

1. Iz tablica smrtnosti očitano je:  $\ell_{58} = 88792$  i  $\ell_{62} = 84173$ .  
Procijenite  $\ell_{60}$  koristeći slijedeće pretpostavke:

- (a) razdioba smrti je uniformna između dobi 58 i 62; (7 bodova)  
(b) intenzitet smrtnosti je konstantan između dobi 58 i 62. (8 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. Sprovedeno je istraživanje kako novi tretman bolesnika oboljelih od određene vrste raka utječe na njihovu smrtnost. Istražuju se dvije grupe pacijenata: jedna se liječi novim, a druga uobičajenim tretmanom. Razmatra se sljedeći model:

$$\lambda(t) = \lambda_0(t) \exp\{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2\},$$

gdje su:

- $\lambda(t)$  hazard u trenutku  $t$ , pri čemu se vrijeme mjeri od početka tretmana  
 $\lambda_0(t)$  osnovni hazard u trenutku  $t$   
 $z_1$  spol ( $z_1 = 0$  za žensko,  $z_1 = 1$  za muško)  
 $z_2$  tretman ( $z_2 = 0$  za stari, a  $z_2 = 1$  za novi tretman)  
 $\beta_1, \beta_2$  parametri modela.

(a) Procijenite vrijednosti parametara  $\beta_1$  i  $\beta_2$  ako je iz istraživanja poznato da je ( $A:$ ) rizik (hazard) za smrt muškog pacijenta 1.02 puta veća od rizika za smrt ženskog pacijenta, i ( $B:$ ) rizik za smrt pacijenta koji prima stari tretman je 1.05 puta veći od rizika smrti za pacijenta koji prima novi tretman. (9 bodova)

(b) Koliko iznosi omjer rizika za smrt muškarca koji prima novi tretman i žene koja se tretira po starom? (6 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Neka je  $H$  sadašnja vrijednost mješovitog osiguranja života za osobu pristupne dobi  $x$ , trajanja  $n$  godina i osigurane svote  $S$ . Izvedite i pokažite slijedeće formule (definirajte sve korištene simbole):

- (a)  $\mathbb{E}[H] = S \cdot (A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{2}})$  (6 bodova)  
(b)  $\text{Var}[H] = S^2 \cdot ({}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2)$ . (9 bodova)

(ukupno 15 bodova)

4. Podaci dobiveni opažanjem jednog Markovljevog procesa s tri stanja su:

stanje	ukupno provedeno vrijeme (u satima)	broj prijelaza u stanje:		
		1	2	3
1	50	-	110	90
2	25	80	-	45
3	90	120	15	-

Pretpostavlja se da su intenziteti prijelaza konstantni.

(a) Metodom maksimalne vjerodostojnosti procijenite sve intenzitete prijelaza. (10 bodova)

(b) Odredite diferencijalne jednadžbe s pripadajućim početnim uvjetima za  ${}_t p_x^{22}$  i  ${}_t p_x^{22}$ . (10 bodova)

(ukupno 20 bodova)

5. Aktuar društva za mirovinsko osiguranje sproveo je istraživanje smrtnosti osiguranika u razdoblju od 1. siječnja 2005. do 1. siječnja 2007.g. Izvod iz opaženih podataka (definicija dobi  $x$  je do na najbliži rođendan):

dob $x$	broj umirovljenika na dan			broj umrlih u	
	1.1.2005.	1.1.2006.	1.1.2007.	2005.	2006.
63	1248	1312	1290	10	6
64	1465	1386	1405	13	15
65	1678	1720	1622	16	23
66	1719	1642	1667	22	19
67	1686	1695	1601	19	25

(a) Procijenite centralnu izloženost riziku za dob 65 pomoću podataka iz tablice. (10 bodova)

(b) Koristeći procjenu iz (a) i podatke iz tablice, procijenite  $\mu_{65+f}$ . Koliko iznosi  $f$ , odn. za koju dob je dobivena procjena intenziteta smrtnosti? Obrazložite. (7 bodova)

(ukupno 17 bodova)

6. Sprovedeno je opsežno istraživanje smrtnosti populacije osiguranika nekog velikog osiguravajućeg društva. Sirove stope smrtnosti izglađene su pomoću standardnih tablica:

$$\overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = \mu_{x+\hat{k}}^s,$$

pri čemu je parametar  $k$  procijenjen metodom najmanjih kvadrata ( $\hat{k} = 2$ ). Izvod rezultata procjene dan je u tablici (stupci: dob ( $x$ ), izglađene vrijednosti ( $\overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ ), centralna izloženost riziku ( $E_x^c$ ), očekivani broj umrlih ( $E_x^c \cdot \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$ ), opaženi broj umrlih ( $d_x$ ) i kvadrati ( $z_x^2$ ) standardiziranih devijacija  $z_x = (d_x - E_x^c \cdot \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}) / \sqrt{E_x^c \cdot \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}}$ ):

$x$	$\overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$	$E_x^c$	$E_x^c \cdot \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$	$d_x$	$z_x^2$
50	0.00549	10850	59.57	52	0.9611
51	0.00610	9812	59.85	54	0.5724
52	0.00679	10054	68.27	60	1.0010
53	0.00757	9650	73.05	65	0.8872
54	0.00845	8563	72.36	64	0.9653
55	0.00945	10656	100.70	87	1.8637
56	0.01057	9667	102.12	88	1.9679
57	0.01182	9560	113.00	97	2.2653
58	0.01323	8968	118.65	103	2.0634
59	0.01483	8455	125.39	105	3.3150

(a) Pomoću  $\chi^2$ -testa testirajte izglađenost: navedite nulhipotezu, sprovedite test i komentirajte (uz razinu značajnosti od 5%). (10 bodova)

(b) Uzimajući u obzir i druge kriterije osim testa u (a) jesu li intenziteti smrtnosti dobro izglađeni? Obrazložite. (8 bodova)

(ukupno 18 bodova)