Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski specijalistički sveučilišni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

4. 12. 2006.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 100
Broj zadataka: 6
Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.
Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica ili vlastitih formula, i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

---

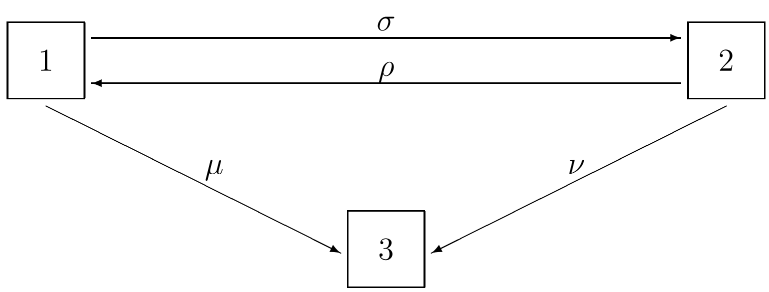
1. Za zadano $p_x = 0.9$ izračunajte ${}_{0.5}p_x$ i ${}_{0.5}p_{x+0.5}$ koristeći sljedeće pretpostavke o smrtnosti između dobi x i $x+1$:

(a) pretpostavka uniformne razdiobe smrti; (7 bodova)

(b) Balduccijevu pretpostavku. (8 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. Za vrednovanje svojih polica zdravstvenog osiguranja osiguravajuće društvo koristi Markovljev model s tri stanja (1 = "zdrav", 2 = "bolestan", 3 = "mrtav") kao na slici. Pretpostavlja se da su intenziteti prijelaza σ, ρ, μ, ν konstantni.



Promatranje grupe osiguranika tijekom jednogodišnjeg razdoblja dalo je sljedeće rezultate. Opaženo je:

- 10 prijelaza iz stanja 1 u stanje 2
- 7 prijelaza iz stanja 2 u stanje 1
- 2 umrla iz stanja 1
- 3 umrla iz stanja 2.

Ukupno vrijeme provedeno u stanju 1 je 512 godina, a u stanju 2, 20 godina.

(a) Napišite funkciju vjerodostojnosti za opažene podatke. (3 boda)

(b) Izračunajte procjenu $\hat{\sigma}$ od σ metodom maksimalne vjerodostojnosti. (3 boda)

(c) Procijenite standardnu pogrešku procjenitelja maksimalne vjerodostojnosti $\tilde{\sigma}$ od σ. (5 bodova)

(d) Postavite diferencijalne jednadžbe i pripadajuće početne uvjete za vjerojatnosti ${}_tp_x^{22}$ i ${}_tp_x^{\overline{22}}$. (4 boda)

(ukupno 15 bodova)

3. U tablici se nalaze podaci dobiveni iz malog uzorka zaposlenika jedne tvornice koji predstavljaju vremena u mjesecima do prvog izostajanja s posla. Sufiksom "+" označena su vremena napuštanja posla koja se ne smatraju izostancima (npr. prekid radnog odnosa i sl.).

muškarci:	6+	11	13+	15	16+	19+	20	
žene:	2+	4	7	8+	10+	12+	17	21+

Za stopu hazarda vremena do prvog izostanka s posla koristi se Coxov model:

$$\lambda(t|x) = \lambda_0(t)e^{\beta x},$$

gdje je $x = 0$ za muškarce, a $x = 1$ za žene.

(a) Na koju skupinu zaposlenika se odnosi bazna stopa hazarda? (1 bod)

(b) Odredite parcijalnu vjerodostojnost parametra β na osnovi opaženih podataka i procijenite taj parametar metodom maksimalne (parcijalne) vjerodostojnosti. (7 bodova)

(c) Procijenite aproksimativni 95% pouzdan interval za β. (5 bodova)

(d) Imaju li žene značajno veću stopu izostanaka s posla od muškaraca? Sprovedite test. (7 bodova)

(ukupno 20 bodova)

4. Sprovodi se istraživanje smrtnosti koje obuhvaća $N + 1$ godinu. Za svaku od osoba koja je umrla tijekom K-te, $K + 1$-ve,..., $K + N$-te godine raspolaže se samo informacijama o kalendarskoj godini rođenja i kalendarskoj godini smrti. Nadalje, raspolaže se i informacijama o ukupnom broju osoba (živih i pod rizikom) na dane 1. siječnja godina K-te, $K+1$-ve,..., $K+N$-te, $K+N+1$-ve, klasificiranih po dobi x na zadnji rođendan.

(a) Pomoću raspoloživih podataka izvedite aproksimaciju za centralnu izloženost riziku koja odgovara (korespondira) podacima o broju umrlih. (9 bodova)

(b) Podatke o broju umrlih d_x i aproksimaciju za E_x^c koristimo za procjenu stope smrtnosti, konkretno parametra q_{x+f}. Koliko iznosi f? Navedite sve pretpostavke koje ste koristili. (6 bodova)

(ukupno 15 bodova)

5. Izglađivanje podataka o smrtnosti muške populacije jedne regije u UK sprovedena je upotrebom matematičke formule koja ovisi o 3 parametra procijenjenih metodom maksimalne vjerodostojnosti na osnovi binomnog modela. Izvod iz prikupljenih i izglađenih podataka nalazi se u tablici:

dob x	broj umrlih d_x	izglađene stope $\mathring{q}_x$	početna izloženost riziku E_x	$E_x \cdot \mathring{q}_x$
14	3	0.00038	12800	4.86
15	8	0.00043	15300	6.58
16	5	0.00048	12500	6.00
17	14	0.00053	15000	7.95
18	17	0.00059	16500	9.74
19	9	0.00066	10100	6.67
20	15	0.00074	12800	9.47
21	10	0.00083	13700	11.37
22	10	0.00093	11900	11.07
ukupno	91			73.71

(a) Pomoću χ^2-testa testirajte prilagođenost izglađenih stopa podacima: navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte (uz razinu značajnosti od 5%). (10 bodova)

(b) Sprovedite test predznaka: navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte (uz razinu značajnosti od 5%) i navedite koje se loše karakteristike prilagodbe detektiraju tim testom u odnosu na test iz (a) dijela zadatka. (10 bodova)

(ukupno 20 bodova)

6. K_{70} je cjelobrojno buduće tajanje života osobe dobi 70. Neka je Z slučajna varijabla koja predstavlja sadašnju vrijednost osiguranja za slučaj smrti s trajanjem od 20 godina, a koja je izdana muškarcu sadašnje dobi 70. Osigurana svota koja se isplaćuje na kraju godine u kojoj se dogodila smrt (i ako nije isteklo razdoblje trajanja osiguranja) je 10000 kn.
Osnova za izračun: smrtnost: English Life Table No. 12 Males, kamatna stopa: 5% godišnje.

(a) Odredite funkciju vjerojatnosti (gustoću) od Z pomoću tabličnih veličina. (5 bodova)

(b) Izračunajte $\mathbb{P}(Z > 5000)$. (4 boda)

(c) Dokažite da je $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = 10000^2 \cdot ({}^2A^1_{70:\overline{20}|} - (A^1_{70:\overline{20}|})^2)$ i definirajte sve oznake koje se koriste u toj formuli. Uz koju kamatnu stopu se računa ${}^2A^1_{70:\overline{20}|}$? (6 bodova)

(ukupno 15 bodova)

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski specijalistički sveučilišni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

4. 12. 2006.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (*a*) Uz pretpostavku uniformne razdiobe smrti između cjelobrojnih dobi:

$$ {}_tq_x = t \cdot q_x \qquad (2)$$

$$\Rightarrow {}_{0.5}p_x = 1 - {}_{0.5}q_x = 1 - 0.5 \cdot q_x = \qquad (1)$$

$$= 1 - 0.5 \cdot (1 - 0.9) = 0.95, \qquad (1)$$

$$p_x = {}_{0.5}p_{x+0.5} \cdot {}_{0.5}p_x \qquad (1)$$

$$\Rightarrow {}_{0.5}p_{x+0.5} = \frac{p_x}{{}_{0.5}p_x} = \qquad (1)$$

$$= \frac{0.9}{0.95} = 0.9474. \qquad (1)$$

(*b*) Uz Balduccijevu pretpostavku:

$$ {}_{1-t}q_{x+t} = (1 - t) \cdot q_x \qquad (3)$$

$$\Rightarrow {}_{0.5}p_{x+0.5} = 1 - {}_{0.5}q_{x+0.5} = 1 - 0.5 \cdot q_x = \qquad (1)$$

$$= 1 - 0.5 \cdot (1 - 0.9) = 0.95, \qquad (1)$$

$$p_x = {}_{0.5}p_{x+0.5} \cdot {}_{0.5}p_x \qquad (1)$$

$$\Rightarrow {}_{0.5}p_x = \frac{p_x}{{}_{0.5}p_{x+0.5}} = \qquad (1)$$

$$= \frac{0.9}{0.95} = 0.9474. \qquad (1)$$

(15)

2. (a) $L(\sigma,\rho,\mu,\nu) = e^{-512(\sigma+\mu)} \cdot e^{-20(\rho+\nu)}\sigma^{10}\rho^7\mu^2\nu^3$ (3)

(b) MLE je rješenje stacionarne jednadžbe (za $\ell = \ln L$):

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -512 + \frac{10}{\sigma} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\sigma} = \frac{10}{512} = 0.0195. \qquad (3)$$

(c) Asimptotska razdioba od MLE:

$$\tilde{\sigma}-\sigma \stackrel{\sim}{\approx} N(0,(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \sigma^2})^{-1}) = N(0,\frac{\sigma^2}{10}) \quad \text{ili} \quad \tilde{\sigma}-\sigma \stackrel{\sim}{\approx} N(0,\frac{\sigma}{\mathbb{E}[V]}). \qquad (2)$$

Budući da je standardna pogreška od $\tilde{\sigma}$ jednaka njenoj standardnoj devijaciji, asimptotski je:

$$\text{s.e.}(\tilde{\sigma}) = \tfrac{\sigma}{\sqrt{10}} \quad \text{ili} \quad \text{s.e.}(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\tfrac{\sigma}{\mathbb{E}[V]}} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\text{s.e.}}(\tilde{\sigma}) = \tfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}(\text{ili } = \sqrt{\tfrac{\hat{\sigma}}{512}}) = 0.00618. \qquad (2)$$

(d) Diferencijalne jednadžbe za ${}_tp_x^{22}$ i $t p_x^{\overline{22}}$ s pripadnim početnim uvjetima:

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{22} = \sigma \cdot {}_tp_x^{21} - (\rho+\nu){}_tp_x^{22}, \quad {}_0p_x^{22} = 1 \qquad (2)$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{\overline{22}} = -(\rho+\nu){}_tp_x^{\overline{22}}, \qquad {}_0p_x^{\overline{22}} = 1. \qquad (2)$$

(15)

3. (*a*) Bazni hazard se odnosi na muškarce. (1)

(*b*) Neka su t_i vremena izostanaka, a $R(t_j)$ neka je broj osoba koje još nisu izostale s posla i pod rizikom. Tada je parcijalna vjerodostojnost: (2)

$$L(\beta) = \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{\beta x_j}}{\sum\limits_{i \in R(t_j)} e^{\beta x_i}}.$$

$t_j :$ 4(ž) 7(ž) 11(m) 15(m) 17(ž) 20(m) (1)

$$L(\beta) = \tfrac{e^{\beta\cdot 1}}{7e^\beta+7} \cdot \tfrac{e^{\beta\cdot 1}}{6e^\beta+6} \cdot \tfrac{e^{\beta\cdot 0}}{3e^\beta+6} \cdot \tfrac{e^{\beta\cdot 0}}{2e^\beta+4} \cdot \tfrac{e^{\beta\cdot 1}}{2e^\beta+2} \cdot \tfrac{e^{\beta\cdot 0}}{e^\beta+1}$$

$$L(\beta) = \frac{e^{3\beta}}{504 \cdot (e^\beta+1)^4 \cdot (e^\beta+2)^2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \ell(\beta) = \ln L(\beta) = 3\beta - 4\ln(e^\beta+1) - 2\ln(e^\beta+2) - \ln 504$$

$$\ell'(\beta) = -3 + \tfrac{4}{e^\beta+1} + \tfrac{4}{e^\beta+2} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3e^{2\beta} + e^\beta - 6 = 0 \Leftrightarrow e^\beta = \tfrac{\sqrt{73}-1}{6} \Rightarrow \hat\beta = 0.2290. \quad (2)$$

(*c*) Iz (*a*) slijedi

$$\ell''(\beta) = -\tfrac{4e^\beta}{(1+e^\beta)^2} - \tfrac{4e^\beta}{(2+e^\beta)^2} \;\Rightarrow\; \ell''(\hat\beta) = -1.46101. \quad (2)$$

Budući da je $(\hat\beta - \beta)\sqrt{-\ell''(\hat\beta)} \stackrel{\sim}{\approx} N(0,1)$, (1)

$\Rightarrow$ 95% p.i. je $\hat\beta \pm 2 \cdot 0.8273 = 0.2290 \pm 1.6546.$ (2)

(*d*) Testiraju se hipoteze:
H_0: $\beta = 0$
$H_1 : \beta > 0$ (1)
Testna statistika: $Z = (\hat\beta - 0)\sqrt{-\ell''(0)} \overset{H_0}{\stackrel{\sim}{\approx}} N(0,1)$ (2)
Opažena vrijednost: $z = \frac{0.2290}{0.8321} = 0.2752$ (1)
P-vrijednost: $\mathbb{P}(Z > 0.2752 | H_0) = 1 - \Phi(0.2752) = 0.39$ (2)
Ne odbacujemo H_0 u korist alternative H_1, tj. žene nemaju značajno veću stopu izostanaka s posla od muškaraca. (1)

(20)

4. (a) Budući da se bilježe samo kalendarske godine rođenja i smrti, interval stope je kalendarska godina. (2)

U skladu sa zadanim podacima, osoba koja premine u kalendarskoj godini t, a rođena je u kalendarskoj godini $t-x$, bit će klasificirana kao da je dobi x u godini smrti, odnosno, preciznije, dobi x na sljedeći rođendan u trenutku zadnjeg 1. siječnja. Neka je $t_i = 1$. siječnja $(K+i)$-te godine, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Zadani su podaci: P_{x,t_i} = broj osoba dobi x na zadnji rođendan u trenutku t_i, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Želimo uskladiti takve cenzusne podatke podatcima o broju umrlih u skladu s principom korespondencije (suglasnosti). (2)

Neka je P'_{x,t_i} = broj osoba dobi x na sljedeći rođendan u trenutku t_i, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Osoba uračunata u D_x je u trenutku t_i (početak kalendarske godine smrti) točne dobi između $x-1$ i x, i uračunata je u P_{x-1,t_i}, a na kraju iste kalendarske godine, ukoliko ne bi preminula, bila bi točne dobi između x i $x+1$ i uračunata u $P_{x,t_{i+1}}$. Pretpostavimo li da je $P_{x,t}$ linearna funkcija duž kalendarske godine, dobijemo sljedeću aproksimaciju:

$$P'_{x,t_i} \approx \frac{1}{2}(P_{x-1,t_i} + P_{x,t_{i+1}}). \qquad (3)$$

Koristeći Eulerovu aproksimaciju integrala (a ne trapeznu jer za nju nemamo dovoljno podataka ili bi trebali dodatne pretpostavke), dobijamo:

$$E_x^c \approx \sum_{i=0}^{N} P'_{x,t_i} \approx \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2}(P_{x-1,t_i} + P_{x,t_{i+1}}). \qquad (2)$$

(b) Na početku intervala stope, osobe su točne dobi od $x-1$ do x. Pretpostavimo li da su rođendani uniformno distribuirani duž kalendarske godine, (2)

srednja dob na početku intervala stope je $x - \frac{1}{2}$ (2)

pa $\hat{q}$ procjenjuje $q_{x-\frac{1}{2}}$, dakle $f = -\frac{1}{2}$. (2)

(15)

5. Tablica:

x	d_x	$\mathring{q}_x$	E_x	$E_x \cdot \mathring{q}_x$	z_x	z_x^2
14	3	0.00038	12800	4.86	-0.84	0.7056
15	8	0.00043	15300	6.58	0.55	0.3025
16	5	0.00048	12500	6.00	-0.41	0.1681
17	14	0.00053	15000	7.95	2.15	4.6225
18	17	0.00059	16500	9.74	2.33	5.4289
19	9	0.00066	10100	6.67	0.90	0.8100
20	15	0.00074	12800	9.47	1.80	3.2400
21	10	0.00083	13700	11.37	-0.41	0.1681
22	10	0.00093	11900	11.07	-0.32	0.1024
ukupno	91			73.71		15.5481

(a) H_0: $q_x = \mathring{q}_x$ za sve $x = 14, 15, \ldots, 22$
H_1: $q_x \neq \mathring{q}_x$ za neki $x = 14, 15, \ldots, 22$ (1)
Testna statistika: $H = \sum_{x=14}^{22} Z_x^2 \overset{H_0}{\sim} \chi^2(9-3) = \chi^2(6)$ (2)
gdje je $Z_x = \frac{D_x - E_x \mathring{q}_x}{\sqrt{E_x \mathring{q}_x (1-\mathring{q}_x)}}$. (2)
Opažena vrijednost: $h = 15.55$ (2)
P-vrijednost: $\mathbb{P}(H > 15.55 | H_0) = 0.016$ (2)
Odbacujemo H_0 (uz 5% rizika). (1)

(b) Hipoteze koje se testiraju su iste kao u (a). (1)
Testna staistika: $P =$ broj pozitivnih devijacija $\overset{H_0}{\sim} b(9, \frac{1}{2})$ (2)
Opažena vrijednost: $p = 5$ (1)
P-vrijednost: $2 \sum_{j=1}^{\min\{p, 9-p\}} \binom{9}{j} \frac{1}{2^9} = 2 \sum_{j=1}^{4} \binom{9}{j} \frac{1}{2^9} = 0.51$ (3)
Ne odbacujemo H_0. (1)
Testom predznaka detektiramo pristranost izglađivanja. (2)
(20)

6. (a) $Z = S \cdot v^{K_{70}+1} \cdot 1_{\{K_{70} \leq 19\}}$, $v = 1/1.05 = 0.952$, $S = 10000$. (2)
$\mathrm{Im} Z = \{0, Sv, Sv^2, \ldots, Sv^{20}\}$. (1)

Funkcija vjerojatnosti (gustoća) od Z:

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(K_{70} \geq 20) = {}_{20}p_{70} = \tfrac{\ell_{90}}{\ell_{70}} = 0.056 \quad (1)$$
$$\mathbb{P}(Z = Sv^{k+1}) = {}_{k}p_{70} \cdot q_{70+k} = \tfrac{d_{70+k}}{\ell_{70}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 19. \quad (1)$$

(b) Račun:

$$\mathbb{P}(Z > 5000) = \mathbb{P}(v^{K_{70}} > 0.5) = \quad (1)$$
$$= \mathbb{P}(K_{70} \leq \tfrac{\ln 2}{\ln 1.05} - 1) = \mathbb{P}(K_{70} \leq 13) = \quad (1)$$
$$= 1 - \tfrac{\ell_{84}}{\ell_{70}} = 1 - \tfrac{12306}{54806} = 0.775. \quad (2)$$

(c) $A^1_{70:\overline{20}|} := \mathbb{E}[v^{K_{70}+1} \cdot 1_{\{K_{70} \leq 19\}}]$, ${}^2A^1_{70:\overline{20}|} := \mathbb{E}[v^{2(K_{70}+1)} \cdot 1_{\{K_{70} \leq 19\}}]$, (1+1)
pri čemu je ${}^2A^1_{70:\overline{20}|}$ očekivana sadašnja vrijednost osiguranja za slučaj smrti s trajanjem od 20 godina i jediničnom osiguranom svotom, koja se računa uz kamatnu stopu $(1 + i)^2 - 1 = 1.05^2 - 1 = 10.25\%$. (2)
$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = S^2 \cdot ({}^2A^1_{70:\overline{20}|} - (A^1_{70:\overline{20}|})^2)$. (2)

(15)