PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

AKTUARSKA MATEMATIKA II

19. 4. 2004.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 80
Broj zadataka: 7
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

1.

(i) Osiguratelj osigurava rizik za koji pojedinačni iznosi šteta slijede Paretovu distribuciju s parametrima $\alpha = 2.5$ i $\lambda = 30000$. Reosiguratelj A pokriva rizik po ugovoru o kvotnom reosiguranju uz samopridržaj od 75%. Pokažite da zadržani iznos štete ima Paretovu distribuciju s parametrima $\alpha = 2.5$ i $\lambda = 22500$. [5]

(ii) Osiguratelj također sklapa ugovor o reosiguranju viška štete za taj rizik s drugim reosigurateljem, B. Reosiguranje viška štete primjenjuje se na iznose koji ostaju nakon primjene ugovora o kvotnom reosiguranju. Po ugovoru o reosiguranju viška štete, višak svakog iznosa preko 200000 Kn plaća reosiguratelj B, s maksimalnom isplatom od 100000 Kn po šteti. Reosiguratelj nije obaviješten o štetama iz rizika koje ne rezultiraju isplatom po ugovoru o reosiguranju viška štete.

(a) Distribucija broja šteta za reosigurateljev višak štete je Poissonova s parametrom $\theta = 0.2$. Broj šteta je nezavisan od iznosa pojedinačnih šteta. Pokažite da je distribucija broja šteta za osiguratelja Poissonova s parametrom 61.5. [5]

(b) Napišite izraz za očekivani pojedinačni iznos štete koji plaća reosiguratelj za štete u koje je uključen. [2]

[Ukupno 12 bodova]

2. Slučajne varijable Y_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, te neslučajni brojevi P_{ij} predstavljaju ukupne iznose šteta i odgovarajuće volumene rizika u godini j za rizik i u skupu od N rizika. Podaci $\{Y_{ij}, P_{ij}\}$ zadovoljavaju sve pretpostavke Modela 2 empirijske Bayesovske teorije povjerenja. Podaci za dva rizika iz tog skupa od N rizika su:

Godina	1	2	3	4	5	6
	$(Y;P)$	$(Y;P)$	$(Y;P)$	$(Y;P)$	$(Y;P)$	$(Y;P)$
Rizik 1	$(243;80)$	$(304;85)$	$(195;85)$	$(270;90)$	$(250;90)$	$(292;95)$
Rizik 2	$(80;25)$	$(78;20)$	$(65;20)$	$(42;20)$	$(75;25)$	$(63;20)$

Procjena premije povjerenjem po jedinici volumena rizika za sljedeću godinu za Rizik 1 jednaka je 2.72, a implicirani faktor povjerenja za taj rizik je 0.75.

(i) Izračunajte faktor povjerenja i premiju povjerenjem po jedinici volumena za sljedeću godinu za Rizik 2. [8]

(ii) Objasnite ukratko zašto faktori povjerenja za ta dva rizika nisu jednaki. [2]

[Ukupno 10 bodova]

3. Broj e-mail poruka koji svaki dan primi student aktuarstva ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem λ, gdje je iz prethodnog iskustva apriorna distribucija od λ eksponencijalna s očekivanjem μ. Student ima podatke $x_1, \ldots, x_n$, gdje je x_i broj poruka pristiglih dana i, $i = 1, \ldots, n$.

(i) Izvedite aposteriornu distribuciju od λ. [5]

(ii) Pokažite da se Bayesovska procjena od λ uz kvadratni gubitak može napisati u obliku procjene povjerenjem, te navedite faktor povjerenja. [4]

(iii) Ako je $\mu = 50$ i student primi ukupno 550 poruka u 10 dana, izračunajte Bayesovsku procjenu za λ uz kvadratni gubitak. [2]

[Ukupno 11 bodova]

4. U sustavu bonusa za osiguranje motornih vozila postoje tri kategorije popusta: 0%, 20% i 30%. Puna godišnja premija je 190. Ukoliko tokom godine nije prijavljena šteta, osiguranik se pomiče u sljedeću višu kategoriju ili ostaje na 30%. U slučaju jedne ili više šteta, osiguranik se spušta na 0%. Vjerojatnost da osiguranik ima nezgodu tokom godine je 0.1, a vjerojatnost više od jedne nezgode je zanemariva. U slučaju nezgode iznos štete ima lognormalnu distribuciju s parametrima $\mu = 4.5$ i $\sigma^2 = 0.84$. Osiguranik će prijaviti štetu u slučaju nezgode, ako je šteta veća od ukupne dodatne premije koja bi trebala biti plaćena u beskonačnom vremenskom horizontu (uz pretpostavku da nema dodatnih nezgoda).

(i) Pokažite da je vjerojatnost prijave štete u slučaju nezgode jednaka 0.6910 za osiguranika na 0% popusta, te 0.5733 za osiguranika na 20% ili 30% popusta. [5]

(ii) Izračunajte matricu prelaznih vjerojatnosti prijave štete. [4]

(iii) Za osiguranika koji plaća punu premiju u tekućoj godini, izračunajte očekivanu premiju sljedeće godine. [3]

[Ukupno 12 bodova]

5. Pretpostavlja se da portfelj od 30 polica osiguranja motornih vozila ima sljedeće karakteristike: iznosi ukupnih šteta iz svakog rizika imaju složenu Poissonovu distribuciju s Poissonovim parametrom $\lambda = 0.1$. Distribucija individulanog iznosa štete iz svakog rizika je lognormalna s parametrima $\mu = 6.5$ i $\sigma = 1.0$. Rizici su međusobno nezavisni. Označimo sa S ukupni iznos šteta u portfelju.

(i) Izračunajte $\mathbb{E}[S]$ i $\mathrm{Var}[S]$. [5]

(ii) Kolika je vjerojatnost da iznos pojedinačne štete iz portfelja bude veći od 5000.00 ? [3]

(iii) Upotrebom normalne aproksimacije distribucije ukupnog iznosa šteta procjenite $\mathbb{P}(S > 5000.00)$. [4]

(iv) Komentirajte rezultat dobiven u (iii). Da li dobivena procjena podcjenjuje ili precjenjuje traženu vjerojatnost i zašto? Predložite bolju aproksimaciju. [2]

[Ukupno 14 bodova]

6. Štete pristižu u skladu s Poissonovim procesom. Iznosi pojedinačnih šteta su nezavisni s gustoćom:

$$f(x) = xe^{-x} \quad (x > 0)\,,$$

a osiguratelj upotrebljava dodatak na premiju θ.

(i) Izvedite jednadžbu za koeficijent prilagodbe za taj proces. [5]

(ii) Ako je $\theta = 0.4$, izračunajte koeficijent prilagodbe i odredite gornju među za vjerojatnost krajnje propasti ako je početni višak jednak 50. [5]

[Ukupno 10 bodova]

7. Tablica 1 pokazuje isplate, u nekumulativnom obliku, u uzastopnim godinama za određeni tip neživotnog osiguranja. Svi iznosi su u tisućama kuna i pretpostavlja se da su sve štete potpuno riješene do kraja razvojne godine 4.

Prirasti isplata šteta

Godina nastanka štete	**Razvojna godina**				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
1999	900	1000	700	600	350
2000	1000	1500	950	700	
2001	1050	1450	1450		
2002	1300	1700			
2003	1550				

Tablica 1:

(i) Pretpostavimo da su godišnje stope inflacije šteta kroz 12 mjeseci sve do sredine dane godine kao što slijedi:

2000	5.5%
2001	7.0%
2002	6.5%
2003	6.0%

Formirajte tablicu prirasta isplata šteta u cijenama sredinom 2003. godine (tj., nakon prilagodbe za inflaciju u proteklom razdoblju). [3]

(ii) Upotrebom metode ulančanih ljestvica prilagođene za inflaciju izračunajte razvojne faktore za procjenu neriješenih šteta. [4]

(iii) Izračunajte procijenjenu pričuvu na kraju 2003. godine. Zanemarite inflaciju u budućem razdoblju. [4]

[Ukupno 11 bodova]

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

AKTUARSKA MATEMATIKA II

19. 4. 2004.

Rješenja

1.

(i) $X =$ pojedinačni iznos štete $\sim \mathrm{Pa}(\alpha, \lambda)$, $\alpha = 2.5$, $\lambda = 30000$; $Z = \rho X$, zadržan dio, $0 < \rho < 1$ je samopridržaj, $\rho = 0.75$.

Funkcija gustoće $\mathrm{Pa}(\alpha, \lambda)$ distribucije je $f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}$, $x > 0$. Računamo:

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \le x) = \mathbb{P}(X \le x/\rho) \\ &= \int_0^{x/\rho} f(y)\, dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{\rho} f\left(\frac{z}{\rho}\right) dz \\ &= \int_0^x \frac{1}{\rho} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + z/\rho)^{\alpha+1}}\, dz \\ &= \int_0^x \frac{\alpha(\lambda\rho)^\alpha}{(\lambda\rho + z)^{\alpha+1}}\, dz \end{aligned}$$

Dakle, $Z \sim \mathrm{Pa}(\alpha, \lambda\rho) = \mathrm{Pa}(2.5, 22500)$.

(ii) (a) Označimo:

$$\begin{aligned} N &= \text{osigurateljev broj šteta (ukupni broj šteta)} \\ NR &= \text{broj šteta koje rezultiraju isplatom po ugovoru} \\ &\ \text{o reosiguranju viška štete} \\ Z &= \text{iznos pojedinačne štete nakon primjene ugovora} \\ &\ \text{o kvotnom reosiguranju } = 0.75X \sim \mathrm{Pa}(2.5, 22500) \\ I &= \begin{cases} 1, & \text{ako je } Z > 200000 \\ 0, & \text{ako je } Z \le 200000 \end{cases} \\ \pi &= \mathbb{P}(I = 1) = \mathbb{P}(Z > 200000) \end{aligned}$$

Po formuli na str. 18, Cjelina 4, vrijedi sljedeća formula za funkcije izvodnice:

$$M_{NR}(t) = M_N(\log(M_I(t))\,.$$

Zadano je $MR \sim \mathrm{Poisson}(\theta)$, $\theta = 0.2$, pa je $M_{NR}(t) = e^{\theta(e^t-1)}$. Također, $M_I(t) = 1 - \pi + \pi e^t$. Slijedi,

$$e^{\theta(e^t-1)} = M_N(\log(1 - \pi + \pi e^t))\,. \tag{1}$$

Stavimo $s = \log(1-\pi+\pi e^t)$; slijedi da je $e^t - 1 = (e^s-1)/\pi$. Uvrstimo u (1):

$$M_N(s) = \exp\{\frac{\theta}{\pi}(e^s-1)\}\,.$$

Dakle, $N \sim \text{Poisson}(\theta/\pi)$. Još treba izračuanti π.

$$\begin{aligned} \pi &= \mathbb{P}(Z > 200000) \\ &= \int_{200000}^{\infty} \frac{\alpha\delta^\alpha}{(x+\delta)^{\alpha+1}} \quad (\text{uz } \delta = \rho\lambda = 22500) \\ &= \left(\frac{22500}{222500}\right)^{2.5} \\ &\approx 0.00325 \end{aligned}$$

Slijedi $\theta/\pi \approx 61.5$.

(b) Očekivanje iznosa pojedinačne štete za reosiguratelja je:

$$\int_{200000}^{300000} (x-200000) f_Z(x)\,dx + 100000\mathbb{P}(Z > 300000)\,.$$

2.

(i) Neka su Z_1 i Z_2 faktori povjerenja za rizike 1 i 2. Tada je

$$\begin{aligned} \text{Procjena premije za rizik 1} &= Z_1\bar{X}_1 + (1-Z_1)\mathbb{E}[m(\theta)] \qquad (2) \\ \text{Procjena premije za rizik 2} &= Z_2\bar{X}_2 + (1-Z_2)\mathbb{E}[m(\theta)] \qquad (3) \end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \frac{\sum_{j=1}^6 Y_{1j}}{\sum_{j=1}^6 P_{1j}} = \frac{1554}{525} = 2.96 \\ \bar{X}_2 &= \frac{\sum_{j=1}^6 Y_{2j}}{\sum_{j=1}^6 P_{2j}} = \frac{403}{130} = 3.10 \end{aligned}$$

Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\sum_{j=1}^6 P_{1j}}{\sum_{j=1}^6 P_{1j} + \frac{\mathbb{E}[s^2(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]}} = \frac{525}{525 + \frac{\mathbb{E}[s^2(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]}} \qquad (4) \\ Z_2 &= \frac{\sum_{j=1}^6 P_{2j}}{\sum_{j=1}^6 P_{2j} + \frac{\mathbb{E}[s^2(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]}} = \frac{130}{130 + \frac{\mathbb{E}[s^2(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]}} \qquad (5) \end{aligned}$$

Iz (4) i danog $Z_1 = 0.75$, dobivamo

$$\frac{\mathbb{E}[s^2(\theta)]}{\mathrm{Var}[m(\theta)]} = 175\,.$$

Uvraštavanjem u (5) slijedi

$$Z_2 = \frac{130}{130 + 175} \approx 0.426\,.$$

Sada iz (2) dobivamo $\mathbb{E}[m(\theta)] = 2$, pa uvrštavanjem u (3) slijedi da je premija povjerenjem za Rizik 2 jednaka:

$$0.426 \times 3.10 + 0.574 \times 2 \approx 2.469\,.$$

(ii) Faktor povjerenja za Rizik 2 je manji, budući da se zasniva na ukupno manjem volumenu rizik, $\sum_{j=1}^{6} P_{2j} = 310$, nego faktor povjerenja za Rizik 1, $\sum_{j=1}^{6} P_{1j} = 525$.

3.

(i) Apriorna gustoća od λ je $f(\lambda) = e^{-\lambda/\mu}/\mu$. Uz oznaku $x = (x_1, \ldots, x_n)$ imamo

$$f(x\,|\,\lambda) = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

tako da je aposteriorna gustoća

$$\begin{aligned} f(\lambda\,|\,x) &\propto f(\lambda) \times f(x\,|\,\lambda) \\ &\propto e^{-\lambda/\mu} e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \\ &= \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \exp\left(-\lambda\left(n + \frac{1}{\mu}\right)\right)\,, \end{aligned}$$

t.j., $\Gamma(1 + \sum_{i=1}^n x_i, n + (1/\mu))$.

(ii) Bayesovska procjena uz kvadratni gubitak je aposterirno očekivanje

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i + 1}{n + \frac{1}{\mu}} = \frac{n}{n + \frac{1}{\mu}}\,\bar{x} + \frac{\frac{1}{\mu}}{n + \frac{1}{\mu}}\,\mu\,,$$

što ima oblik procjene povjerenjem s faktorom povjerenja $n/(n+(1/\mu))$.

(iii) S danim vrijednostima, procjena od λ je

$$\frac{550+1}{10+(1/50)} = 54.99\,.$$

4.

(i) Neka X označava trošak u slučaju nezgode. Tada je $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma)$, gdje je $\mu = 4.5$ i $\sigma = \sqrt{0.84}$.

0%	190
20%	152
40%	133

nivo	**šteta nije prijavljena**	**šteta prijavljena**	**razlika**	**vjerojatnost prijave štete**
0%	152	190		
	133	152	57	$\mathbb{P}(X > 57) = 0.6910$
	133	133		
20%	133	190		
	133	152	76	$\mathbb{P}(X > 76) = 0.5733$
	133	133		
30%	133	190		
	133	152	76	$\mathbb{P}(X > 76) = 0.5733$
	133	133		

(ii) Prijelazna matrica je

$$P = \begin{bmatrix} 0.0691 & 0.9309 & 0 \\ 0.05733 & 0 & 0.94267 \\ 0.05733 & 0 & 0.94267 \end{bmatrix}$$

(iii) Očekivana premija jednaka je $190 \times 0.0691 + 152 \times 0.9309 = 154.6258$.

5.

(i) Neka je X_{ij} iznos j-te pojedinačne štete iz i-tog rizika, $i = 1, 2, \ldots, 30$. Po pretpostavci je $X_{ij} \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma)$, $\mu = 6.5$, $\sigma = 1$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} m_1 &= \mathbb{E}[X_{ij}] = e^{\mu+\sigma^2/2} = e^7 \\ m_2 &= \mathbb{E}[X_{ij}^2] = e^{2(\mu+\sigma^2)} = e^{15} \end{aligned}$$

Neka je nadalje $S_i = \sum_j^{N_i} X_{ij}$ iznos ukupnih šteta u i-tom riziku, $i = 1, 2, \ldots, 30$. Po pretpostavci S_i ima složenu Poissonovu distribuciju s Poissonovim parametrom $\lambda = 0.1$. Zato je $\mathbb{E}[S_i] = \lambda m_1$, $\mathrm{Var}[S_i] = \lambda m_2$. Budući da je $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{30}$, i $S_1, S_2, \ldots, S_{30}$ su po pretpostavci nezavisne, slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= 30\lambda m_1 = 3289.90\\ \mathrm{Var}[S] &= 30\lambda m_2 = 9807052.12\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{ij} > 5000) &= \int_{5000}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(-\mu+\log x)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\, dx\\ &= \int_{\frac{\log 5000-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz\\ &= \mathbb{P}(N(0,1) > \frac{\log 5000 - \mu}{\sigma})\\ &= \mathbb{P}(N(0,1) > 2.017193) \approx 0.0218377\end{aligned}$$

(iii) Po normalnoj aproksimaciji, S je približno $N(\mathbb{E}[S], \sqrt{\mathrm{Var}[S]})$. Slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > 5000) &= \mathbb{P}(\frac{S - 3289.90}{\sqrt{9807052.12}} > \frac{5000 - 3289.90}{\sqrt{9807052.12}})\\ &\approx \mathbb{P}(N(0,1) > 0.546075) \approx 0.292507\end{aligned}$$

(iv) Budući da je složena Poissonova distribucija negativno asimetrična, aproksimacija simetričnom normalnom distribucijom neće biti dobra. Budući da distribucije štete imaju teški rep, normalna aproksimacija podcjenjuje stvarnu vjerojatnost. Bolja aproksimacija dobila bi se pomoću translatirane gama distribucije.

6.

(i) Štete imaju Gama$(2, 1)$ distribuciju, te stoga imaju očekivanje 2 i funkciju izvodnicu momenata

$$M(r) = (1 - r)^{-2}, \quad r < 1\,.$$

Koeficijent prilagodbe $R > 0$ zadovoljava

$$(1-R)^{-2} - 1 - 2(1+\theta)R = 0\,.$$

Stoga imamo

$$1 - (1-R)^2 - 2(1+\theta)R(1-R)^2 = 0\,,$$

te zbog $R > 0$, to se pojednostavljuje na

$$2(1+\theta)R^2 - (3+4\theta)R + 2\theta = 0\,.$$

(ii) Za $\theta = 0.4$ imamo

$$2.8R^2 - 4.6R + 0.8 = 0\,,$$

što ima rješenja 0.1977 i 1.4452.

Samo prvo rješenje je u domeni definicije funkcije izvodnice momenata, tako daje koeficijent prilagodbe jednak $R = 0.198$.

Vjerojatnost krajnje propasti zadovoljava po Lundbergovoj nejednakosti $\psi(50) \le e^{-50R}$, t.j., $\psi(50) \le 5.09 \times 10^{-5}$.

7.

(i) Tablica prirasta isplata šteta nakon prilagodbe za inflaciju:

Prirasti isplata šteta nakon prilagodbe

Godina nastanka štete	**Razvojna godina**				
	0	**1**	**2**	**3**	**4**
1999	1147	1208	790	636	350
2000	1208	1693	1007	700	
2001	1185	1537	1450		
2002	1378	1700			
2003	1550				

(ii) Tablica kumulativnih isplata šteta nakon prilagodbe za inflaciju:

Prirasti isplata šteta nakon prilagodbe

Godina nastanka štete	Razvojna godina 0	1	2	3	4
1999	1147	2355	3145	3781	4131
2000	1208	2901	3908	4608	
2001	1185	2722	4172		
2002	1378	3078			
2003	1550				
		$\frac{11056}{4918}$	$\frac{11225}{7978}$	$\frac{8389}{7053}$	$\frac{4131}{3781}$
		2.248	1.407	1.189	1.093

(iii) Tablica predviđanja kumulativnih isplata po cijenama sredinom 2003.

Predviđanja kumulativnih isplata po cijenama 2003. godine

Godina nastanka štete	Razvojna godina 0	1	2	3	4
2000					5037
2001				4961	5422
2002			4331	5149	5628
2003		3484	4903	5829	6371

Pričuva $= (5037-4608)+(5422-4172)+(5628-3078)+(6371-1550) =$ 9050.