PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

AKTUARSKA MATEMATIKA II

9. 2. 2004.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 80
Broj zadataka: 7
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

1. Osiguratelj motornih vozila radi po sustavu bonusa sa četiri nivoa: 0%, 20%, 40% i 60%. Puna premija je 2000 Kn. Distribucija broja nezgoda za svakog osiguranika je:

$$\mathbb{P}[0 \text{ nezgoda}] = 0.7$$
$$\mathbb{P}[1 \text{ nezgoda}] = 0.2$$
$$\mathbb{P}[2 \text{ nezgode}] = 0.1$$

Pravila kretanja po nivoima popusta su kako slijedi:

(a) Ako nije prijavljena šteta u protekloj godini, osiguranik se pomiče na sljedeći viši nivo popusta (ili ostaje na najvišem nivou).

(b) Ako je prijavljena jedna šteta u godini, osiguranik ostaje na istom nivou popusta u sljedećoj godini.

(c) Ako su prijavljene dvije štete u godini, osiguranik se pomiče na nivo od 0% popusta u sljedećoj godini.

Pretpostavlja se da trošak u slučaju nezgode ima eksponencijalnu distribuciju s očekivanjem 2500.
Prilikom odluke da li će prijaviti štetu u slučaju nezgode, osiguranik razmatra povećanje premije tokom dvije naredne godine uz pretpostavku da više neće imati nezgodu. Na primjer, nakon druge nezgode u godini osiguranik će promatrati razliku u budućim premijama u slučaju prijave jedne ili prijave dviju šteta, uz pretpostavku da je šteta prijavljena nakon prve nezgode, ili razliku u budućim premijama u slučaju ne prijavljivanja štete ili prijave jedne štete, uz pretpostavku da šteta nakon prve nezgode nije prijavljena.

(i) Za svaki nivo popusta, izračunajte vjerojatnost da će osiguranik prijaviti štetu nakon nakon prve nezgode u godini. [5]

(ii) Za svaki nivo popusta, izračunajte vjerojatnost da će osiguranik prijaviti štetu nakon druge nezgode u godini, uz pretpostavku da je prijavljena šteta nakon prve nezgode. [5]

(iii) Osiguranik se početkom godine nalazi na 20% popusta. Nađite vjerojatnosti da će se početkom sljedeće godine naći na 0%, 20%, 40%, odnosno 60% popusta. [6]

[Ukupno 16 bodova]

2. Ukupne štete S neživotnog osigurateljnog portfelja kroz jednu godinu imaju složenu Poissonovu distribuciju:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \, .$$

Broj šteta svake godine, N, ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem 12. Pretpostavlja se da su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable, nezavisne od N, sa sljedećom distribucijom:

$$\begin{aligned} &f(x) = 0.01\, e^{-0.01x} \qquad 0 < x < 200 \\ &\mathbb{P}(X = 200) = e^{-2} \, . \end{aligned}$$

Osiguratelj je sklopio ugovor o reosiguranju pojedinačnog viška štete sa samopridržajem 100. Ukupni godišnji iznos šteta koje isplati reosiguratelj označen je sa S_R.

(i) Pokažite da je $\mathbb{E}[S_R] = 279.05$, $\mathrm{Var}[S_R] = 23330.13$ i $\mathbb{E}[(S_R - \mathbb{E}[S_R])^3] = 2126968.80$.

(Možete iskoristiti činjenicu da je treći moment pojedinačnog iznosa štete koji plaća reosiguratelj jednak 177247.40.) [10]

(ii) Izračunajte odgovarajuće vrijednosti parametara translatirane gama distribucije koja aproksimira distribuciju od S_R. [4]

[Ukupno 14 bodova]

3. U portfelju neživotnog osiguranja, broj šteta u svakom mjesecu ima Poissonovu distribuciju s nepoznatim parametrom λ. Štete se promatraju kroz razdoblje od 50 mjeseci i u prosjeku je opaženo 210 šteta mjesečno.

(i) Na temelju poznavanja sličnih portfelja predloženo je da je apriorna distribucija od λ jednaka gama distribuciji s očekivanjem 250 i varijancom 45. Odredite aposteriornu distribuciju od λ i Bayesovski procjenitelj od λ uz kvadratni gubitak. [5]

(ii) Alternativni prijedlog za procjenu parametra λ je upotreba broja šteta u jednom danu, za koji se pretpostavlja da ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda/30$. Predlaže se sljedeća apriorna distribucija za λ:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda = 230) &= 0.2 \\ \mathbb{P}(\lambda = 250) &= 0.5 \\ \mathbb{P}(\lambda = 270) &= 0.3 \end{aligned}$$

Ako je u posljednjem danu za koji su dostupni podaci zabilježeno sedam šteta, odredite aposteriornu distribuciju od λ, te Bayesovski procjenitelj za λ uz kvadratni gubitak. [5]

(iii) Diskutirajte ukratko razlike između procjenitelja u (i) i (ii), te zaključite koji je bolji. [2]

[Ukupno 12 bodova]

4. Štete se događaju po Poissonovim procesu s Poissonovim parametrom λ. Distribucija iznosa šteta ima očekivanje μ i varijancu σ^2, a dodatak na premiju je θ.

(i) Ukratko navedite na koji način ti parametri utječu na vjerojatnost propasti. [3]

(ii) Navedite Lundbergovu nejednakost. [2]

U portfelju polica osiguranja, prosječni iznos štete je 2000 Kn. Promatramo dvije moguće distribucije iznosa šteta. To su:

I fiksni iznos šteta od 2000 Kn

II eksponencijalna distribucija.

Koeficijenti prilagodbe označeni su sa R_I i R_{II}.

(iii) Izvedite jednadžbe za koeficijent prilagodbe za svaki od gornjih slučajeva, I i II. [4]

(iv) Koji od koeficijenata prilagodbe je veći? Obrazložite odgovor! [1]

(v) Pokažite da je koeficijent prilagodbe rastuća funkcija od θ u oba slučaja. [2]

[Ukupno 12 bodova]

5. Donja tablica pokazuje statistike ukupnih godišnjih šteta za 3 rizika kroz 4 godine. Godišnje ukupne štete za rizik i u godini j označene su s X_{ij}.

Rizik i	$\bar{X}_i = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} X_{ij}$	$s_i^2 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$
1	2 517	4 121 280
2	7 814	7 299 175
3	2 920	3 814 001

(i) Izračunajte vrijednost faktora povjerenja u empirijskom Bayesovom modelu 1. [4]

(ii) Opišite kako podaci utječu na vrijednost faktora povjeranja. Ilustrirajte Vaš odgovor brojevima izračunatim u (i). [4]

[Ukupno 8 bodova]

6. Donje tablice pokazuju kumulativne iznose nastalih šteta i broj šteta prijavljen svake godine za izvjesnu grupu polica osiguranja. Pretpostavlja se da su štete u potpunosti riješene do kraja razvojne godine 2.

Kumulativni iznosi nastalih šteta

		RG 0	RG 1	RG 2
GNŠ	0	288	634	893
GNŠ	1	465	980	
GNŠ	2	773		

Broj prijavljenih šteta svake godine

		RG 0	RG 1	RG 2
GNŠ	0	110	85	55
GNŠ	1	167	113	
GNŠ	2	285		

Ako je ukupni isplaćeni iznos do danas, s obzirom na godine nastanka štete 0, 1 i 2, bio 2750, izračunajte potrebnu pričuvu upotrebom metode prosječnog troška po šteti. [Ukupno 12 bodova]

7. U okviru generaliziranog linearnog modela promatrajte eksponencijalnu distribuciju s funkcijom gustoće $f(x)$ gdje je

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad (x > 0)\,.$$

(i) Pokažite da se $f(x)$ može napisati u obliku eksponencijalne familije distribucija. [2]

(ii) Pokažite da je kanonski parametar, θ, dan s $\theta = -\frac{1}{\mu}$. [1]

(iii) Odredite funkciju varijance i parametar skaliranja. [3]

[Ukupno 6 bodova]

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

AKTUARSKA MATEMATIKA II

9. 2. 2004.

Rješenja

1. Neka X označava trošak u slučaju nezgode. Tada je $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$i $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = 2500$ otkud $\lambda = 1/2500$. Zato je $\mathbb{P}(X > x) = e^{-x/2500}$. Nadalje, premije na pojedinim nivoima su:

0%	2000 Kn
20%	1600 Kn
40%	1200 Kn
60%	800 Kn

(i)

nivo	šteta nije prijavljena	šteta prijavljena	razlika	vjerojatnost prijave štete
0%	1600	2000		
	1200	1600	800	$\mathbb{P}(X > 800) = e^{-800/2500} = 0.726$
20%	1600	1200		
	1200	800	800	$\mathbb{P}(X > 800) = e^{-800/2500} = 0.726$
40%	1200	800		
	800	800	400	$\mathbb{P}(X > 400) = e^{-400/2500} = 0.852$
0%	8000	800		
	800	800	0	$\mathbb{P}(X > 0) = 1$

(ii)

nivo	2. šteta nije prijavljena	2. šteta prijavljena	razlika	vjerojatnost prijave druge štete
0%	2000	2000		
	1600	1600	0	$\mathbb{P}(X > 0) = 1$
20%	1600	2000		
	1200	1600	800	$\mathbb{P}(X > 800) = e^{-800/2500} = 0.726$
40%	1200	2000		
	800	1600	1600	$\mathbb{P}(X > 1600) = e^{-1600/2500} = 0.527$
0%	800	2000		
	800	1600	2000	$\mathbb{P}(X > 2000) = e^{-2000/2500} = 0.449$

(iii) Računamo:

$$\mathbb{P}[20\% \to 60\%] \quad = \quad 0$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[20\% \to 0\%] &= \mathbb{P}[\text{prijavljene dvije štete}] \\
&= \mathbb{P}[\text{2 nezgode}]\mathbb{P}[\text{šteta prijavljena nakon 1. nezgode} \,|\, \text{dvije nezgode}] \\
&\quad \mathbb{P}[\text{šteta prijavljena nakon 2. nezgode} \,|\, \text{dvije nezgode i} \\
&\qquad \text{šteta prijavljena nakon 1. nezgode}] \\
&= 0.1 \times 0.726 \times 0.726 \\
&= 0.0527
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[20\% \to 40\%] &= \mathbb{P}[\text{0 prijava štete}] \\
&= \mathbb{P}[\text{0 nezgoda}] + \mathbb{P}[\text{1 nezgoda}]\mathbb{P}[\text{šteta nije prijavljena } \,|\, \text{nezgoda}] \\
&+ \mathbb{P}[\text{dvije nezgode}]\mathbb{P}[\text{niti jedna šteta nije prijavljena} \,|\, \text{dvije nezgode}] \\
&= 0.7 + 0.2 \times (1 - 0.726) + 0.1 \times (1 - 0.726)^2 \\
&= 0.7623
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[20\% \to 20\%] &= \mathbb{P}[\text{prijavljena jedna šteta}] \\
&= \mathbb{P}[\text{jedna nezgoda}]\mathbb{P}[\text{šteta prijavljena} \,|\, \text{nezgoda}] \\
&+ \mathbb{P}[\text{2 nezgode}]\mathbb{P}[\text{šteta nije prijavljena nakon 1. nezgode} \,|\, \text{nezgoda}] \\
&\quad \mathbb{P}[\text{šteta prijavljena nakon 2. nezgode} \,|\, \text{ nezgoda}] \\
&+ \mathbb{P}[\text{2 nezgode}]\mathbb{P}[\text{šteta prijavljena nakon 1. nezgode} \,|\, \text{nezgoda}] \\
&\quad \mathbb{P}[\text{šteta nije prijavljena nakon 2. nezgode} \,|\, \text{ nezgoda} \\
&\qquad \text{i šteta prijavljena nakon 1. nezgode}] \\
&= 0.2 \times 0.726 + 0.1 \times (1 - 0.726) \times 0.726 + 0.1 \times 0.726 \times (1 - 0.726) \\
&= 0.1850
\end{aligned}
$$

ili jednostavnije $\mathbb{P}[20\% \to 20\%] = 1 - 0.0527 - 0.7623 = 0.1850$.

2.

(i) Pojedinačna šteta koju isplaćuje reosiguratelj je

$$
X_R = \begin{cases} 0 & X < 100 \\ X - 100 & X \geq 100 \end{cases}
$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_R] &= \int_{100}^{200} (x-100)0.01e^{-0.01x}\,dx + 100e^{-2} \\
&= \int_{100}^{200} 0.01xe^{-0.01x}\,dx - \int_{100}^{200} 0.01e^{-0.01x}\,dx + 100e^{-2} \\
&= -xe^{-0.01x}\Big|_{100}^{200} + \int_{100}^{200} 0.01e^{-0.01x}\,dx - \int_{100}^{200} 0.01e^{-0.01x}\,dx + 100e^{-2} \\
&= -200e^{-2} + 100e^{-1} + 100e^{-2} \\
&= 100(e^{-1} - e^{-2}) \\
&= 23.2544
\end{aligned}$$

Zato je $\mathbb{E}[S_R] = 12\mathbb{E}[X_R] = 279.05$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_R^2] &= \int_{100}^{200} (x-100)^2 0.01e^{-0.01x}\,dx + 100^2e^{-2} \\
&= \int_{100}^{200} 0.01x^2e^{-0.01x}\,dx - 2\int_{100}^{200} xe^{-0.01x}\,dx + 100\int_{100}^{200} e^{-0.01x} + 100^2e^{-2} \\
&= -x^2e^{-0.01x}\Big|_{100}^{200} + \int_{100}^{200} 2xe^{-0.01x}\,dx - 2\int_{100}^{200} xe^{-0.01x}\,dx \\
&\qquad -100^2e^{-0.01x}\Big|_{100}^{200} + 100^2e^{-2} \\
&= 10000e^{-1} - 40000e^{-2} + 10000e^{-1} - 10000e^{-2} + 10000e^{-2} \\
&= 20000(e^{-1} - 2e^{-2}) \\
&= 1944.177
\end{aligned}$$

Slijedi da je $\mathrm{Var}[S_R] = 12\mathbb{E}[X_R^2] = 23330.13$.

Nadalje, $\mathbb{E}[(S_R - \mathbb{E}[S_R])^3] = 12\mathbb{E}[X_R^3] = 12 \times 177247.40 = 2126968.80$.

(ii) Označimo translatiranu gama varijablu s $Y = X + c$ gdje je $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{\alpha}{\beta} + c \\
\mathrm{Var}[Y] &= \frac{\alpha}{\beta^2} \\
\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^3] &= \frac{2\alpha}{\beta^3}
\end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}
279.05 &= \frac{\alpha}{\beta} + c \\
23330.13 &= \frac{\alpha}{\beta^2} \\
2126968.80 &= \frac{2\alpha}{\beta^3}
\end{aligned}$$

Iz druge i treće jednadžbe prvo slijedi $\beta = 0.021937$, a zatim $\alpha = 11.2277$. Na kraju iz prve jednadžbe dobivamo $c = -232.76$.

3.

(i) Apriorna distribucija je $\Gamma(\alpha, \beta)$ distribucija s gustoćom

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \quad \lambda > 0\,.$$

Očekivanje $\Gamma(\alpha, \beta)$ distribucije je α/β, a varijanca α/β^2. Slijedi:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 250\,, \quad \frac{\alpha}{\beta^2} = 45\,.$$

Rješavanjem dobivamo $\beta = 50/9 = 5.5556$ i $\alpha = (50/9)250 = 1388.89$. Nadalje:

$$\begin{aligned}
f(\lambda \,|\, N) &\propto \mathbb{P}(N \,|\, \lambda) f(\lambda) \\
&\propto \lambda^{10500} e^{-50\lambda} \lambda^{1387.89} e^{-5.5556\lambda} \\
&= \lambda^{11887.89} e^{-55.5556\lambda}
\end{aligned}$$

Dakle, $\lambda \,|\, N \sim \Gamma(11888.89, 55.5556)$. Bayesovski procjenitelj (uz kvadratni gubitak) je očekivanje aposteriorne distribucije

$$\mathbb{E}[\lambda \,|\, N] = \frac{11888.89}{55.5556} = 214$$

(ii) Po definiciji uvjetne vjerojatnosti imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lambda = 230 \,|\, N = 7) &\propto \mathbb{P}(N = 7 \,|\, \lambda = 230)\mathbb{P}(\lambda = 230) \\
&\propto \left(\frac{230}{30}\right)^7 e^{-230/30}\, 0.2 = 145.776 \\
\mathbb{P}(\lambda = 250 \,|\, N = 7) &\propto \mathbb{P}(N = 7 \,|\, \lambda = 250)\mathbb{P}(\lambda = 250) \\
&\propto \left(\frac{250}{30}\right)^7 e^{-250/30}\, 0.5 = 335.414 \\
\mathbb{P}(\lambda = 270 \,|\, N = 7) &\propto \mathbb{P}(N = 7 \,|\, \lambda = 270)\mathbb{P}(\lambda = 270) \\
&\propto \left(\frac{270}{30}\right)^7 e^{-270/30}\, 0.3 = 177.080
\end{aligned}$$

Zbroj desnih strana je $145.776 + 335.414 + 177.090 = 658.270$. Slijedi da je aposteriorna distribucija od λ jednaka

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lambda = 230 \,|\, N = 7) &= 0.221 \\
\mathbb{P}(\lambda = 250 \,|\, N = 7) &= 0.510 \\
\mathbb{P}(\lambda = 270 \,|\, N = 7) &= 0.269\,,
\end{aligned}$$

a procjenitelj od λ je $\mathbb{E}[\lambda \,|\, N] = 230 \times 0.221 + 250 \times 0.510 + 270 \times 0.269 = 250.96$.

(iii) U prvom slučaju apriorna distribucija je neprekidna što je bolje za modeliranje. U prvom slučaju je očekivanje apriorne distribucije 250, u drugom 252, što je približno isto. U (i) se koristi više podataka nego u (ii), te stoga odabir apriorne distribucije ima manji utjecaj i procjene su pouzdanije. Stoga je procjenitelj u (i) bolji.

4.

(i) Utjecaj parametara na vjerojatnost propasti:

λ	nema utjecaja
μ	povećanje od μ povećava vjerojatnost propasti
σ^2	povećanje od σ^2 povećava vjerojatnost propasti
θ	povećanje od θ smanjuje vjerojatnost propasti

(ii) Lundbergova nejednakost: $\psi(U) \leq \exp\{-RU\}$ gdje je $\psi(U)$ vjerojatnost propasti, U početni kapital, a R koeficijent prilagodbe.

(iii) Koeficijent prilagodbe R definiran je jednadžbom:

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r) \quad (r \geq 0),$$

odnosno uz $c = (1+\theta)\lambda\mu$,

$$1 + (1+\theta)\mu r = M_X(r)\,.$$

U slučajevma I i II, $M_X(r)$ je

I $M_X(r) = e^{2000r}$,

II $M_X(r) = \frac{1}{1-2000r}$, $r < \frac{1}{2000}$.

Tražene jednadžbe za koeficijent prilagodbe su:

I $1 + 2000(1+\theta)r = e^{2000r}$,

II $1 + 2000(1+\theta)r = \frac{1}{1-2000r}$, odnosno $r = \frac{\theta}{2000(1+\theta)}$.

(iv) Vrijednost od R u slučaju eksponencijalno distribuiranih šteta R_{II} je manja od vrijednosti od R kada sve štete iznose 2000 (R_I). Obje distribucije iznosa šteta imaju očekivanje 2000, ali eksponencijalna distribucija ima veću varijabilnost. Veća varijabilnost se povezuje s većim rizikom, te se stoga očekuje veća vrijednost od $\psi(U)$ za eksponencijalnu distribuciju, te manja vrijednost od R.

(v) Koeficijent prilagodbe jednak je rješenju jednadžbe

$$1 + (1+\theta)\mu r = M_X(r)\,,$$

Geometrijeski, radi se o presjeku pravca $r \to 1 + (1+\theta)\mu r$ i grafa funkcije $r \to M_X(r)$. Kada θ raste, raste i nagib pravca, pa stoga i apscisa presjecišta.

5.

(i) Broj rizika je $N = 3$. Faktor povjerenja dan je formulom

$$Z = \frac{n}{n + \mathbb{E}[s^2(\theta)]/\mathrm{Var}[m(\theta)]}\,.$$

Ovdje je $n = 4$, a procjenitelji za $\mathbb{E}[s^2(\theta)]$ i $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ dani su sa:

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2 = \frac{1}{3}(4\,121\,280+7\,299\,175+3\,814\,001) = 5\,078\,152\,,$$

odnosno sa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\bar{X}_i-\bar{X})^2 - \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2 \\ = \; & \frac{1}{2}\big((2517-4417)^2+(7814-4417)^2+(2920-4417)^2\big) - \frac{1}{4}5\,078\,152 \\ = \; & \frac{1}{2}17\,390\,618 - \\ = \; & 9\,852\,385.67 - 1\,269\,538 = 7\,425\,771 \end{aligned}$$

gdje je korišteno

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\bar{X}_3}{3} = 4\,417\,.$$

Slijedi:

$$Z = \frac{4}{4+\frac{5078152}{7425771}} = 0.854$$

(ii) Faktor povjerenja Z ovisi o n, $\mathbb{E}[s^2(\theta)]$ i $\mathrm{Var}[m(\theta)]$. $\mathbb{E}[s^2(\theta)]$ mjeri varijabilnost podatka unutar rizika, dok $\mathrm{Var}[m(\theta)]$ mjeri varijabilnost podataka među rizicima. Može se vidjeti da je varijabilnost među rizicima relativno velika (Rizik 2 ima znatno veću srednju vrijednost šteta), što znači da veću težinu treba dati pojedinačnim rizicima (Z je blizu 1). Kada bi n bio veći, Z bi također bio veći, jer bi o svakom pojedinačnom riziku imali viqv se informacija.

6. Za projiciranje se može se koristiti bilo metoda bruto faktora, bilo razvojnih faktora.

Kumulativni broj prijavljenih šteta

		RG		
		0	1	2
	0	110	195	250
GNŠ	1	167	280	
	2	285		

Prosječni iznosi šteta i projekcije

		RG			
		0	1	2	krajnje
	1	2.618	3.251	3.572	**3.572**
		73.29%	**91.01%**	**100%**	
GNŠ	2	2.784	3.500		**3.846**
		72.39%	**91.01%**		
	3	2.712			**3.724**
		72.84%			

Brojevi šteta i projekcije

		RG			
		0	1	2	krajnje
	1	110	195	250	**250**
		44.00%	**78.00%**	**100%**	
GNŠ	2	167	280		**359**
		46.52%	**78.00%**		
	3	285			**630**
		45.26%			

Projicirane ukupne štete:

3.572×250	$=$	893
3.846×359	$=$	1381
3.723×630	$=$	2345
Ukupno		4619
manje plaćene štete		-2750
pričuva		**1869**

7.

(i)

$$f(x) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}} = \exp\left(-\frac{x}{\mu} - \log\mu\right) = \exp\left(\frac{x\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(x,\phi)\right)$$

gdje je $\theta = -\frac{1}{\mu}$, $b(\theta) = \log(-\frac{1}{\theta}) = -\log(-\theta)$, $a(\phi) = 1$ i $c(x,\phi) = 0$.

(ii) Kanonski parametar je $\theta = -\frac{1}{\mu}$.

(iii) Funkcija varijance je $V(\mu) = b''(\theta)$. Zbog $b(\theta) = -\log(-\theta)$, slijedi $b''(\theta) = \frac{1}{\theta^2} = \mu^2$. Dakle, $V(\mu) = \mu^2$. Parametar skaliranja jednak je 1.