

1. Za zadano  $p_x = 0.9$  izračunajte  ${}_{0.5}p_x$  i  ${}_{0.5}p_{x+0.5}$  koristeći sljedeće pretpostavke o smrtnosti između dobi  $x$  i  $x + 1$ :

(a) pretpostavka uniformne razdiobe smrti; (7)

(b) Balduccijevu pretpostavku. (8)

2. Navedeni Coxov model proporcionalnog hazarda prilagođen je podacima dobivenim opažanjem određene skupine osiguranika životnih osiguranja:

$$\lambda_i(t) = \lambda_0(t) \exp\{0.01(x_i - 30) + 0.2y_i - 0.05z_i\},$$

gdje su:

$\lambda_i(t)$  hazard za  $i$ -tu osobu u trenutku  $t$

$\lambda_0(t)$  osnovni hazard u trenutku  $t$

$x_i$  pristupna dob osobe  $i$

$y_i$  je 1 ako je osoba  $i$  pušač, inače je 0

$z_i$  je 1 ako je osoba  $i$  žena, a 0 ako je muškarac.

(a) Opišite klasu osiguranika na koje se osnovni hazard odnosi. (3)

(b) Što možete (na osnovi pretpostavljenog modela) zaključiti o odnosu funkcija doživljenja pušačice pristupne dobi 30 i nepušača (muškarca) pristupne dobi 40? (9)

(c) Što možete (na osnovi pretpostavljenog modela) zaključiti o odnosu funkcija doživljenja pušača (muškarca) pristupne dobi 30 i pušačice pristupne dobi 40? (8)

3. Neka je  $R$  sadašnja vrijednost jedinične prenumerando rente za osobu pristupne dobi  $x$  i ograničenog trajanja od  $n$  godina, te neka je  $d = i/(i + 1)$  gdje je  $i$  godišnja kamata na jedinični iznos.

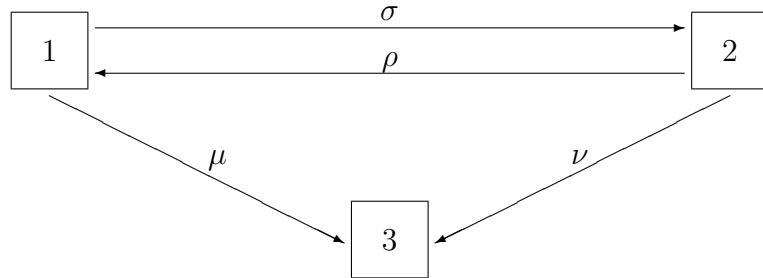
(a) Pokažite da za očekivanu vrijednost od  $R$ , u oznaci  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ , vrijedi:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}(1 - A_{x:\overline{n}|}). \quad (10)$$

(b) Izračunajte varijancu od  $R$  i izrazite ju pomoću  $d$ ,  ${}^2A_{x:\overline{n}|}$  i  $A_{x:\overline{n}|}$ . (5)

Definirajte simbole  ${}^2A_{x:\overline{n}|}$  i  $A_{x:\overline{n}|}$ .

4. Za vrednovanje svojih polica zdravstvenog osiguranja osiguravajuće društvo koristi Markovljev model s tri stanja (1 = “zdrav”, 2 = “bolestan”, 3 = “mrtav”) kao na slici. Pretpostavlja se da su intenziteti prijelaza  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  konstantni.



Promatranje grupe osiguranika tijekom jednogodišnjeg razdoblja dalo je sljedeće rezultate. Opaženo je:

- 10 prijelaza iz stanja 1 u stanje 2
- 7 prijelaza iz stanja 2 u stanje 1
- 2 umrla iz stanja 1
- 3 umrla iz stanja 2.

Ukupno vrijeme provedeno u stanju 1 je 512 godina, a u stanju 2, 20 godina.

- (a) Napišite funkciju vjerodostojnosti za opažene podatke. (3)
- (b) Procijenite  $\rho$  metodom maksimalne vjerodostojnosti. (3)
- (c) Procijenite 95% pouzdan interval za  $\rho$ . (5)
- (d) Postavite diferencijalne jednadžbe i pripadajuće početne uvjete za vjerojatnosti  ${}_t p_x^{11}$  i  ${}_t p_x^{\overline{11}}$ . (4)

5. Kao dio jednog istraživanja smrtnosti, zabilježen je ukupan broj umrlih  $d_x$  tijekom razdoblja opažanja gdje je  $x$  definirano kao dob na **najbliži** rođendan u trenutku smrti,  $x = 45, 46, 47$ . S druge strane, tijekom istoga razdoblja opažanja koje je trajalo od 1. travnja 2006. do 1. travnja 2009. godine zabilježen je broj živih osoba i pod rizikom,  $P_x(t)$ , dobi  $x = 45, 46, 47$  na **zadnji** rođendan u trenucima  $t = 1. travnja 2006., 1. travnja 2007., 1. travnja 2008. i 1. travnja 2009. godine$ .

(a) Navedite princip suglasnosti i definirajte censusni podatak  $P'_x(t)$  koji je konzistentan s navedenom definicijom dobi. Navedite formulu za aproksimaciju  $P'_x(t)$  pomoću opaženih podataka  $P_x(t)$ . (6)

(b) Navedite formulu kojom se iz prikupljenih podataka  $P_x(t)$ ,  $x = 45, 46, 47$ ,  $t = 1.4.2006., 1.4.2007., 1.4.2008., 1.4.2009.$ , procjenjuje odgovarajuća centralna izloženost riziku  $E_{46}^c$ . (5)

(c) Formulom  $\hat{\mu} = d_{46}/E_{46}^c$  procjenjuje se parametar intenziteta smrtnosti  $\mu_{46+f}$ . Odredite vrijednost od  $f$  navodeći sve pretpostavke koje ste pri tome koristili. (4)

6. Osiguravajuće društvo istražuje nedavno iskustvo o smrtnosti svojih muških osiguranika rentnog osiguranja. Izvod iz prikupljenih podataka se nalazi u tablici:

	početna	opaženi
dob	izloženost riziku	broj umrlih
$(x)$	$(E_x)$	$(d_x)$
70	600	23
71	750	31
72	725	33
73	650	29
74	700	35
75	675	39

(a) Pomoću  $\chi^2$ -testa usporedite da li opaženo iskustvo odgovara iskustvu smrtnosti iz tablice  $a(55)$  *Ultimate Mortality Table for Male Annuitants*. Na bazi te tablice su određene premije za rente navedenog osiguravajućeg društva (OD). Navedite nulhipotezu koja se testira, sprovedite test i komentirajte. (14)

(b) Komentirajte kakve će financijske posljedice biti po OD ako nastavi prodavati rente koje su vrednovane na bazi tablica  $a(55)$ . (2)

(c) Navedite koje su razlike u primjeni testa iz (a) ako opažene stope smrtnosti uspoređujemo sa izgladenim stopama

$$\overset{\circ}{q}_x = a + bq_x^s,$$

pri čemu parametre  $a, b$  treba procijeniti iz podataka, a  $q_x^s$  su standardne stope iz tablice  $a(55)$ . (4)