Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski specijalistički sveučilišni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

4. 9. 2006.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 100
Broj zadataka: 6
Naznačeno je koliko bodova donosi svaki točan odgovor.
Odgovore i rješenja zadataka pišite na dobivenim papirima. Na svakom korištenom papiru naznačite na koji se zadatak odnosi i čitko se potpišite.
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, statističkih tablica ili vlastitih formula, i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations* (Institute of Actuaries).

---

1. Pomoću *English Life Table No. 12* izračunajte uvjetnu vjerojatnost smrti muške osobe prije navršene točne dobi 56, a koja je doživjela točnu dob od 55 godina i 6 mjeseci koristeći sljedeće pretpostavke o smrtnosti između dobi 55 i 56:

(a) Balduccijevu pretpostavku; (6 bodova)

(b) intenzitet smrtnosti se ravna po Gompertzovom zakonu. (9 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. Za vrijeme dvogodišnjeg istraživanja novog medicinskog tretmana, opažana je grupa od 50 pacijenata nakon što su podvrgnuti tom tretmanu 1. srpnja 2000. g. Za pacijente koji su umrli ili iz raznih drugih razloga napustili istraživanje (opažanje) prije 30. lipnja 2002. g. zabilježeno je vrijeme koliko su dugo bili pod opažanjem. Podaci o provedenom vremenu pod opažanjem (u mjesecima) nalaze se u tablici:

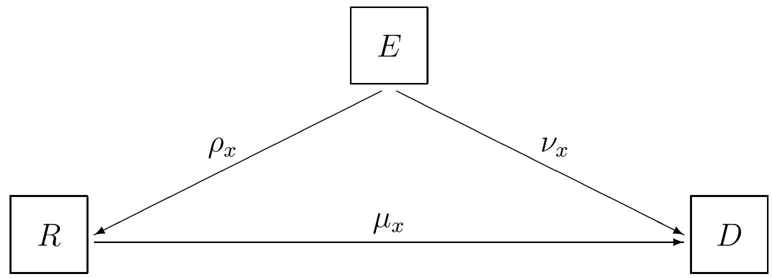
umrli	*napustili istraživanje*
4	2
6	5
6	7
8	9
11	10
16	13
22	15
	18

(a) Pomoću Kaplan - Meierovog procjenitelja procijenite funkciju doživljenja $S(t)$, $t \geq 0$. (8 bodova)

(b) Za svaki $t \geq 0$ procijenite 95% pouzdan interval za $S(t)$. (7 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Za svoju mirovinsku shemu veliko poduzeće koristi Markovljev model s tri stanja (E = "zaposlen", R = "umirovljen", D = "mrtav") kao na slici.



(a) Definirajte ${}_tp_x^{RD}$. (3 boda)

(b) Napišite odgovarajući sustav diferencijalnih jednadžbi za ${}_tp_x^{EE}$, ${}_tp_x^{ER}$, ${}_tp_x^{ED}$, ${}_tp_x^{RR}$ i ${}_tp_x^{RD}$. (7 bodova)

Pretpostavimo da opažamo veliki broj N zaposlenika dobi x. i-ta osoba se opaža od dobi $x + a_i$ do dobi $x + b_i$, gdje su $0 \leq a_i < b_i \leq 1$. Među njima opaženo je K umirovljenih i M umrlih.

(c) Uz pretpostavku da su intenziteti prijelaza konstantni između dobi x i $x + 1$, napišite njihovu vjerodostojnost na osnovi opaženih podataka o zaposlenicima. (5 bodova)

(d) Nađite procjenitelj maksimalne vjerodostojnosti za ρ_x. (5 bodova)

(ukupno 20 bodova)

4. Sprovodi se istraživanje smrtnosti koje obuhvaća $N + 1$ godinu. Za svaku od osoba koja je umrla tijekom K-te, $K + 1$-ve,..., $K + N$-te godine raspolaže se samo informacijama o kalendarskoj godini rođenja i kalendarskoj godini smrti. Nadalje, raspolaže se i informacijama o ukupnom broju osoba (živih i pod rizikom) na dane 1. siječnja godina K-te, $K+1$-ve,..., $K+N$-te, $K+N+1$-ve, klasificiranih po dobi x na zadnji rođendan.

(a) Pomoću raspoloživih podataka izvedite aproksimaciju za centralnu izloženost riziku koja odgovara (korespondira) podacima o broju umrlih. (9 bodova)

(b) Podatke o broju umrlih d_x i aproksimaciju za E_x^c koristimo za procjenu stope smrtnosti, konkretno parametra q_{x+f}. Koliko iznosi f? Navedite sve pretpostavke koje ste koristili. (6 bodova)

(ukupno 15 bodova)

5. Sprovedeno je opsežno istraživanje smrtnosti populacije ljudi u radnoj dobi. Pretpostavlja se da je smrtnost te populacije u skladu sa danom standardnom tablicom smrtnosti. U tablici se nalaze opaženi broj umrlih i početna izloženost riziku opažane grupe ljudi svrstanih u devet dobnih razreda. Još su navedeni očekivani broj smrti u skladu sa standardom tablicom i pripadne standardizirane devijacije.

dobni razred x	broj umrlih d_x	početna izloženost riziku E_x	očekivani broj umrlih $E_x \cdot q_x^s$	standardizirana devijacija z_x
20 - 24	35	35000	34	0.17150
25 - 29	30	33000	29	0.18569
30 - 34	31	30000	35	-0.67612
35 - 39	45	30000	52	-0.97072
40 - 44	84	31000	80	0.44721
45 - 49	138	28000	130	0.70165
50 - 54	229	25000	213	1.09630
55 - 59	360	23000	348	0.64327
60 - 64	522	20000	505	0.75649

(*a*) Pomoću χ^2-testa testirajte da li se opažena smrtnost ponaša u skladu sa odabranom standardnom tablicom smrtnosti: navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte (uz razinu značajnosti od 5%). (10 bodova)

(*b*) Sprovedite test predznaka: navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte (uz razinu značajnosti od 5%) i navedite koje se loše karakteristike prilagodbe detektiraju tim testom u odnosu na test iz (*a*) dijela zadatka. (10 bodova)

(ukupno 20 bodova)

6. Neka je X slučajna varijabla koja predstavlja sadašnju vrijednost osiguranja života osobe pristupne dobi 45 i u trajanju od 20 godina, te neka je Y sadašnja vrijednost osiguranja za slučaj doživljenja neke druge osobe iste pristupne dobi i u istom trajanju od 20 godina. Nadalje, neka je Z sadašnja vrijednost mješovitog osiguranja treće osobe iste pristupne dobi i u istom trajanju osiguranja kao u slučaju prethodne dvije osobe. U sva tri slučaja, osigurana svota je jedinična ($S = 1$), kamata je 4% godišnje, a tablice smrtnosti koja se koristi za izračun vrijednosti polica je A1967-70 *Ultimate*. Mogući troškovi se zanemaruju.

(a) Izračunajte varijance od X i Y. (10 bodova)

(b) Bez računanja $\mathbb{V}\mathrm{ar}Z$ objasnite zašto je

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}Z < \mathbb{V}\mathrm{ar}X + \mathbb{V}\mathrm{ar}Y.$$

(5 bodova)

(ukupno 15 bodova)

Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel
Poslijediplomski specijalistički sveučilišni studij aktuarske matematike

ISPIT

MODELI DOŽIVLJENJA

4. 9. 2006.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Treba izračunati ${}_{0.5}q_{55.5}$.

(a) Uz Balduccijevu pretpostavku:

$$
\begin{aligned}
& {}_{t}q_{x+t} = (1-t)\cdot q_x && (1)\\
& q_{55} = (\text{tablice}) = 0.01331 && (2)\\
\Rightarrow\ & {}_{0.5}q_{55.5} = 0.5\cdot q_{55} = 0.5\cdot 0.01331 = 0.00666. && (3)
\end{aligned}
$$

(b) Intenzitet smrtnosti (Gompertz): $\mu_x = B\cdot C^x$ (1)

Tablice: $\mu_{55} = 0.01263$, $\mu_{56} = 0.01420$ (2)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ & 0.01263 = B\cdot C^{55}, 0.01420 = B\cdot C^{56} \\
\Rightarrow\ & C = \tfrac{0.01420}{0.01263} = 1.12431, B = \tfrac{\mu_{55}}{C^{55}} = \tfrac{0.01263}{629.035} = 2.0078\cdot 10^{-5}. && (2)\\
& {}_{t}p_x = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s}\,ds) \\
\Rightarrow\ & {}_{0.5}q_{55.5} = 1 - {}_{0.5}p_{55.5} = 1 - \exp(-\int_0^{0.5} \mu_{55.5+t}\,dt) = && (1)\\
& = 1 - \exp(-B\cdot C^{55.5}\int_0^{0.5} C^t\,dt) = && (1)\\
& = 1 - \exp(-B\cdot C^{55.5}\tfrac{C^{0.5}-1}{\ln C}) = 1 - e^{-0.0068959} = 0.00687. && (2)
\end{aligned}
$$

(15)

2. Tablica s osnovnim statistikama: (5)

t_j	c_j	d_j	n_j	$\hat{\lambda}_j = \frac{d_j}{n_j}$	$1-\hat{\lambda}_j$	$\frac{d_j}{n_j(n_j-d_j)}$	$\sum_{i\le j} \frac{d_i}{n_i(n_i-d_i)}$
0	1	0	50	0	1	0	0
4	1	1	49	0.0204	0.9746	0.0004	0.0004
6	1	2	47	0.0426	0.9574	0.0009	0.0014
8	2	1	44	0.0227	0.9773	0.0005	0.0019
11	2	1	41	0.0244	0.9756	0.0006	0.0025
16	1	1	38	0.0263	0.9737	0.0007	0.0032
22	0	1	36	0.0278	0.9722	0.0008	0.0040

Kaplan-Meierova procjena funkcije doživljenja:

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_j \le t} (1-\hat{\lambda}_j), \quad t \ge 0. \tag{2}$$

Aproksimativni 95%-pouzdan interval za $S(t)$ (koristi se Greenwoodova formula za aproksimaciju varijance od $\hat{S}(t)$):

$$\hat{S}(t) \pm 2 \cdot \hat{S}(t) \cdot \sqrt{\sum_{t_j \le t} \frac{d_j}{n_j(n_j-d_j)}}, \quad t \ge 0. \tag{2}$$

Tablično: (3+3)

$t \in$	$\hat{S}(t)$	$\pm 2\hat{S}(t)\sqrt{\sum_{t_j\le t} \frac{d_j}{n_j(n_j-d_j)}}$	95%-p.i. za $S(t)$
$[0,4\rangle$	1.0000	± 0.0000	$[1,1]$
$[4,6\rangle$	0.9796	± 0.0392	$[0.9404, 1]$
$[6,8\rangle$	0.9379	± 0.0702	$[0.8677, 1]$
$[8,11\rangle$	0.9166	± 0.0799	$[0.8367, 0.9965]$
$[11,16\rangle$	0.8942	± 0.0894	$[0.8048, 0.9836]$
$[16,22\rangle$	0.8707	± 0.0985	$[0.7722, 0.9692]$
$[22,+\infty\rangle$	0.8465	± 0.1071	$[0.7394, 0.9536]$

(15)

3. (a) ${}_tp_x^{RD}$ je vjerojatnost da će osoba dobi x koja je u toj dobi u mirovini, u dobi $x+t$ biti pokojna. (3)

(b) Prema općoj formuli:

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ab} = \textstyle\sum_{c\neq b}({}_tp_x^{ac}\mu_{x+t}^{cb} - {}_tp_x^{ab}\mu_{x+t}^{bc}), \quad a,b = E,R,D, \qquad (2)$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{EE} = -{}_tp_x^{EE}(\rho_{x+t} + \nu_{x+t}), \quad {}_0p_x^{EE} = 1 \qquad (1)$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ER} = {}_tp_x^{EE}\rho_{x+t} - {}_tp_x^{ER}\mu_{x+t}, \quad {}_0p_x^{ER} = 0 \qquad (1)$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{ED} = {}_tp_x^{ER}\mu_{x+t} + {}_tp_x^{EE}\nu_{x+t}, \quad {}_0p_x^{ED} = 0 \qquad (1)$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{RR} = -{}_tp_x^{RR}\mu_{x+t}, \quad {}_0p_x^{RR} = 1 \qquad (1)$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{RD} = {}_tp_x^{RR}\mu_{x+t}, \quad {}_0p_x^{RD} = 0. \qquad (1)$$

(c) $L(\rho,\nu) = \text{const.} \cdot \prod_{i=1}^{N} e^{-(\rho+\nu)(b_i-a_i)} \cdot \rho^K \nu^M$ (5)

(d) MLE je rješenje stacionarne jednadžbe (za $\ell = \ln L$):

$$\frac{\partial \ell}{\partial \rho} = -\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) + \frac{K}{\rho} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\rho}_x = \hat{\rho} = \frac{K}{\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i)}. \qquad (5)$$

(20)

4. (*a*) Budući da se bilježe samo kalendarske godine rođenja i smrti, interval stope je kalendarska godina. (2)

U skladu sa zadanim podacima, osoba koja premine u kalendarskoj godini t, a rođena je u kalendarskoj godini $t-x$, bit će klasificirana kao da je dobi x u godini smrti, odnosno, preciznije, dobi x na sljedeći rođendan u trenutku zadnjeg 1. siječnja. Neka je $t_i = 1$. siječnja $(K+i)$-te godine, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Zadani su podaci: P_{x,t_i} = broj osoba dobi x na zadnji rođendan u trenutku t_i, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Želimo uskladiti takve cenzusne podatke podatcima o broju umrlih u skladu s principom korespondencije (suglasnosti). (2)

Neka je P'_{x,t_i} = broj osoba dobi x na sljedeći rođendan u trenutku t_i, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Osoba uračunata u D_x je u trenutku t_i (početak kalendarske godine smrti) točne dobi između $x-1$ i x, i uračunata je u P_{x-1,t_i}, a na kraju iste kalendarske godine, ukoliko ne bi preminula, bila bi točne dobi između x i $x+1$ i uračunata u $P_{x,t_{i+1}}$. Pretpostavimo li da je $P_{x,t}$ linearna funkcija duž kalendarske godine, dobijemo sljedeću aproksimaciju:

$$P'_{x,t_i} \approx \frac{1}{2}(P_{x-1,t_i} + P_{x,t_{i+1}}). \qquad (3)$$

Koristeći Eulerovu aproksimaciju integrala (a ne trapeznu jer za nju nemamo dovoljno podataka ili bi trebali dodatne pretpostavke), dobijamo:

$$E_x^c \approx \sum_{i=0}^{N} P'_{x,t_i} \approx \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2}(P_{x-1,t_i} + P_{x,t_{i+1}}). \qquad (2)$$

(*b*) Na početku intervala stope, osobe su točne dobi od $x-1$ do x. Pretpostavimo li da su rođendani uniformno distribuirani duž kalendarske godine, (2)

srednja dob na početku intervala stope je $x - \frac{1}{2}$ (2)

pa $\hat{q}$ procjenjuje $q_{x-\frac{1}{2}}$, dakle $f = -\frac{1}{2}$. (2)

(15)

5. Tablica:

x	d_x	E_x	$E_x \cdot q_x^s$	z_x	z_x^2
20 - 24	35	35000	34	0.17150	0.02941
25 - 29	30	33000	29	0.18569	0.03448
30 - 34	31	30000	35	-0.67612	0.45714
35 - 39	45	30000	52	-0.97072	0.94231
40 - 44	84	31000	80	0.44721	0.20000
45 - 49	138	28000	130	0.70165	0.49231
50 - 54	229	25000	213	1.09630	1.20188
55 - 59	360	23000	348	0.64327	0.41379
60 - 64	522	20000	505	0.75649	0.57228
					4.34360

(*a*) H_0: $q_x = q_x^s$ za sve navedene dobne grupe x
H_1: $q_x \neq q_x^s$ za neku dobnu grupu x (1)
Testna statistika: $H = \sum_x Z_x^2 \overset{H_0}{\sim} \chi^2(9)$ (2)
gdje je $Z_x = \frac{D_x - E_x q_x^s}{\sqrt{E_x q_x^s (1-q_x^s)}}$. (2)
Opažena vrijednost: $h = 4.34$ (2)
P-vrijednost: $\mathbb{P}(H > 4.34 | H_0) = 0.89$ (2)
Ne odbacujemo H_0 na razini značajnosti od 5%. (1)

(*b*) Hipoteze koje se testiraju su iste kao u (*a*). (1)
Testna statistika: $P =$ broj pozitivnih devijacija $\overset{H_0}{\sim} b(9, \frac{1}{2})$ (2)
Opažena vrijednost: $p = 7$ (1)
P-vrijednost: $2\sum_{j=0}^{\min\{p,9-p\}} \binom{9}{j} \frac{1}{2^9} = 2\sum_{j=0}^{2} \binom{9}{j} \frac{1}{2^9} = 0.180$ (3)
Ne odbacujemo H_0. (1)
Testom predznaka detektiramo jesu li stope smrtnosti sistematski više ili niže od odgovarajućih tabličnih stopa. (2)

(20)

6. (a) Vrijedi:

$$\mathbb{V}\text{ar}X = {}^2A^1_{45:\overline{20}|} - (A^1_{45:\overline{20}|})^2 \qquad (2)$$

pri čemu je

$$ {}^2A^1_{45:\overline{20}|} = {}^2A_{45} - 1.04^{-40} \cdot \frac{\ell_{65}}{\ell_{45}} \cdot {}^2A_{65}$$

ili

$$ {}^2A^1_{45:\overline{20}|} = \frac{{}^2M_{45} - {}^2M_{65}}{{}^2D_{45}},$$

gdje su simboli oblika "${}^2X$" računani s kamatnom stopom $1.04^2 - 1 = 8.16\%$. (1)

Budući da se u zadanoj tablici ne nalazi izračun potrebnih simbola s tom kamatnom stopom, navedenim formulama nije moguće izračunati vrijednost ${}^2A_{45:\overline{20}|}$.

Slično:

$$\begin{aligned} A^1_{45:\overline{20}|} &= A_{45} - 1.04^{-20} \cdot \tfrac{\ell_{65}}{\ell_{45}} \cdot A_{65} = \\ &= 0.32560 - 1.04^{-20} \cdot \tfrac{27442.681}{33231.486} \cdot 0.58705 = \\ &= 0.104348 \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} A^1_{45:\overline{20}|} &= \tfrac{M_{45}-M_{65}}{D_{45}} = \\ &= \tfrac{1852.3878-1258.7316}{5689.1776} \\ &= 0.104348 \qquad (2) \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\mathbb{V}\text{ar}Y = {}^2A_{45:\overset{1}{\overline{20}|}} - (A_{45:\overset{1}{\overline{20}|}})^2 \qquad (2)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} {}^2A_{45:\overset{1}{\overline{20}|}} &= 1.04^{-40} \cdot \tfrac{\ell_{65}}{\ell_{45}} = \\ &= 1.04^{-40} \cdot \tfrac{27442.681}{33231.486} = \\ &= 0.172006, \\ A_{45:\overset{1}{\overline{20}|}} &= 1.04^{-20} \cdot \tfrac{\ell_{65}}{\ell_{45}} = \qquad (1) \\ &= 1.04^{-20} \cdot \tfrac{27442.681}{33231.486} = \\ &= 0.376886, \qquad (1) \end{aligned}$$

tako da je

$$\mathbb{V}\mathrm{ar} Y = 0.172006 - 0.376886^2 = 0.029963. \qquad (1)$$

(*b*) Budući da su X i Y nezavisne slučajne varijable,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar} X + \mathbb{V}\mathrm{ar} Y.$$

S druge strane, iako je $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$, Z ima manju varijabilnost od $X + Y$. Naime, najmanja moguća vrijednost od Z je v^{20}, a maksimalna je v, dok je za $X + Y$ najmanja vrijednost 0, a maksimalna $v + v^{20}$. (5)

(15)