupne dobi 30) je opisana vrijednostima $(30, 1, 0)$ nezavisne varijable, a osoba 2 (pušačica pristupne dobi 40) je opisana sa $(40, 1, 1)$. Slijedi:

$$\lambda_1(t) = \lambda_0(t) e^{0.2} \quad (2)$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_0(t) e^{0.1+0.2-0.05} = \lambda_0(t) e^{0.25} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1(t)/\lambda_2(t) = e^{-0.05} = 0.9512 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad S_1(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda_1(s)\, ds\} = \exp\{-0.9512 \int_0^t \lambda_2(s)\, ds\} = S_2(t)^{0.9512} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad S_1(t) > S_2(t) \ \text{ za sve } t. \quad (1)$$

($c$) Uz oznake kao u ($b$), ovdje je osoba 1 (pušačica pristupne dobi 30) opisana vrijednostima $(30, 1, 1)$ nezavisne varijable, a osoba 2 (nepušač pristupne dobi 40) opisan je sa $(40, 0, 0)$. Slijedi:

$$\lambda_1(t) = \lambda_0(t) e^{0.15} \quad (2)$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_0(t) e^{0.1} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1(t)/\lambda_2(t) = e^{0.05} = 1.0513 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad S_1(t) = \exp\{-1.0513 \int_0^t \lambda_2(s)\, ds\} = S_2(t)^{1.0513} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad S_1(t) < S_2(t) \ \text{ za sve } t. \quad (1)$$

(20)

**3.** $(a)$ $L(\sigma,\rho,\mu,\nu) = e^{-512(\sigma+\mu)} \cdot e^{-20(\rho+\nu)}\sigma^{10}\rho^7\mu^2\nu^3$ (3)

$(b)$ MLE je rješenje stacionarne jednadžbe (za $\ell = \ln L$):

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -512 + \frac{10}{\sigma} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\sigma} = \frac{10}{512} = 0.0195. \qquad (3)$$

$(c)$ Asimptotska razdioba od MLE:

$$\tilde{\sigma}-\sigma \approx N(0,(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2})^{-1}) = N(0,\frac{\sigma^2}{10}) \quad \text{ili} \quad \tilde{\sigma}-\sigma \approx N(0,\frac{\sigma}{\mathbb{E}[V]}). \qquad (2)$$

Budući da je standardna pogreška od $\tilde{\sigma}$ jednaka njenoj standardnoj devijaciji, asimptotski je:

$$\text{s.e.}(\tilde{\sigma}) = \tfrac{\sigma}{\sqrt{10}} \quad \text{ili} \quad \text{s.e.}(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\tfrac{\sigma}{\mathbb{E}[V]}} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\text{s.e.}}(\tilde{\sigma}) = \tfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}(\text{ili } = \sqrt{\tfrac{\hat{\sigma}}{512}}) = 0.00618. \qquad (2)$$

$(d)$ Diferencijalne jednadžbe za ${}_tp_x^{22}$ i $t p_x^{\overline{22}}$ s pripadnim početnim uvjetima:

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{22} = \sigma \cdot {}_tp_x^{21} - (\rho+\nu){}_tp_x^{22}, \quad {}_0p_x^{22} = 1 \qquad (2)$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{\overline{22}} = -(\rho+\nu){}_tp_x^{\overline{22}}, \qquad {}_0p_x^{\overline{22}} = 1. \qquad (2)$$

(15)

**4.** (*a*) $x =$ dob na zadnji rođendan na dan 6. travnja (neposredno prije smrti). Interval stope je kalendarska godina koja počinje 6. travnja i završava sa 5. travnjem. (3)

(*b*) *Princip suglasnosti:* Osoba živa u trenutku $t$ će biti pod rizikom u dobi $x$ (tj. bit će uključena u $E_x^c$) ako i samo ako bi se njena smrt u trenutku $t$ uračunala u $d_x$. (1)
U skladu s time,
$E_x^c =$ ukupan broj godina u kojima su opažane osobe izložena riziku smrti u dobi $x$ na zadnji rođendan 6. travnja (koji neposredno prethodi eventualnoj smrti). (2)
*Ili:*
$E_x^c = \int\limits_0^T P_x(t)\,dt$, gdje je $P_x(t)$ jednak broju opažanih osoba dobi $x$ na zadnji rođendan na dan 6. travnja koji je neposredno prije trenutka $t$, $t \in (0, T)$, a $(0, T)$ je razdoblje opažanja.

(*c*) Na početku intervala stope, tj. 6. travnja kalendarske godine, opažana osoba dobi $x$ u skladu s definicijom iz zadatka točne je dobi od $x$ do $x + 1$. (1)
Uz pretpostavku uniformne distribuiranosti rođendana duž kalendarske godine, (1)
srednja dob na 6. travnja je $x + \frac{1}{2}$, (1)
a budući da $\hat{\mu}$ procjenjuje intenzitet smrtnosti na sredini dobnog intervala, dakle $\mu_{x+1}$, imamo da je $f = 1$. (1)

**5.** ($a$) Nulhipoteza ($H_0$) je: $q_x = q_x^s$ za sve $x = 70, \ldots, 75$. (2)
Uz $H_0$, broj umrlih $D_x \sim N(E_x q_x^s, E_x q_x^s(1 - q_x^s))$, (1)
pa se standardizirane devijacije $z_x$ računaju po formuli:

$$z_x = \frac{d_x - E_x q_x^s}{\sqrt{E_x q_x^s(1 - q_x^s)}}. \qquad (1)$$

Testna statistika: $H = \sum_{x=70}^{75} z_x^2 \sim \chi^2(6)$. (2)
Račun: (1+1+1)

| $x$ | $E_x$ | $d_x$ | $q_x^s$ | $z_x$ | $z_x^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 600 | 23 | 0.03776 | 0.073676 | 0.00543 |
| 71 | 750 | 31 | 0.04170 | -0.050232 | 0.00252 |
| 72 | 725 | 33 | 0.04602 | -0.064608 | 0.00417 |
| 73 | 650 | 29 | 0.05075 | -0.712583 | 0.50778 |
| 74 | 700 | 35 | 0.05595 | -0.684965 | 0.46918 |
| 75 | 675 | 39 | 0.06164 | -0.417228 | 0.17408 |
| | | | | | 1.16316 |

Opažena vrijednost $h = 1.16316$ je manja od $\chi^2_{0.05}(6) = 12.59$ pa ne odbacujemo $H_0$. (3)
S druge strane, sve devijacije su negativne osim prve što upućuje da je opažena smrtnost manja od smrtnosti pretpostavljene tablicom $a(55)$. To $\chi^2$-test nije indicirao. (2)

($b$) Ako je prava smrtnost manja od smrtnosti opisane tablicom $a(55)$, OD će trpiti veće štete po policama rentnog osiguranja od očekivanih. (2)

($c$) Nulhipoteza se od $H_0$ u ($a$) razlikuje po tome što umjesto $q_x^s$ svugdje treba s desne strane jednakosti biti $\mathring{q}_x$, a $z_x$ se, isto tako, računa po istoj formuli kao u ($a$), samo što se svugdje $q_x^s$ zamijeni sa $\mathring{q}_x$. Testna statistika $H$ je ista (formulom), ali njena asimptotska $\chi^2$-razdioba ima barem dva stupnja slobode manje od testne statistike u ($a$). To je zato jer treba procijeniti dva nepoznata parametra $a$ i $b$ iz podataka. (4)

(20)

**6.** (a) $Z = S \cdot v^{K_{70}+1} \cdot 1_{\{K_{70} \leq 19\}}$, $v = 1/1.05 = 0.952$, $S = 10000$. (2)
$\mathrm{Im} Z = \{0, Sv, Sv^2, \ldots, Sv^{20}\}$. (1)

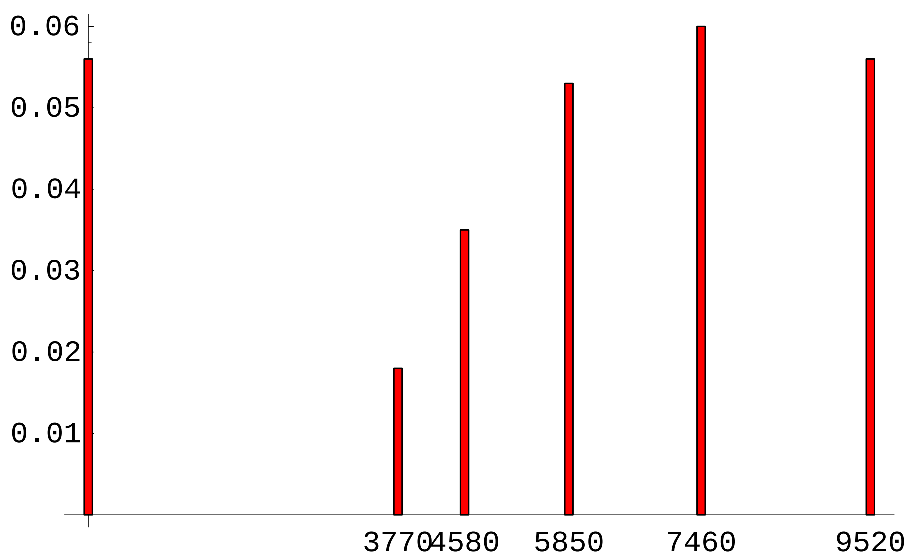
Funkcija vjerojatnosti (gustoća) od $Z$:

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(K_{70} \geq 20) = {}_{20}p_{70} = \frac{\ell_{90}}{\ell_{70}} = 0.056 \qquad (2)$$
$$\mathbb{P}(Z = Sv^{k+1}) = {}_kp_{70} \cdot q_{70+k} = \frac{d_{70+k}}{\ell_{70}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 19. \qquad (2)$$

Račun za skicu grafa gustoće od $Z$:

| $k$ | $\geq 20$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | 9520 | 7460 | 55 | 4580 | 3770 | (1) |
| $p_Z(z)$ | 0.056 | 0.056 | 0.060 | 0.053 | 0.035 | 0.018 | (1) |

Skica grafa: (1)




(b) Račun:

$$\mathbb{P}(Z > 5000) = \mathbb{P}(v^{K_{70}} > 0.5) = \qquad (1)$$
$$= \mathbb{P}(K_{70} \leq \tfrac{\ln 2}{\ln 1.05} - 1) = \mathbb{P}(K_{70} \leq 13) = \qquad (1)$$
$$= 1 - \frac{\ell_{84}}{\ell_{70}} = 1 - \frac{12306}{54806} = 0.775. \qquad (2)$$

(c) $A^1_{70:\overline{20}|} := \mathbb{E}[v^{K_{70}+1} \cdot 1_{\{K_{70} \leq 19\}}]$, ${}^2A^1_{70:\overline{20}|} := \mathbb{E}[v^{2(K_{70}+1)} \cdot 1_{\{K_{70} \leq 19\}}]$, (1+1)
pri čemu je ${}^2A^1_{70:\overline{20}|}$ očekivana sadašnja vrijednost osiguranja za slučaj smrti s trajanjem od 20 godina i jediničnom osiguranom svotom, koja se računa uz kamatnu stopu $(1 + i)^2 - 1 = 1.05^2 - 1 = 10.25\%$. (2)
$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = S^2 \cdot ({}^2A^1_{70:\overline{20}|} - (A^1_{70:\overline{20}|})^2)$. (2)

(20)