

Zagreb, 24. veljače 2003.

FINANCIJSKA MATEMATIKA
Zadaci za vježbu

Napomena: Zadaci u ovoj prvoj skupini se mogu smatrati početnima i služe za uvježbavanje pojedinih pojmova.

1. Efektivna godišnja kamatna stopa je 7%. Nađite vrijednost od $\ddot{s}_{\overline{12}|}^{(12)}$.
2. Odredite vrijednost od $d^{(12)}$ ako je $d^{(3)} = 0,0470$.
3. Odredite vrijednost od $i^{(12)}$ ako je $i = 0,036$.
4. Ako je $i = 6\%$ nađite vrijednost od $(\bar{I}\bar{a})_{\overline{10}|}$.
5. Nađite vrijednost od $(I\bar{a})_{\overline{20}|}$ uz efektivnu kamatnu stopu od 5% godišnje.
6. Uz $i = 0,062$, nađite vrijednost od $\ddot{a}_{\overline{20}|}^{(4)}$.
7. Investicija raste uz intenzitet kamate $\delta(t)$ godišnje, gdje je

$$\delta(t) = 0,13 - 0,02t \quad 0 \leq t \leq 6,5$$

Iznos investicije u trenutku $t = 0$ bio je 1000. Odredite iznos investicije u trenutku $t = 5$.

8. Investicija od 1 akumulira se kroz četiri godine uz sljedeće kamatne stope: efektivna diskontna stopa od 9% godišnje kroz dvije godine, nakon koje slijedi nominalna diskontna stopa od 8,5% godišnje koja se pripisuje tromjesečno kroz dvije godine. Izračunajte akumulirani iznos investicije nakon dvije godine.
9. Iznos od 100 akumulira se uz nominalnu diskontnu stopu od 5,5% godišnje koja se pripisuje tromjesečno kroz 1 godinu, a tada uz nominalnu kamatnu stopu od 5,5% godišnje koja se pripisuje tromjesečno kroz 1 godinu. Nađite akumuliranu vrijednost investicije nakon 2 godine.

10. Iznos od 100 akumulira se uz nominalnu diskontnu stopu od 7,5% godišnje koja se pripisuje tromjesečno kroz 1 godinu, a tada uz nominalnu kamatnu stopu od 7,5% godišnje koja se pripisuje polugodišnje kroz 1 godinu. Nađite akumuliranu vrijednost investicije nakon 2 godine.
11. Kolika je akumulirana vrijednost nakon 15 godina financijske postnumerando rente od 12 godišnje plative tromjesečno, uz kamatnu stopu 12% godišnje koja se pripisuje polugodišnje?
12. Investitor kupuje financijsku postnumerando rentu koja dopijeva godišnje kroz razdoblje od 10 godina. Prva isplata je 1000, a svaka sljedeća je za 5% veća od prethodne. Kolika je sadašnja vrijednost takve rente uz efektivnu kamatnu stopu 9% godišnje?
13. Prenumerando renta počinje sa 200 godišnje i smanjuje se za iznos od 10 godišnje. Završna isplata je u iznosu 130. Nađite sadašnju vrijednost ove rente ako je $i = 4\%$.
14. Dan je neprekidni novčani tok s konstantnom stopom plaćanja od n godišnje kroz n -tu godinu za $n = 1$ do 10. Odredite sadašnja vrijednost tog toka uz kamatnu stopu od 8% godišnje efektivno.
15. Banka posuđuje iznos od 10000. Zajam će biti vraćen nizom od 15 godišnjih otplata jednakog iznosa. Prva otplata je 1 godinu nakon odobrenja zajma. Ako je prinos banke 7% godišnje izračunajte iznos otplata.
Ako je svaka otplata 1170, odredite prinos banke.
16. Nađite vrijednost od $\ddot{a}_{50:\overline{15}|}^{(12)}$ koristeći krajnje A1967-70 tablice s efektivnom godišnjom kamatnom stopom od 4%.
17. Nađite vrijednost od $a_{[57]:\overline{7}|}$ koristeći selektirane A1967-70 tablice i efektivnu kamatnu stopu od 4% godišnje.
18. Koristeći A1967-70 krajnje tablice uz efektivnu kamatnu stopu od 4% godišnje odredite vrijednost od $A_{[30]:\overline{15}|}^{\frac{1}{2}}$.
19. Uz A1967-70 krajnje tablice s efektivnom godišnjom kamatnom stopom 4% odredite vrijednost od \ddot{a}_{70} i vrijednost od a_{53} .
20. Osobi dobi 60 godina izdano je dvogodišnje osiguranje za slučaj smrti za osiguranu svotu od 10000 plativu na kraju godine u kojoj nastupi smrt. Uz A1967-70 selektiranu smrtnost i efektivnu kamatnu stopu od 4% godišnje odredite jednokratnu neto premiju za ovaj ugovor.

21. Osoba u dobi 50 godina kupuje policu doživotnog osiguranja. Osigurana svota je 100000. Konstantna godišnja premija plaća se doživotno. Odredite iznos premije uz troškove u iznosu 5% godišnje upotrebom krajnjih A1967-70 tablica s kamatnom stopom $i = 4\%$.
22. Osoba u dobi x kupuje doživotnu rentu. Ona plaća jednokratnu premiju P , i nakon toga joj pripada iznos 2000 na kraju svake godine u kojoj je živa. Ako umre prije dobi $x + 5$, osiguravajuće društvo isplaćuje iznos $P/2$ na kraju godine u kojoj osoba umre. Izvedite izraz za jednokratnu neto premiju.
- Nadite formulu za prospektivnu rezervu ${}_tV_x$ za cijeli broj $t \leq 5$.
- Nadite formulu za retropektivnu rezervu ${}_tV_x$ za cijeli broj $t \geq 5$.

Napomena: Zadaci u idućoj skupini se mogu smatrati osnovnima. Podrazumijeva se da će ispitni zadaci biti nešto kompleksniji i da će zadaci slični ovima (slične težine) u njima pojaviti kao sastavni dijelovi. Rješenja navedenih zadataka će biti ili mogu biti diskutirana na konzultacijama.

1. Neka se financijska renta isplaćuje godišnje unaprijed u godišnjem iznosu S tokom n godina uz konstantnu efektivnu kamatnu stopu i . Odredite novi iznos godišnje isplate S' ako bi se ova renta (uz sve ostale uvjete neizmijenjene) isplaćivala u jednakim iznosima mjesečno unaprijed.
- Posebno, u navedenim okolnostima izrazite u postotku povećanje od S ako je $i = 9\%$.
2. Neka se, uz djelovanje konstantnog inteziteta kamate, uplaćuje iznos X na početku svake godine, tokom n godina. Temeljem ovih uplata investitoru pripada godišnja renta u iznosu Y koja će se isplaćivati tokom $2n$ godina, pri čemu prva isplata dospijeva 1 godinu nakon zadnje uplate. Ako bi temeljem istih uplata i uz isti datum dospijeća prve isplate investitor poželio rentu koja će se u godišnjem iznosu Z isplaćivati tokom $3n$ godina, odredite Z u ovisnosti o Y .
- Posebno, odredite Z ako je $X = 100$, $n = 6$ i $\delta = 0,04879$.

3. Investitor uplaćuje 5 godišnjih uplata u iznosu 400. Zauzvrat može birati godišnju rentu koja će se u jednakim godišnjim iznosima X isplaćivati tokom 10 godina s tim da prva isplata dopijeva 2 godine nakon zadnje uplate, ili pak jednokratnu isplatu u iznosu 5000, t godina nakon prve uplate. Ako je sve vrijeme na snazi konstantna efektivna kamatna stopa $i = 6\%$, odredite odgovarajuće vrijednosti za X i t .
4. Investitor će na poseban račun 5 puta uplatiti iznos 100 u pravilnim razmacima od po 2 godine. Deset godina nakon prve uplate pripast će mu iznos 350, a 2 godine poslije još daljnjih 350. Odredite (godišnji) prinos na ovu transakciju.
5. Odredite, uz $i = 5\%$, sadašnju vrijednost rastuće godišnje rente koja se počinje plaćati 1 godinu od sada u iznosu 100, svaka sljedeća isplata se uvećava za 10, a iznos posljednje isplate je 210. Odredite iznos konstantne godišnje rente čija isplata bi se vršila tokom 12 godina godišnje unatrag, a koja bi imala istu sadašnju vrijednost.
6. Neka je $l_x = 100\sqrt{100 - x}$. Odredite μ_x i izračunajte μ_{84} egzaktno i približno upotrebom poznatih aproksimativnih formula.
7. Neka se za osobu sada u dobi $x = 50$ osigurava doživotna renta koja će se isplaćivati mjesečno unaprijed u iznosu 100 počevši od dobi $x = 60$. Odredite polugodišnju bruto premiju čije plaćanje je ograničeno na 5 godina. Predviđeni troškovi su 2% svake premije te 1,5 (novčanih jedinica) prilikom svake isplate. Tablice: A1967-70, krajnje, $i = 4\%$.
8. Osoba sada u dobi $x = 50$ kupuje mješovito osiguranje za period između 60 i 70 godina svog života. Ako je osigurana svota 1000 i za slučaj smrti i za slučaj doživljenja, te ako je početni trošak 100, a troškovi obnove iznose 1% svake premije i 2% osigurane svote prilikom isplate, odredite godišnju bruto premiju kojaće se plaćati tokom 10 godina. Tablice: A1967-70, krajnje, $i = 4\%$.
9. Osoba sada u dobi $x = 50$ osigurava doživotnu godišnju prenumerando rentu u iznosu 1000 uz sljedeću odredbu. Ako smrt nastupi prije navršenja dobi 60, renta će se nastaviti isplaćivati do, uključivo, isplate 10-tog obroka. Ako smrt nastupi iza navršenja dobi 60 obveza isplate prestaje sa smrću osiguranika. Odredite sadašnju vrijednost ove rente uz selektirane A1967-70 tablice i kamatnu stopu $i = 4\%$.
10. Osoba sada u dobi $x = 50$ osigurava doživotnu godišnju prenumerando rentu u iznosu 1000 uz sljedeću odredbu. Ako smrt nastupi prije navršenja dobi 60, renta će se nastaviti isplaćivati do, uključivo, isplate 10-tog obroka, ali u godišnjem iznosu 700. Ako smrt nastupi iza

navršenja dobi 60 obveza isplate prestaje sa smrću osiguranika. Odredite sadašnju vrijednost ove rente uz selektirane A1967-70 tablice i kamatnu stopu $i = 4\%$.

11. Koristeći funkciju $S_x := N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \dots$ i principe na temelju kojih je izvedena formula za sadašnju vrijednost rastućih financijskih renti, izvedite formulu za sadašnju vrijednost neposredne doživotne godišnje rente za osobu sada u dobi x , plative unaprijed, u godišnjim iznosima, redom, 1, 2, 3, ...
12. Osoba u dobi $x = 60$ kupuje rastuću neposrednu doživotnu rentu, plativu unaprijed, u prvom iznosu 100 s tim da se svaka sljedeća isplata uvećava za 10. Izračunajte sadašnju vrijednost ove rente upotrebom A1967-70 krajnjih tablica s $i = 4\%$. Koliko bi iznosila konstantna renta, uz sve ostale uvjete identične prethodnima, čija sadašnja vrijednost je ista?
13. Neka se doživotna godišnja renta počne isplaćivati u iznosu 100 s tim da se svaka sljedeća isplata smanjuje za 4 sve dok ne padne na iznos 60 koji će se onda dalje isplaćivati doživotno. Ako je dob korisnika u trenutku prve isplate $x = 50$, odredite sadašnju vrijednost ove rente primjenom A1967-70 krajnjih tablica s $i = 4\%$.
14. Osoba u dobi x kupuje osiguranje za slučaj smrti između dobi $x + n$ i $x + k$, $n < k$. Premije će se plaćati godišnje tokom n godina uz sljedeći uvjet: u slučaju smrti prije navršenja dobi $x + n$, na kraju godine u kojoj je nastupila smrt vratit će se sve do tada uplaćene premije, ali bez priznavanja ikakvih kamata. Odredite godišnju neto premiju.
Specificirajte za $x = 50$, $n = 10$, $k = 20$ i osiguranu svotu u iznosu 100 upotrebom A1967-70 krajnjih tablica s $i = 4\%$.
15. Osoba u dobi x sklapa mješovito osiguranje koje se sastoji osiguranja za slučaj smrti od sada pa do navršenja dobi $x + n$ te od neposredne doživotne godišnje rente plative unaprijed. Neka se u slučaju smrti isplaćuje iznos S , a iznos rente neka je R .

Nađite formulu za rezervu ${}_tV_x$ za cijeli broj $t \leq n$ i prospektivnom i restrospektivnom metodom.

Odredite sadašnju vrijednost ovog osiguranja upotrebom selektiranih A1967-70 tablica s kamatnom stopom $i = 4\%$ ako je $x = 65$, $n = 5$, $S = 10000$, $R = 12000$.