

1. Pomoću *English Life Table No. 12* izračunajte uvjetnu vjerojatnost smrti muške osobe prije navršene točne dobi od 80 godina i 9 mjeseci, a koja je doživjela točnu dob od 80 godina i 6 mjeseci, koristeći sljedeće pretpostavke o smrtnosti između dobi 80 i 81:

- (a) pretpostavku uniformne razdiobe smrti; (7 bodova)
(b) intenzitet smrtnosti se ravna po Gompertzovom zakonu. (8 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. Društvo za životna osiguranja AB je sprovelo istraživanje smrtnosti svojih osiguranika. Uzet je uzorak od 100 muških osiguranika koji je opažan od njihovog 60. do 65. rođendana ili dok nisu umrli ili otkazali policu, ovisno o tome što je prvo nastupilo.

Podaci o dobi umrlih i onih osiguranika koji su otkazali policu prije 65. rođendana, u godinama (g.) i mjesecima (m.), nalaze se u tablici:

<i>umrli</i>	<i>napustili istraživanje</i>
60 g. 5 m.	60 g. 2 m.
61 g. 1 m.	60 g. 3 m.
62 g. 6 m.	60 g. 8 m.
63 g. 0 m.	61 g. 0 m.
63 g. 0 m.	61 g. 0 m.
63 g. 8 m.	61 g. 0 m.
64 g. 3 m.	61 g. 5 m.
	62 g. 2 m.
	62 g. 9 m.
	63 g. 9 m.
	64 g. 5 m.

(a) Navedite i obrazložite vrste cenzuriranja koje postoje u ovome istraživanju. (5 bodova)

(b) Pomoću Kaplan - Meierovog procjenitelja procijenite vjerojatnost doživljenja dobi 65 (osiguranika društva AB). (10 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Sprovedeno je istraživanje smrtnosti grupe umirovljenika. Opažanje grupe od 8 osoba započelo je 1. siječnja 2003. i završilo je 1. siječnja 2004. U tablici se nalaze podaci (datumi) o rođendanu, o ulasku i izlasku iz opažanja, te o razlogu izlaska (S = zbog smrti ili O = zbog drugih razloga):

<i>osoba</i>	<i>rođena</i>	<i>dan ulaska</i>	<i>dan izlaska</i>	<i>razlog izlaska</i>
1	1. 4. 1932.	1. 1. 2003.	1. 1. 2004.	O
2	1. 10. 1932.	1. 1. 2003.	1. 1. 2004.	O
3	1. 11. 1932.	1. 3. 2003.	1. 9. 2003.	S
4	1. 1. 1933.	1. 3. 2003.	1. 6. 2003.	S
5	1. 1. 1933.	1. 6. 2003.	1. 9. 2003.	O
6	1. 3. 1933.	1. 9. 2003.	1. 1. 2004.	O
7	1. 6. 1933.	1. 1. 2003.	1. 1. 2004.	O
8	1. 10. 1933.	1. 6. 2003.	1. 1. 2004.	O

Pretpostavlja se da je intenzitet smrtnosti μ između dobi 70 i 71 konstantan.

(a) Koristeći model dva stanja, metodom maksimalne vjerodostojnosti procijenite μ , te procijenite (asimptotski) 95% pouzdan interval za taj parametar. (15 bodova)

(b) Koristeći model dva stanja, metodom maksimalne vjerodostojnosti procijenite q_{70} . (5 bodova)

(ukupno 20 bodova)

4. Nacionalno istraživanje smrtnosti sprovodilo se (smrtnost se opažala) tijekom kalendarских godina 2002., 2003. i 2004. Podaci su sakupljeni od velikog broja osiguravajućih društava. Neka je ukupan broj osoba koje su umrle u dobi x na najbliži rođendan tijekom razdoblja opažanja jednak d_x . Svako od osiguravajućih društava dostavlja podatke o broju osoba koje imaju vrijedeće police životnog osiguranja na dane $t = 1$. siječnja godina 2002., 2003., 2004. i 2005., pri čemu su osiguranici klasificirani po dobi x na najbliži rođendan. Označimo ukupan broj takvih osoba na dan t sa $P_x(t)$ (zanemarujemo mogućnost dupliranja broja polica).

(a) Napišite jednadžbu za procjenu $\hat{\mu}$ intenziteta smrtnosti iz raspoloživih podataka. Odredite f tako da $\hat{\mu} = \hat{\mu}_{x+f}$, gdje je μ_{x+f} intenzitet smrtnosti osoba u dobi $x + f$. Obrazložite i navedite sve pretpostavke koje koristite. (10 bodova)

(b) Kako bi se dobivena formula iz (a) promijenila i obrazložite razloge, ukoliko bi osiguravajuća društva dostavljala podatke o broju osiguranika s policama na snazi na iste dane t kao gore, ali klasificirane obzirom na dob x na zadnji rođendan (neka je ukupan broj takvih osiguranika označen sa $P_x^*(t)$)? (5 bodova)

(ukupno 15 bodova)

5. Sprovedeno je opsežno istraživanje smrtnosti populacije osiguranika nekog velikog osiguravajućeg društva. Sirove stope smrtnosti izglađene su pomoću formule: $\hat{q}_x = \alpha + \beta e^{\gamma x}$. Izvod rezultata procjene dan je u tablici (stupci: dob (x), početna izloženost riziku (E_x), sirova (\hat{q}_x) i izglađena ($\overset{\circ}{q}_x$) stopa smrtnosti, standardizirana devijacija ($z_x = (E_x(\hat{q}_x - \overset{\circ}{q}_x)) / \sqrt{E_x \overset{\circ}{q}_x (1 - \overset{\circ}{q}_x)}$):

x	E_x	\hat{q}_x	$\overset{\circ}{q}_x$	z_x
40	11037	0.00290	0.00348	-1.035
41	12010	0.00333	0.00358	-0.459
42	11654	0.00300	0.00368	-1.212
43	9658	0.00300	0.00379	-1.264
44	8457	0.00319	0.00391	-1.061
45	10541	0.00427	0.00402	0.406
46	7410	0.00472	0.00415	0.763
47	12042	0.00399	0.00428	-0.487
48	14038	0.00406	0.00441	-0.626
49	11479	0.00375	0.00455	-1.274
50	12480	0.00409	0.00469	-0.981
51	10567	0.00407	0.00485	-1.154
52	9187	0.00512	0.00500	0.163
53	14027	0.00456	0.00517	-1.007
54	11581	0.00466	0.00534	-1.004

(a) Pomoću χ^2 -testa testirajte izglađenost: navedite nulhipotezu, sprovedite test i komentirajte (uz razinu značajnosti od 5%). (10 bodova)

(b) Sprovedite test predznaka (uz razinu značajnosti od 5%) i navedite koje se loše karakteristike izglađenih stopa detektiraju tim testom u odnosu na test iz (a) dijela zadatka. (10 bodova)

(ukupno 20 bodova)

6. Istraživanja duljine života određene vrste bakterija su pokazala da je vjerojatnost smrti do dobi 1 dan jednaka $q_0 = 0.05$, a nakon dobi 1, smrtnost je s konstantnim intenziteom $\mu_x = 0.01$. Izračunajte:

(a) vjerojatnost da će bakterija uginuti prije isteka prvih 20 dana života; (5 bodova)

(b) matematičko očekivanje života bakterije koja je dobi 1; (3 boda)

(c) matematičko očekivanje života novonastale bakterije (navedite sve pretpostavke koje ste koristili). (7 bodova)

(ukupno 15 bodova)