

1. Pomoću *English Life Table No. 12* izračunajte uvjetnu vjerojatnost smrti muške osobe prije navršene točne dobi od 80 godina i 9 mjeseci, a koja je doživjela točnu dob od 80 godina i 6 mjeseci, koristeći sljedeće pretpostavke o smrtnosti između dobi 80 i 81:

- (a) pretpostavku uniformne razdiobe smrti; (7 bodova)
(b) intenzitet smrtnosti se ravna po Gompertzovom zakonu. (8 bodova)

(ukupno 15 bodova)

2. Društvo za životna osiguranja AB je sprovelo istraživanje smrtnosti svojih osiguranika. Uzet je uzorak od 100 muških osiguranika koji je opažan od njihovog 60. do 65. rođendana ili dok nisu umrli ili otkazali policu, ovisno o tome što je prvo nastupilo.

Podaci o dobi umrlih i onih osiguranika koji su otkazali policu prije 65. rođendana, u godinama (g.) i mjesecima (m.), nalaze se u tablici:

<i>umrli</i>	<i>napustili istraživanje</i>
60 g. 5 m.	60 g. 2 m.
61 g. 1 m.	60 g. 3 m.
62 g. 6 m.	60 g. 8 m.
63 g. 0 m.	61 g. 0 m.
63 g. 0 m.	61 g. 0 m.
63 g. 8 m.	61 g. 0 m.
64 g. 3 m.	61 g. 5 m.
	62 g. 2 m.
	62 g. 9 m.
	63 g. 9 m.
	64 g. 5 m.

(a) Navedite i obrazložite vrste cenzuriranja koje postoje u ovome istraživanju. (5 bodova)

(b) Pomoću Kaplan - Meierovog procjenitelja procijenite vjerojatnost doživljenja dobi 65 (osiguranika društva AB). (10 bodova)

(ukupno 15 bodova)

3. Sprovedeno je istraživanje smrtnosti grupe umirovljenika. Opažanje grupe od 8 osoba započelo je 1. siječnja 2003. i završilo je 1. siječnja 2004. U tablici se nalaze podaci (datumi) o rođendanu, o ulasku i izlasku iz opažanja, te o razlogu izlaska (S = zbog smrti ili O = zbog drugih razloga):

<i>osoba</i>	<i>rođena</i>	<i>dan ulaska</i>	<i>dan izlaska</i>	<i>razlog izlaska</i>
1	1. 4. 1932.	1. 1. 2003.	1. 1. 2004.	O
2	1. 10. 1932.	1. 1. 2003.	1. 1. 2004.	O
3	1. 11. 1932.	1. 3. 2003.	1. 9. 2003.	S
4	1. 1. 1933.	1. 3. 2003.	1. 6. 2003.	S
5	1. 1. 1933.	1. 6. 2003.	1. 9. 2003.	O
6	1. 3. 1933.	1. 9. 2003.	1. 1. 2004.	O
7	1. 6. 1933.	1. 1. 2003.	1. 1. 2004.	O
8	1. 10. 1933.	1. 6. 2003.	1. 1. 2004.	O

Pretpostavlja se da je intenzitet smrtnosti μ između dobi 70 i 71 konstantan.

(a) Koristeći model dva stanja, metodom maksimalne vjerodostojnosti procijenite μ , te procijenite (asimptotski) 95% pouzdan interval za taj parametar. (15 bodova)

(b) Koristeći model dva stanja, metodom maksimalne vjerodostojnosti procijenite q_{70} . (5 bodova)

(ukupno 20 bodova)

4. Aktuar društva za mirovinsko osiguranje sproveo je istraživanje smrtnosti osiguranika u razdoblju od 1. siječnja 2005. do 1. siječnja 2007.g. Izvod iz opaženih podataka (definicija dobi x je do na najbliži rođendan):

<i>dob</i> <i>x</i>	<i>broj umirovljenika na dan</i>			<i>broj umrlih u</i>	
	1.1.2005.	1.1.2006.	1.1.2007.	2005.	2006.
63	1248	1312	1290	10	6
64	1465	1386	1405	13	15
65	1678	1720	1622	16	23
66	1719	1642	1667	22	19
67	1686	1695	1601	19	25

(a) Procijenite centralnu izloženost riziku za dob 65 pomoću podataka iz tablice. (10 bodova)

(b) Koristeći procjenu iz (a) i podatke iz tablice, procijenite μ_{65+f} . Koliko iznosi f , odn. za koju dob je dobivena procjena intenziteta smrtnosti? Obrazložite. (7 bodova)

(ukupno 17 bodova)

5. Sprovedeno je opsežno istraživanje smrtnosti populacije osiguranika nekog velikog osiguravajućeg društva. Sirove stope smrtnosti izglađene su pomoću standardnih tablica:

$$\overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = \mu_{x+\hat{k}}^s,$$

pri čemu je parametar k procijenjen metodom najmanjih kvadrata ($\hat{k} = 2$). Izvod rezultata procjene dan je u tablici (stupci: dob (x), izglađene vrijednosti ($\overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$), centralna izloženost riziku (E_x^c), očekivani broj umrlih ($E_x^c \cdot \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$), opaženi broj umrlih (d_x) i kvadrati (z_x^2) standardiziranih devijacija $z_x = (d_x - E_x^c \cdot \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}) / \sqrt{E_x^c \cdot \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}}$):

x	$\overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$	E_x^c	$E_x^c \cdot \overset{\circ}{\mu}_{x+\frac{1}{2}}$	d_x	z_x^2
50	0.00549	10850	59.57	52	0.9611
51	0.00610	9812	59.85	54	0.5724
52	0.00679	10054	68.27	60	1.0010
53	0.00757	9650	73.05	65	0.8872
54	0.00845	8563	72.36	64	0.9653
55	0.00945	10656	100.70	87	1.8637
56	0.01057	9667	102.12	88	1.9679
57	0.01182	9560	113.00	97	2.2653
58	0.01323	8968	118.65	103	2.0634
59	0.01483	8455	125.39	105	3.3150

(a) Pomoću χ^2 -testa testirajte izglađenost: navedite nulhipotezu, sprovedite test i komentirajte (uz razinu značajnosti od 5%). (10 bodova)

(b) Uzimajući u obzir i druge kriterije osim testa u (a) jesu li intenziteti smrtnosti dobro izglađeni? Obrazložite. (8 bodova)

(ukupno 18 bodova)

6. Neka je H sadašnja vrijednost mješovitog osiguranja života za osobu pristupne dobi x , trajanja n godina i osigurane svote S . Izvedite i pokažite slijedeće formule (definirajte sve korištene simbole):

$$(a) \mathbb{E}[H] = S \cdot (A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{2}}) \quad (6 \text{ bodova})$$

$$(b) \text{Var}[H] = S^2 \cdot ({}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2). \quad (9 \text{ bodova})$$

(ukupno 15 bodova)