Aktuarska matematika II

Zadaci

POGLAVLJE 1

1. Kompanija razmatra uvođenje nove klase osiguranja. Svi rizici biti će na jednom od četiri moguća nivoa intenziteta, I_1, I_2, I_3 i I_4. Kompanija treba odlučiti na kojem nivou odrediti premije koje će privući različite količine posla kako slijedi:

Godišnja premija	*£85*	*£81*	*£79*
Broj polica (u tisućama)	100	150	200

Godišnji fiksni troškovi kompanije su £1.5 milijuna plus godišnji troškovi po polici od £18. Za svaki nivo intenziteta, kompanija očekuje isplatiti srednju štetu po polici u iznosu od:

Nivo intenziteta	I_1	I_2	I_3	I_4
Srednji trošak	40	45	57	60

(i) Odredite minimax rješenje temeljeno na godišnjem profitu.

(ii) Dana je vjerojatnosna distribucija $p(I_1) = 0.1$, $p(I_2) = 0.4$, $p(I_3) = 0.3$, $p(I_4) = 0.2$. Odredite rješenje po Bayesovskom kriteriju temeljeno na godišnjem profitu.

Rješenje:

(i)

d_1	100 polica godišnja premija £85
d_2	150 polica godišnja premija £81
d_3	200 polica godišnja premija £79

θ_1	Štete intenziteta I_1 stoje godišnje £40 po polici
θ_2	Štete intenziteta I_2 stoje godišnje £45 po polici
θ_3	Štete intenziteta I_3 stoje godišnje £57 po polici
θ_4	Štete intenziteta I_4 stoje godišnje £60 po polici

Brojke u tisućama £

Strategija	d_1	d_2	d_3
Ukupne premije	8 500	12 150	15 800
Fiksni troškovi	1 500	1 500	1 500
Troškovi po polici	1 800	2 700	3 600
Premije manje troškovi	5 200	7 950	$10q, 700$

Zato je godišnji profit (u tisućama £):

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
d_1	1 200	700	−500	−800
d_2	1 950	1 200	−600	−1 050
d_3	2 700	1 700	−700	−1 300

Minimax = minimizirati maksimalni gubitak

d_1 −800 $\leftarrow$ izaberi d_1, odredi premije po £85 godišnje
d_2 −1 050
d_3 −1 300

(ii) Bayesovski kriterij

$$\begin{aligned}
d_1 &= 0.1 \times 1\,200 + 0.4 \times 700 - 0.3 \times 500 - 0.2 \times 800 = 90 \\
d_2 &= 0.1 \times 1\,950 + 0.4 \times 1\,200 - 0.3 \times 600 - 0.2 \times 1\,050 = 285 \\
d_3 &= 0.1 \times 2\,700 + 0.4 \times 1\,700 - 0.3 \times 700 - 0.2 \times 1\,300 = 480
\end{aligned}$$

Izabrati d_3, premije po £79 godišnje.

2. Funkcija gubitka u problemu odlučivanja dana je sa:

	θ_1	θ_1	θ_3
d_1	14	12	13
d_2	13	15	14
d_3	11	15	5

(i) Odredite minimax rješenje tog problema.

(ii) Uz danu vjerojatnosnu distribuciju $\mathbb{P}(\theta_1) = 0.25$, $\mathbb{P}(\theta_2) = 0.25$, $\mathbb{P}(\theta_3) = 0.5$, nađite rješenje po Bayesovom kriteriju.

Rješenje:

	25%	25%	50%		
	θ_1	θ_2	θ_3	max	Očekivani gubitak
d_1	14	12	13	**14**	13
d_2	13	15	14	15	14
d_3	11	15	5	15	**9**

(i) Minimax rješenje je d_1.

(ii) Rješenje po Bayesovom kriteriju je d_3.

POGLAVLJE 2

1. Osiguravajuće društvo prati duljinu vremena potrebnog osoblju da podigne telefonsku slušalicu nakon što telefon prvi put zazvoni. Pretpostavlja se da to vrijeme slijedi eksponencijalnu distribuciju s parametrom θ.

   Prati se slučajno odabranih 10 poziva i izračunato je srednje vrijeme odgovora od 3.672 sekunde.

   (i) (a) Pokažite da je gama distribucija konjugirana apriorna distribucija za θ.

   (b) Pretpostavite da apriorna distribucija od θ ima očekivanje 0.315 i standardnu devijaciju 0.251. Izvedite aposteriornu distribuciju od θ i izračunajte Bayesovski procjenitelj od θ uz kvadratni gubitak.

   (ii) Prati se daljnjih 70 poziva koji imaju isto srednje vrijeme odgovora od 3.672 sekunde. Izračunajte Bayesovski procjenitelj od θ uz kvadratni gubitak koristeći sve skupljene podatke.

   (iii) Komentirajte Vaše odgovore na (i) i (ii).

   Rješenje:

   (i) (a) Funkcija vjerodostojnosti

$$
\begin{aligned}
f(\underline{x} \,|\, \theta) &\propto \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} \\
&\propto \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}
\end{aligned}
$$

   Kao funkcija od θ, to je u obliku gama distribucije. Stoga je konjugirana apriorna distribucija

$$
f(\theta) = \frac{\lambda^{\alpha} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta}}{\Gamma(\theta)}
$$

(b) Tražimo vrijednosti parametara α i λ:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\theta) &: \quad \alpha/\lambda = 0.315 \\
\mathrm{Var}(\theta) &: \quad \alpha/\lambda^2 = 0.251^2 \\
\lambda &= 0.315/0.251^2 = 5.000 \\
\alpha &= 0.315\lambda = 1.575 \\
\text{aposteriorna} &= \text{apriorna} \times \text{vjerodostojnost} \\
&\propto \lambda^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta} \cdot \theta^n e^{-\theta \sum x_i} \\
&\propto \theta^{n+\alpha-1} e^{-\theta(\lambda + \sum x_i)}
\end{aligned}$$

Zato je aposteriorna

$$\begin{aligned}
&= \Gamma(n+\alpha, \lambda + \sum x_i) \\
&= \Gamma(11.575, 41.720)
\end{aligned}$$

Procjenitelj uz kvadratni gubitak = očekivanje aposteriorne

$$= 11.575/41.720 = 0.27744$$

(ii) Zato je aposteriorna

$$\begin{aligned}
&= \Gamma(n+\alpha, \lambda + \sum x_i) \\
&= \Gamma(81.575, 298.760)
\end{aligned}$$

Procjenitelj uz kvadratni gubitak = očekivanje aposteriorne

$$= 81.575/298.760 = 0.27305$$

(iii) Očekivanje apriorne distribucije je 0.315.
Procjena maksimalne vjerodostojnosti od θ je $1/3.672 = 0.272$. Što je više podataka sakupljeno, Bayesovska procjena približava se procjeni maksimalne vjerodostojnosti.

2. Brojevi šteta po mjesecima su nezavisne Poissonove slučajne varijable s očekivanjem λ, a apriorna distribucija od λ je eksponencijalna s očekivanjem 0.2.

(i) Odredite aposteriornu distribuciju od λ uz dane opažene vrijednosti $x_1, \ldots, x_n$ brojeva šteta u svakom od n mjeseci.

(ii) Odredite Bayesovsku procjenu od λ

(a) uz kvadratni gubitak

(b) uz gubitak "sve ili ništa"

(iii) Ako je $n = 5$ i $\sum_1^5 x_i = 1$, izračunajte (do na dvije značajne znamenke) Bayesovsku procjenu od λ uz apsolutni gubitak.

Rješenje:

(i)

$$\begin{aligned} & f(\underline{x} \,|\, \lambda) \propto e^{-n\lambda} \lambda^{\sum x_i} \\ & f(\lambda) \propto e^{-5\lambda} \\ \text{tako da je} \quad & f(\lambda \,|\, \underline{x}) \propto \lambda^{\sum_1^n x_i} e^{-(n+5)\lambda} \\ \text{i} \quad & \lambda \,|\, \underline{x} \sim \Gamma\Big(\sum_1^n x_i + 1, n+5\Big) \end{aligned}$$

(ii) (a) Uz kvadratni gubitak, Bayesovski procjenitelj aposteriornog očekivanja je

$$\mathbb{E}(\lambda \,|\, \underline{x}) = \frac{\sum_1^n x_i + 1}{n+5}$$

(b) Uz gubitak sve ili ništa, Bayesovski procjenitelj je aposteriorni mod.

$$f(\lambda \,|\, \underline{x}) \propto \lambda^{\sum x_i} e^{-(n+5)\lambda}$$

Ako je $\sum x_i = 0$, tada je mod u $\lambda = 0$. Inače, aposteriorna gustoća ima maksimum kada vrijedi

$$\Big(\sum x_i\Big) \lambda^{\sum x_i - 1} e^{-(n+5)\lambda} = (n+5) \lambda^{\sum x_i} e^{-(n+5)\lambda},$$

t.j.,

$$\lambda = \frac{\sum x_i}{n+5}$$

(iii) Uz apsolutnu grešku, Bayesovska procjena je aposteriorni medijan

$$n = 5, \sum x_i = 1, \quad \text{tako da je} \quad \lambda \,|\, \underline{x} \sim \Gamma(2, 10)$$

Medijan je dan s g, gdje je

$$
\begin{aligned}
&\int_g^\infty 10^2 \lambda e^{-10\lambda}\, d\lambda = 1/2 \\
&[-10\lambda e^{-10\lambda}]_g^\infty + \int_g^\infty 10 e^{-10\lambda}\, d\lambda = 1/2 \\
&(10g+1)e^{-10g} = 1/2 \\
&2(10g+1) = e^{10g}
\end{aligned}
$$

Grafički i pogađanjem, do na dvije značajne znamenke, $g = 0.17$.

POGLAVLJE 3

1. Zadnjih deset šteta u određenoj klasi police osiguranja bilo je

1 330	201	111	2 268	617
309	35	4 685	442	843

(i) Uz pretpostavku da štete dolaze iz lognormalne distribucije s parametrima μ i σ, izvedite formulu za procjenu maksimalne vjerodostojnosti tih parametara, te procijenite parametre na temelju opaženih podataka.

(ii) Uz pretpostavku da štete dolaze iz Pareto distribucije s parametrima α i λ, procijenite te parametre upotrebom metode momenata.

(iii) Uz pretpostavku da štete dolaze iz Weibullove distribucije s parametrima c i γ, procijenite te parametre upotrebom metode percentila (temeljeno na 25-tom i 75-tom percentilu).

(iv) Ako osiguravajuće društvo sklopi ugovor o reosiguranju s pojedinačnim reosiguranjem viška štete sa samopridržajem 3 000, procijenite postotak šteta koje će uključiti reosiguratelja za svaki od tri gornja modela.

Rješenje:

(i) Funkcija vjerodostojnosti je:

$$L(\mu, \sigma^2) = \frac{\prod_{i=1}^{10} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}}{x_i\sqrt{2\pi\sigma^2}},$$

a l = log-vjerodostojnost je:

$$l(\mu, \sigma^2) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - 10\ln\sigma - 10\ln\sqrt{2\pi} - \sum_{i=1}^{10}\ln x_i\,.$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right) \\
\frac{\partial l}{\partial \sigma} &= \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{\ln x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \frac{10}{\sigma}
\end{aligned}$$

Izjednačavanje s nulom daje:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{\ln x_i-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)=0 \Longrightarrow \hat{\mu}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\ln x_i$$

i

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\hat{\sigma}}\right)^2=10 \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{\ln x_i^2-2\hat{\mu}\ln x_i+\hat{\mu}^2}{10}\right)\\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{10}\ln x_i^2-10\hat{\mu}^2}{10}-\hat{\mu}^2\end{aligned}$$

Iz podatka imamo $\sum_{i=1}^{10}\ln x_i=61.9695$ i $\sum_{i=1}^{10}\ln x_i^2=403.1326$, pa je $\hat{\mu}=6.197$ i $\hat{\sigma}^2=1.911$, t.j., $\hat{\sigma}=1.382$.

(ii) Po Paretovoj distribuciji imamo

$$E(X)=\frac{\lambda}{\alpha-1} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

Izjednačavanje s uzoračkim momentima koji su

$$\text{Očekivanje}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=1094.1$$

i

$$\text{Varijanca}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2}{10}-1094.1^2=\frac{30\,761\,697}{10}-1094.1^2=1\,879\,113\,,$$

daje

$$\frac{1\,879\,113}{1094.1}=\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}-2}$$

otkud

$$\hat{\alpha}=5.51013 \quad \text{i} \quad \hat{\lambda}=4934.5$$

(iii) 25-ti percentil je $1/2 \times (111 + 201) = 156$, a 75-ti percentil je $1/2 \times (843 + 1330) = 1086.5$.

Trebamo riješiti:

$$1 - \exp(-c \times 156^{\gamma}) = 0.25 \quad \text{i} \quad 1 - \exp(-c \times 1086.5^{\gamma}) = 0.75$$

Pojednostavimo i logaritmiramo, te riješimo jednadžbe. Slijedi

$$\hat{\gamma} = 0.81022 \quad \text{i} \quad \hat{c} = 0.00481\,.$$

(iv) $\mathbb{P}(X > 3000) = 1 - F(3000)$

$$\begin{aligned}
\text{lognormalna:} \quad &= \quad 1 - \Phi(\left(\frac{\ln 3000 - 6.197}{1.382}\right) = 1 - \Phi(1.309) = 0.09527 \\
\text{Paretova:} \quad &= \quad \left(\frac{4934.5}{4934.5 + 3000}\right)^{5.51013} = 0.073011 \\
\text{Weibullova:} \quad &= \quad \exp\{-0.00481 \times 3000^{0.81022}\} = 0.047542
\end{aligned}$$

2. Distribucija od X, koja predstavlja iznos šteta iz portfelja neživotnog osiguranja, ima Pareto distribuciju s očekivanjem £350 i standardnom devijacijom £452.

   Ako osiguratelj sklopi ugovor o reosiguranju viška štete sa samopridržajem £1200, izračunajte vjerojatnost da će šteta uključiti i reosiguratelja.

   Rješenje:

   Ako je funkcija gustoće $f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(x+\lambda)^{\alpha+1}}$, $x > 0$, tada

$$\frac{\lambda}{\alpha - 1} = 350 \qquad \frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2}\,\frac{\alpha}{\alpha - 2} = 452^2$$

   te je

$$\frac{\alpha}{\alpha - 2} = \frac{452^2}{350^2} = 1.6678$$

   i

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2 \times 1.6678}{0.6678} = 4.995 \\
\lambda &= 350 \times 3.995 = 1398.2
\end{aligned}$$

   Slijedi

$$\mathbb{P}(X > 1200) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1200}\right)^{\alpha} = 0.0453$$

3. (i) Slučajna varijabla X ima lognormalnu distribuciju s funkcijom gustoće $f(x)$ i parametrima μ i σ. Pokažite da za $a > 0$

$$\int_a^\infty x f(x)\, dx = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{\log a - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)\right)$$

gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne razdiobe.

(ii) Štete u određenoj klasi osiguranja slijede lognormalnu distribuciju s očekivanjem 9.070 i standardnom devijacijom 10.132 (brojke u tisućama £). U svakoj godini se očekuje da će na 20% polica doći do štete.

Osiguravajuće društvo ima 200 polica u svojim knjigama i želi sklopiti ugovor o reosiguranju pojedinačnog viška štete za pokriće svih polica u portfelju. Reosiguratelj je naveo premije za dvije razine reosiguranja (brojke u tisućama £):

Samopridržaj	*Premija*
25	48.5
30	38.2

(a) Izračunajte vjerojatnost, za oba ugovora o reosiguranju, da će šteta uključivati reosiguratelja.

(b) Ispitujući prosječni iznos svake štete prepuštene reosiguratelju, izračunajte koji samopridržaj daje najbolju vrijednost za uloženi novac (ignorirajući osigurateljev odnos prema riziku).

(c) Osiguratelj pretpostavlja da će sljedeće godine inflacija podići očekivanje i standardnu devijaciju šteta za 8%. Ako reosiguratelj naplaćuje iste premije kao i prije, koji samopridržaj će dati najbolju vrijednost za uloženi novac sljedeće godine?

Rješenje:

(i)

$$
\begin{aligned}
\int_a^\infty x f(x)\, dx &= \int_{\log a}^\infty e^y f(e^y) e^y\, dy \\
&= \int_{\log a}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(y^2-2y\mu+\mu^2-2y\sigma^2)}{2\sigma^2}}\, dy \\
&= e^{\mu+1/2\sigma^2} \int_{\log a}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{-(y-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\, dy \\
&= e^{\mu+1/2\sigma^2} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{\log a - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

(a) Tražimo vrijednosti od σ i μ

$$
\begin{aligned}
\exp(\mu + \sigma^2/2) &= 9.070 \\
\exp 2(\mu + \sigma^2/2)(\exp \sigma^2 - 1) &= 10.132^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow \quad \exp \sigma^2 = 1 + \frac{10.132^2}{9.070^2} = 2.248 \\
&\rightarrow \quad \sigma^2 = 0.80999 \quad \sigma = 0.90 \text{ i } \mu = 1.80
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 25) &= 1 - \Phi\left(\frac{\log 25 - 1.80}{0.90} \right) \\
&= 1 - \Phi(1.577) \\
&= 1 - 0.9426 \\
&= 0.0574 \\
\mathbb{P}(X > 30) &= 1 - \Phi\left(\frac{\log 30 - 1.80}{0.90} \right) \\
&= 1 - \Phi(1.779) \\
&= 1 - 0.9624 \\
&= 0.0376
\end{aligned}
$$

(b) Očekivani iznos prepušten reosiguratelju:

$$
\begin{aligned}
&\int_M^\infty x f(x)\, dx - M\mathbb{P}(X \geq M) \\
=\ & 9.070 \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{\log M - 1.80 - 0.90^2}{0.90} \right) \right\} - M\mathbb{P}(X \geq M)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &= 9.070\{1-\Phi(0.677)\} - 25\{1-\Phi(1.576)\} \\
&= 9.070(1-0.7507) - 25 \times 0.0574 \\
&= 0.82524\,, \text{t.j. } \pounds 825.24 \\
(2) \quad &= 9.070\{1-\Phi(0.879)\} - 30\{1-\Phi(1.779)\} \\
&= 9.070(1-0.8103) - 30 \times 0.0376 \\
&= 0.59258\,, \text{t.j. } \pounds 592.58
\end{aligned}$$

Očekivani broj šteta = 200 × 20% = 40 šteta.

	Polica reosiguranja	*Iznos prepušten reosiguratelju*	*Plaćena premija*	*Redukcija profita osiguratelja*
(1)	40 × 825.24	= £33 010	£48 500	£15 490
(2)	40 × 592.58	= £23 703	£38 200	£14 497 ←

Izabrati policu (2) za najbolju vrijednost za uloženi novac.

(c)

$$\begin{aligned}
\text{Očekivanje } &= 9.796 \\
\text{Standardna devijacija } &= 10.943
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma &= 0.900 \text{ kao i prije} \\
\mu &= 1.877
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &= 9.796\{1-\Phi(0.591)\} - 25\{1-\Phi(1.491)\} \\
&= 9.796(1-0.7227) - 25 \times (1-0.9320) \\
&= 1.01643\,, \text{t.j. } \pounds 1\,016.43 \\
(2) \quad &= 9.796\{1-\Phi(0.794)\} - 30\{1-\Phi(1.694)\} \\
&= 9.796(1-0.7864) - 30 \times (1-0.9549) \\
&= 0.73943\,, \text{t.j. } \pounds 739.43
\end{aligned}$$

Zato

	Prepušten iznos	*Plaćena premija*	*Redukcija profita*
(1)	£40 657	£48 500	£7 843 ←
(2)	£29 577	£38 200	£8 623

Izabrati policu (1) za najbolju vrijednost za uloženi novac.

4. Iznos gubitka, X, za isvjestan tip police osiguranja, ima Pareto distribuciju s funkcijom gustoće $f(x)$, gdje je

$$f(x) = \frac{3 \times 400^3}{(400+x)^4} \qquad (x > 0)\,.$$

Franšiza od £100 se primjenjuje na te police.

(i) Izračunajte očekivanu veličinu štete koju će osiguravajuće društvo isplatiti.

(ii) Komentirajte razliku između vašeg odgovora na (i) i očekivanog iznosa gubitka, $\mathbb{E}[X]$.

Rješenje:

(i)

$$\mathbb{E}[X - 100 \,|\, X > 100] = \frac{\int_{100}^{\infty}(x-100)f(x)\,dx}{\mathbb{P}(X > 100)}$$

$$\begin{aligned}\int_{100}^{\infty} x \frac{3\lambda^3}{(\lambda+x)^4}\,dx &= \left[-x\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^3\right]_{100}^{\infty} + \int_{100}^{\infty} \frac{\lambda^3}{(\lambda+x)^3}\,dy \\ &= 100\left(\frac{400}{500}\right)^3 + \left[-\frac{\lambda^3}{2(\lambda+x)^2}\right]_{100}^{\infty} \\ &= 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{400^3}{2 \times 500^2}\end{aligned}$$

$$100\int_{100}^{\infty} f(x)\,dx = 100\left(\frac{400}{500}\right)^3$$

Zato je

$$\mathbb{E}[X - 100 \,|\, X > 100] = \frac{\frac{400^3}{2\times 500^2}}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{128}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = 250$$

(ii) $\mathbb{E}[X] = \frac{400}{2} = 200$. Očekivani iznos štete raste zbog teškog repa distribucije.

5. Osiguratelj specijaliziran za osiguranje motornih vozila izdaje police s pojedinačnom franšizom od £500 po šteti. Osiguratelj je sklopio ugovor o reosiguranju po kojem osiguratelj plaća maksimum od £4 500 po svakoj pojedinačnoj šteti, a ostatak plaća reosiguratelj. Vjeruje se da pojedinačne bruto štete (prije odbitka franšize i reosiguranja) slijede eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ.

   Tokom zadnje godine osiguratelj je skupio sljedeće podatke:

   - Postojalo je 5 šteta koje nisu bile obrađene, jer je šteta bila manja od franšize.
   - Postojalo je 11 šteta u kojima je osiguratelj isplatio £4 500, a reosiguratelj ostatak.
   - Postojalo je 26 drugih šteta za koje je osiguratelj isplatio ukupno iznos od £76 457.

   Izvedite log-vjerodostojnost od λ.

   Rješenje:

   Neka je $X =$ bruto iznos štete.

$$\begin{aligned}
&\text{Za 5 šteta, } X < 500 \\
&\text{Za 26 šteta, } \sum x = 76\,457 + 26 \times 500 = 89\,457 \\
&\text{Za 11 šteta, } X > 5\,000
\end{aligned}$$

   Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 500) &= 1 - e^{-500\lambda} \\
\mathbb{P}(X > 5\,000) &= e^{-5\,000\lambda}
\end{aligned}$$

   Log-vjerodostojnost je

$$\begin{aligned}
& 26 \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{26} x_i + 5 \log[1 - e^{-500\lambda}] + 11[-5\,000\lambda] \\
= \; & 26 \log \lambda - 89\,457\lambda + 5 \log[1 - e^{-500\lambda}] - 55\,000\lambda \\
= \; & 26 \log \lambda - 144\,457\lambda + 5 \log[1 - e^{-500\lambda}]
\end{aligned}$$

POGLAVLJE 4

1. (i) Neka je $S = X_1 + \cdots + X_N$, gdje su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable, a N je slučajna varijabla nezasvisna od niza X_i. Izvedite izraz za funkciju izvodnicu momenata od S pomoću vjerojatnosne funkcije izvodnice od N i funkcije izvodnice momenata od X_i.

   (ii) U grupi polica, mjesečni broj šteta po jednoj polici ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ, gdje je λ slučajna varijabla s gustoćom $f(\lambda) = 2e^{-2\lambda}$, $\lambda > 0$.

   (a) Pokažite da je vjerojatnost n šteta po slučajno odabranoj polici iz grupe jednaka $\frac{2}{3^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

   (b) Nađite funkciju izvodnicu momenata distribucije ukupnih šteta ako štete imaju gama distribuciju s očekivanjem 2 i varijancom 2.

Rješenje:

(i) Funkcija izvodnica momenata od S je

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathbb{E}(e^{St}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{St} \mid N)] \\ &= \mathbb{E}[\{\mathbb{E}(e^{Xt})\}^N] \\ &= G_N(M_X(t)) \end{aligned}$$

(ii) (a) Neka je N broj šteta.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N = n \mid \lambda) 2e^{-2\lambda}\, d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\, 2e^{-2\lambda}\, d\lambda \\ &= \frac{2}{3^{n+1}} \int_0^\infty \frac{3^{n+1}\lambda^n e^{-3\lambda}}{n!}\, d\lambda \\ &= \frac{2}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

(b) N ima vjerojatnosnu funkciju izvodnicu

$$\sum_{0}^{\infty} s^n \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{s}{3}\right)^n = \frac{2}{3-s}\,.$$

Za $\Gamma(\alpha, \lambda)$-distribuciju, očekivanje $= \alpha/\lambda = 2$, varijanca $= \alpha/\lambda^2 = 2 \Rightarrow \alpha = 2, \lambda = 1$. Zato je $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2$. Slijedi

$$M_S(t) = \frac{2}{3 - \frac{1}{(1-t)^2}} = \frac{2(1-t)^2}{3(1-t)^2 - 1} = \frac{2(1-t)^2}{3t^2 - 6t + 2}$$

2. Razmotrite portfelj polica osiguranja u kojem broj šteta ima binomnu distribuciju s parametrima n i p. Pretpostavlja se da je distribucija iznosa šteta eksponencijalna s očekivanjem $1/\lambda$. Pretpostavlja se da su iznosi šteta nezavisne slučajne varijable, nezavisne od broja šteta.

   Osiguratelj je ugovorio reosiguranje viška štete sa samopridržajem M.

   Izračunajte funkciju izvodnicu momenata od S_I, gdje su S_I ukupne godišnje štete koje isplaćuje osiguratelj (nakon odbitka za reosiguranje).

   Rješenje:

$$\begin{aligned}
M_{S_I}(t) &= M_N(\log M_{X_I}(t)) \\
M_{X_I}(t)) &= \int_0^M e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx + e^{tM} e^{-\lambda M} \\
&= \left[-\frac{\lambda}{\lambda - t}\, e^{-(\lambda - t)x} \right]_0^M + e^{-(\lambda - t)M} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t} + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - t}\right) e^{-(\lambda - t)M} \\
M_N(t) &= ((1-p) + pe^t)^n
\end{aligned}$$

   Slijedi:

$$M_{S_I}(t) = \left[1 - p + p \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - t}\right) e^{-(\lambda - t)M} \right) \right]^n$$

3. Za svaki od m nezavisnih rizika, vjerojatnost da će biti štete tokom godine je 0.2, a vjerojatnost da štete neće biti je 0.8. Iznosi šteta su nezavisni s očekivanjem 400 i varijancom 110.

   Odredite očekivanu vrijednost i varijancu ukupnog iznosa šteta u jednoj godini.

   Rješenje:

   Neka je N broj šteta u godini tako da je $N \sim B(m, 0.2)$, te neka je X tipična šteta.

   Neka je S ukupni iznos šteta u godini, tako da S ima složenu binomnu distribuciju.

   Očekivana vrijednost od S je

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X) = m \times 0.2 \times 400 = 80m\,.$$

   Varijanca od S je

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S) &= \mathbb{E}(N)\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N)(\mathbb{E}(X))^2 \\ &= m \times 0.2 \times 110 + m \times 0.2 \times 0.8 \times 400^2 \\ &= 25\,622m\,.\end{aligned}$$

4. U portfelju od 100 polica neživotnog osiguranja štete se događaju po Poissonovom procesu. Očekivani broj šteta u godini za svaku policu je λ, a distribucija iznosa šteta ima funkciju gustoće $f(x)$, gdje je

$$f(x) = \frac{1}{10\,000}\, xe^{-x/100} \quad (x > 0)\,.$$

   Parametar λ nije isti za sve police u portfelju, ali se modelira pomoću slučajne varijable (nezavisne od iznosa šteta) s funkcijom gustoće $g(\lambda)$, gdje je

$$g(\lambda) = 100\lambda e^{-10\lambda} \quad (\lambda > 0)\,.$$

   (i) Izračunajte očekivanje i varijancu godišnjih ukupnih šteta.

   (ii) Uz danu početnu rezervu od 2 000, upotrijebite normalnu aproksimaciju za distribuciju ukupnih šteta i nađite relativni dodatak na premiju koji treba upotrijebiti da bi sa 95% sigurnosti rezerva na kraju prve godine bila pozitivna.

(iii) Kada bi λ bio fiksan i jednak svom očekivanju, opišite kakav bi to imalo efekt na vrijednost relativnog dodatka na premiju. (Nisu potrebni dodatni izračuni.)

Rješenje:

(i) Neka su S_i ukupne štete po i-toj polici. Tada je

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[\sum S_i] = \sum \mathbb{E}[S_i] \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}[S] = \mathrm{Var}[\sum S_i] = \sum \mathrm{Var}[S_i] \\
\mathbb{E}[S_i] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_i \,|\, \lambda_i]] = \mathbb{E}[\lambda_i \mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[\lambda]\mathbb{E}[X] \\
\mathrm{Var}[S_i] &= \mathrm{Var}[\mathbb{E}[S_i \,|\, \lambda_i]] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[S_i \,|\, \lambda_i]] \\
&= \mathrm{Var}[\lambda_i \mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[\lambda_i]\mathbb{E}[X^2]] \\
&= \mathrm{Var}[\lambda](\mathbb{E}[X])^2 + \mathbb{E}[\lambda]\mathbb{E}[X^2] \\
X &\sim \Gamma\left(2, \frac{1}{100}\right) \\
\lambda &\sim \Gamma(2, 10) \\
\mathbb{E}[X] &= 200 \\
\mathbb{E}[\lambda] &= 0.2
\end{aligned}
$$

Slijedi: $\mathbb{E}[S] = 100 \times 0.2 \times 200 = 4000$. Iz $\mathrm{Var}[\lambda] = 0.02$ i $\mathrm{Var}[X] = 20000$ slijedi $\mathbb{E}[X^2] = 20000 + 200^2 = 60000$. Zato je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S] &= 100(\mathrm{Var}[\lambda](\mathbb{E}[X])^2 + \mathbb{E}[\lambda]\mathbb{E}[X^2]) \\
&= 100 \times 200^2 \times 0.02 + 100 \times 0.2 \times 60000 \\
&= 1280000
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S < U + (1+\theta)\mathbb{E}[S]) = 0.95 \\
&\mathbb{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} < \frac{U + (1+\theta)\mathbb{E}[S] - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}\right) = 0.95 \\
&\frac{U + \theta\mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} = 1.645 \\
&\theta = \frac{1.645\sqrt{\mathrm{Var}[S]} - U}{\mathbb{E}[S]} = \frac{1861 - 2000}{4000} = -0.035
\end{aligned}
$$

Društvo ne treba dodati dodatak na premiju, budući da je pričuva za prvu godinu dovoljna za nužnu sigurnost. Štoviše, može prodavati za (vrlo malo) manje od očekivanog troška (3.5% manje od očekivanog troška).

(iii) Fiksni λ bi reducirao varijabilnost, te bi se stoga vrijednost od θ smanjila. To bi omogućilo dodatnu kompetitivnost cijena u prvoj godini.

5. U portfelju polica osiguranja pretpostavlja se da iznos štete, Y, ovisi o dobi osiguranika, X. Pretpostavimo da su uvjetno očekivanje i varijance od Y jednaki

$$\mathbb{E}[Y \mid X = x] = 2x + 400 \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}[Y \mid X = x] = \frac{x^2}{2}\,.$$

Pretpostavlja se da je distribucija od X unutar portfelja normalna s očekivanjem 50 i standardnom devijacijom 14.

Izračunajte (bezuvjetno) očekivanje i varijancu od Y.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]] \\
&= \mathbb{E}[2X + 400] \\
&= 2\mathbb{E}[X] + 400 \\
&= 500 \\
\mathrm{Var}[Y] &= \mathrm{Var}[\mathbb{E}[Y \mid X]] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[Y \mid X]] \\
&= \mathrm{Var}[2X + 400] + \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{2}\right] \\
&= 4\mathrm{Var}[X] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] \\
&= 4 + 14^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Var}[X] + (\mathbb{E}[X])^2) \\
&= 784 + 1\,348 = 2\,132
\end{aligned}$$

Slijedi da je standardna devijacija od Y jednaka 46.17

POGLAVLJE 5

1. Proces ukupnih šteta za određeni rizik je složen Poissonov proces sa $\lambda = 20$. Iznosi pojedinačnih šteta su £100 s vjerojatnosti $1/4$, £200 s vjerojatnosti $1/2$, ili £250 s vjerojatnosti $1/4$. Početni višak je £1 000. Upotrebom normalne aproksimacije približno izračunajte najmanji dodatak na premije θ tako da je vjerojatnost nesolventnosti u vremenu 3 najviše 0.05.

   Rješenje:

   Neka je X tipična šteta. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1/4 \times 100 + 1/2 \times 200 + 1/4 \times 250 = 187.5\\ \mathbb{E}(X^2) &= 1/4 \times 100^2 + 1/2 \times 200^2 + 1/4 \times 250^2 = 38\,125\end{aligned}$$

   Neka je S ukupna šteta u trenutku 3. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(X) \times 3\lambda = 11\,250\\ \mathrm{Var}(S) &= \mathbb{E}(X^2) \times 3\lambda = 2\,287\,500\end{aligned}$$

   Standardna devijacija od S je 1 512.4483. Zato je S približno $N(11\,250\,, 2\,287\,500)$. Želimo

$$\begin{aligned}0.05 &\geq \mathbb{P}(1000 + (1+\theta)\mathbb{E}(X)3\lambda - S < 0)\\ &= \mathbb{P}(S > 1000 + (1+\theta) \times 11250)\\ &= \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{1000 + (1+\theta) \times 11250 - 11250}{1512.4483}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{1000 + 11250\,\theta}{1512.4483}\right)\end{aligned}$$

   Stoga

$$\frac{1000 + 11250\,\theta}{1512.4483} > 1.645\,,$$

   t.j., $\theta > 0.1323$.

2. Štete za određeni rizik dolaze po Poissonovom procesu s intenzitetom λ. Iznosi šteta su nezavisni i jednako distribuirani s gustoćom $f(x)$ i

nezavisni su od procesa dolazaka šteta. Pretpostavite da postoji konstanta γ $(0 < \gamma < \infty)$ takva da je $\lim_{r \to \gamma} M(r) = \infty$ gdje je $M(r)$ funkcija izvodnica momenata šteta.

Premije pristižu neprekidno po konstantnoj stopi s dodatkom za premiju $\theta > 0$.

(i) (a) Definirajte koeficijent prilagodbe R.

(b) Definirajte proces viška i vjerojatnost propasti $\psi(u)$ uz početni višak $u > 0$.

(c) Napišite Lundbergovu nejednakost.

(ii) Izvedite koeficijent prilagodbe ako je $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$, $x > 0$, i $\theta = 0.25$.

(iii) Promotrite slučaj $f(x) = \frac{1}{2} e^{-x}(1 + 2e^{-x})$, $x > 0$, i $\theta = 0.25$.

(a) Izračunajte očekivanu veličinu štete μ.

(b) Izračunajte odgovarajući koeficijent prilagodbe, i odredite gornju među za $\psi(15)$.

(c) Usporedite Vaše odgovore na (iii)(b) s onima dobivenim uz pogrešnu pretpostavku da su štete eksponencijalno distribuirane s očekivanjem μ, i ukratko komentirajte.

Rješenje:

(i) (a) Neka je μ srednja veličina štete.
Tada je koeficijent prilagodbe R pozitivno rješenje od $M(r) = 1 + (1+\theta)\mu r$.

(b) Višak u trenutku t je $U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu t - S(t)$ gdje je $S(t)$ ukupna šteta u trenutku t.
Proces viška je $\{U(t) : t > 0\}$.
Vjerojatnost propasti s početnim viškom u je $\psi(u) = \mathbb{P}(U(t) < 0 \text{ za neki } t, 0 < t < \infty)$.

(c) Lundbergova nejednakost: $\psi(u) \leq \exp\{-Ru\}$.

(ii) Za eksponencijalnu distribuciju s očekivanjem μ, funkcija izvodnica momenata je $M(r) = \frac{1}{1-\mu r}$, $r < \frac{1}{\mu}$.

Zato je R rješenje od

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\mu r} = 1 + \frac{5}{4}\mu r \\
&4 = 4(1-\mu r) + 5\mu r(1-\mu r) \\
&5\mu^2 r^2 - \mu r = 0
\end{aligned}$$

$R > 0$ te zato $R = \frac{1}{5\mu}$ (provjerite: $R < \frac{1}{\mu}$)

(iii) (a) Štete $\sim 1/2\times$ (eksponencijalna s očekivanjem 1) $+1/2\times$ (eksponencijalna s očekivanjem 1/2) (*).
Zato je $\mu = 1/2 \times 1 + 1/2 \times 1/2 = 3/4$
[ili izračunajte $\int_0^\infty x\,(1/2)\,e^{-x}(1+2e^{-x})\,dx$]

(b) Iz (*), $M(r) = 1/2 \times \frac{1}{1-r} + 1/2 \times \frac{2}{2-r}, r < 1$
[ili izračunajte $\int_0^\infty e^{rx} 1/2\, e^{-x}(1+2e^{-x})\,dx$]
$R > 0$ rješava

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{1}{1-r} + \frac{2}{2(2-r)} = 1 + \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} r \\
&8(2-r) + 16(1-r) = 16(2-3r+r^2) + 15r(2-3r+r^2) \\
&24r = -18r - 29r^2 + 15r^3
\end{aligned}$$

Zbog $R \neq 0$ slijedi $15r^2 - 29r + 6 = 0$. Rješenje je

$$r = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \times 6 \times 15}}{30} = 1.6977 \text{ ili } 0.2356$$

Treba biti $R < 1$, što znači $R = 0.2356$. Lundbergova nejednakost daje $\psi(15) \leq e^{-R\times 15} = 0.0292$

(c) Za eksponencijalnu distribuciju s očekivanjem $\mu = 3/4$, iz (ii) znamo da je koeficijent prilagodbe $R^* = \frac{1}{5\mu} = \frac{4}{15} = 0.2667$, te Lundbergova nejednakost daje $\psi(15) \leq e^{-R^*\times 15} = 0.0183$.
R^* je veći od stvarne vrijednosti, što znači da je ocjena za $\psi(15)$ manja od stvarne ocjene, a to može dovesti do lažnog osjećaja sigurnosti.

3. Štete pristižu u skladu s Poissonovim procesom. Iznosi pojedinačnih šteta su nezavisni s gustoćom:

$$f(x) = xe^{-x} \quad (x > 0)\,,$$

a osiguratelj upotrebljava dodatak na premiju θ.

(i) Izvedite jednadžbu za koeficijent prilagodbe za taj proces.

(ii) Ako je $\theta = 0.4$, izračunajte koeficijent prilagodbe i odredite gornju među za vjerojatnost krajnje propasti ako je početni višak jednak 50.

Rješenje:

(i) Štete imaju Gama$(2,1)$ distribuciju, te stoga imaju očekivanje 2 i funkciju izvodnicu momenata

$$M(r) = (1-r)^{-2}\,, \quad r < 1\,.$$

Koeficijent prilagodbe $R > 0$ zadovoljava

$$(1-R)^{-2} - 1 - 2(1+\theta)R = 0\,.$$

Stoga imamo

$$1 - (1-R)^2 - 2(1+\theta)R(1-R)^2 = 0\,,$$

te zbog $R > 0$, to se pojednostavljuje na

$$2(1+\theta)R^2 - (3+4\theta)R + 2\theta = 0\,.$$

(ii) Za $\theta = 0.4$ imamo

$$2.8R^2 - 4.6R + 0.8 = 0\,,$$

što ima rješenja 0.1977 i 1.4452.

Samo prvo rješenje je u domeni definicije funkcije izvodnice momenata, tako daje koeficijent prilagodbe jednak $R = 0.198$.

Vjerojatnost krajnje propasti zadovoljava po Lundbergovoj nejednakosti $\psi(50) \leq e^{-50R}$, t.j., $\psi(50) \leq 5.09 \times 10^{-5}$.

POGLAVLJE 6

1. Za svaku od m nezavisnih polica, vjerojatnost jedne štete u godini je θ $(0 < \theta < 1)$, a vjerojatnost niti jedne štete u godini je $1 - \theta$. Ukupan broj šteta u jednoj godini je slučajna varijabla X. Dostupna su nezavisna opažanja $x_1, \ldots, x_n$ od X. Apriorna distribucija od θ ima gustoću $f(\theta) \propto \{\theta(1-\theta)\}^{\beta-1}$, $0 < \theta < 1$, za neku konstantu $\beta > 0$.

   (i) (a) Izvedite aposteriornu distribuciju od θ uz dane $x_1, \ldots, x_n$.

   (b) Izvedite procjenu $g(\underline{x})$ za θ metodom maksimalne vjerodostojnosti.

   (c) Izvedite Bayesovsku procjenu od θ uz kvadratni gubitak, i pokažite da ima oblik procjene povjerenjem,

   $$Zg(\underline{x}) + (1 - Z)\mu$$

   gdje je μ veličina koju trebate specificirati pomoću apriorne distribucije od θ.

   (d) Objasnite što se događa sa Z kada broj opažanja raste.

   (ii) Izračunajte Bayesovski procjenitelj od θ i vrijednost od Z ako je $n = 6$, $m = 10$ i $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 3$, kada je

   (a) $\beta = 1$

   (b) $\beta = 4$

   Razmatrajući apriornu varijancu, komentirajte učinak rasta od β na Z, i dovedite u vezu taj učinak s kvalitetom apriorne informacije o θ u oba slučaja.

   Rješenje:

   (i) (a)

$$\begin{aligned}
f(\theta) &\propto \theta^{\beta-1}(1-\theta)^{\beta-1} \\
f(\underline{x}\,|\,\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} \theta^{x_i}(1-\theta)^{m-x_i} \\
&\propto \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{nm-\sum x_i} \\
\text{dakle } f(\theta\,|\,\underline{x}) &\propto \theta^{\sum x_i+\beta-1}(1-\theta)^{nm+\beta-\sum x_i-1} \\
\text{dakle } \theta\,|\,\underline{x} &\sim \text{Beta}(\sum x_i + \beta, nm + \beta - \sum x_i)
\end{aligned}$$

(b) $l = \log \text{vjerodostojnost}(\theta) = (\sum x_i) \log \theta + (nm - \sum x_i) \log(1 - \theta) + \text{konstanta}$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{nm - \sum x_i}{1-\theta} = \frac{nm}{\theta(1-\theta)} \left(\frac{\sum x_i}{nm} - \theta \right)$$

To je jednako nuli kada je $\sum x_i (1-\theta) = (nm - \sum x_i)\theta$, t.j.,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{nm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial l}{\partial \theta} > 0 \quad \text{za } \theta < \frac{\sum x_i}{nm} \\ \frac{\partial l}{\partial \theta} < 0 \quad \text{za } \theta < \frac{\sum x_i}{nm} \end{array} \right\} \Rightarrow \max$$

Stoga je procjenitelj maksimalne vjerodostojnosti $= \frac{\sum x_i}{nm} = g(\underline{x})$.

(c) Trebamo aposteriorno očekivanje.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\theta \,|\, \underline{x}] &= \frac{\sum x_i + \beta}{nm + 2\beta} \\ &= \frac{nm}{nm + 2\beta} \frac{\sum x_i}{nm} + \frac{2\beta}{nm + 2\beta} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

što je oblika $Zg(\underline{x}) + (1-Z)\mu$ gdje je $g(\underline{x}) = \frac{\sum x_i}{nm}$, $\mu = 1/2$. Račun za μ: $f(\theta) = \theta^{\beta-1}(1-\theta)^{\beta-1}$, simetrično oko $\theta = 1/2$, očekivanje $= 1/2$, $\underline{\mu = \text{apriorno očekivanje}}$

(d)
$$Z = \frac{nm}{nm + 2\beta} = \frac{m}{m + \frac{2\beta}{n}} \to 1 \text{ kada } n \to \infty$$

Više dobivenih podataka stavljaju veću relativnu težinu na procjenu temeljenu na podacima nego na apriornu procjenu.

(ii)

	$Z = \frac{nm}{nm+2\beta}$	$g(\underline{x})(\sum x_i = 12)$	Procjena povjerenjem
$\beta = 1$	0.9677	0.2	0.2097
$\beta = 4$	0.8824	0.2	0.2353

$$\begin{aligned}\text{Apriorna varijanca} &= \frac{\beta^2}{(2\beta)^2(2\beta+1)} \\ &= \frac{1}{4(2\beta+1)}\end{aligned}$$

$$\text{Za } \beta = 1 \text{ apriorna varijanca je } 0.0833$$
$$\text{Za } \beta = 4 \text{ apriorna varijanca je } 0.0278$$

Faktor povjerenja je manji za $\beta = 4$, i apriorna varijanca je manja, što pokazuje veću preciznost naše apriorne procjene, te daje relativno veću težinu apriornoj procjeni.

2. Vjeruje se da iznosi šteta u određenom portfelju osiguranja slijede normalnu distribuciju sa standardnom devijacijom σ_1 i nepoznatim očekivanjem θ. Osiguratelj opaža uzorak od n polica koje su dovele do šteta za koji je srednji iznos $\bar{a}$. Pretpostavlja se da je apriorna distribucija od θ normalna s očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ_2.

   (i) (a) Navedite aposteriorno očekivanje od θ.

   (b) Pokažite da se aposteriorno očekivanje od θ može iskazati kao sredina apriornog očekivanja i očekivanja uzorka, i izvedite izraz za težinu stavljenu na očekivanje uzorka.

   (ii) Osiguratelj vjeruje da pojedinačni iznosi šteta prate normalnu distribuciju s nepoznatim očekivanjem i standardnom devijacijom £210. Prethodne informacije sugeriraju pretpostavku da očekivanje slijedi normalnu distribuciju s očekivanjem =£155 i standardnom devijacijom =£84. Tokom protekle godine osiguratelj je prikupio podatke za 15 šteta gdje je ukupan isplaćen iznos bio £2 456.

   Izračunajte faktor povjerenja za očekivanje uzorka, te iz toga, uz dano da osiguratelj želi dodati dodatak za profit od 30%, izračunajte koliku premiju osiguratelj treba naplatiti.

   (iii) Odredite graničnu vrijednost faktora povjeranja kada svaki od n, σ_1 i σ_2 raste, te ukratko opišite kako ta granična vrijednost ovisi o osigurateljevim pretpostavkama i opaženim podacima.

Rješenje:

(i) (a) Aposteriorno očekivanje:

$$= \frac{\mu\sigma_1^2 + n\sigma_2^2\bar{a}}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}$$

(b)

$$= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\,\mu + \frac{n\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}\,\bar{a}$$

Zato se aposteriorno očekivanje može iskazati kao:

$$Z\bar{a} + (1 - Z)\mu$$

gdje je

$$Z = \frac{n\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2} = \frac{n}{n + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \text{ i } 1 - Z = \frac{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 - n\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}$$

(ii) $\bar{a} = £163.73$ i

$$Z = \frac{15}{15 + \frac{210^2}{84^2}} = 0.70588$$

Stoga je premija $(0.29412 \times £155 + 0.70588 \times £163.73) \times 1.30 = £209.51$

(iii) Kada $n \to \infty$, $Z \to 1$, jer se više težine stavlja na uzorak ako ima veći broj podataka.

Kada $\sigma_1^2 \to \infty$, $Z \to 0$, jer se manje težine stavlja na podatke vjerujemo li da je varijabilnost opaženih podataka veća.

Kada $\sigma^2 \to \infty$, $Z \to 1$, jer se više težine stavlja na podatke vjerujemo li da je varijabilnost apriorne procjene veća.

3. Broj e-mail poruka koji svaki dan primi student aktuarstva ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem λ, gdje je iz prethodnog iskustva apriorna distribucija od λ eksponencijalna s očekivanjem μ.

(i) Student ima podatke $x_1, \ldots, x_n$, gdje je x_i broj poruka pristiglih dana i, $i = 1, \ldots, n$.

(a) Izvedite aposteriornu distribuciju od λ.

(b) Pokažite da se Bayesovska procjena od λ uz kvadratni gubitak može napisati u obliku procjene povjerenjem, te navedite faktor povjerenja.

(c) Ako je $\mu = 50$ i student primi ukupno 550 poruka u 10 dana, izračunajte Bayesovsku procjenu za λ uz kvadratni gubitak.

(ii) Za 60% poruka vrijeme potrebno za odgovor (u minutama) je eksponencijalno distribuirano s očekivanjem 1, a za preostale poruke vrijeme potrebno za odgovor ima Pareto distribuciju s očekivanjem 2 i varijancom 12.

(a) Odredite vjerojatnost da je za slučajno odabranu poruku potrebno više od M minuta za odgovor.

(b) Upotrebom vrijednosti za λ procijenjene u (i)(c), izračunajte očekivano ukupno vrijeme koje student provede odgovarajući na sve poruke koje su prispjele tog dana.

(c) Student je odlučio reducirati vrijeme provedeno na e-mailu, te prihvaća strategiju koja određuje maksimalno vrijeme od 1.5 minuta za odgovor na svaku poruku. Još uvijek upotrebljavajući procijenjenu vrijednost od λ, izračunajte smanjenje očekivanog vremena u odgovaranju na sve poruke prispjele tog dana.

Rješenje:

(i) (a) Apriorna gustoća od λ je $f(\lambda) = e^{-\lambda/\mu}/\mu$. Uz oznaku $x = (x_1, \ldots, x_n)$ imamo

$$f(x \mid \lambda) = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

tako da je aposteriorna gustoća

$$\begin{aligned} f(\lambda \mid x) &\propto f(\lambda) \times f(x \mid \lambda) \\ &\propto e^{-\lambda/\mu} e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \\ &= \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \exp\left(-\lambda\left(n + \frac{1}{\mu}\right)\right), \end{aligned}$$

t.j., Gamma$(1 + \sum_{i=1}^n x_i, n + (1/\mu))$.

(b) Bayesovska procjena uz kvadratni gubitak je aposterirno očekivanje

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + 1}{n + \frac{1}{\mu}} = \frac{n}{n + \frac{1}{\mu}}\, \bar{x} + \frac{\frac{1}{\mu}}{n + \frac{1}{\mu}}\, \mu\,,$$

što ima oblik procjene povjerenjem s faktorom povjerenja $n/(n + (1/\mu))$.

(c) S danim vrijednostima, procjena od λ je

$$\frac{550 + 1}{10 + (1/50)} = 54.99\,.$$

(ii) (a) Za Pareto distribuciju Pareto(α, ν) vrijedi $\nu/(\alpha - 1) = 2$ i $\alpha\nu^2/((\alpha - 1)^2(\alpha - 2)) = 12$. Rješavanje daje $\alpha = 3$ i $\nu = 4$. Neka je X slučajno odabrana šteta, tako da X ima gustoću

$$f(x) = 0.6e^{-x} + 0.4\frac{3 \times 4^3}{(4 + x)^4}\,.$$

Tada je

$$\mathbb{P}(X > M) = 0.6e^{-M} + 0.4\left(\frac{4}{4 + M}\right)^3\,.$$

(b) Neka je T ukupno vrijeme provedeno odgovarajući na poruke jednog dana.

$$\mathbb{E}(T) = \lambda(0.6 \times 1 + 0.4 \times 2) = 54.99 \times 1.4 = 76.99\,.$$

(c) Neka je Y vrijeme za odgovor na e-mail poruke po novoj strategiji. Tada je $Y = \min(X, 1.5)$ i

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\min(X, 1.5)) = \int_0^{1.5} xf(x)\,dx + 1.5\mathbb{P}(X > 1.5) \\ &= \mathbb{E}(X) - \int_0^{\infty} xf(x + 1.5)\,dx\,. \end{aligned}$$

Smanjenje očekivanja po poruci je

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xf(x+1.5)\,dx &= \int_0^\infty x\left(0.6e^{-x-1.5}+0.4\times\frac{3\times 4^3}{(4+1.5+x)^4}\right)dx \\
&= 0.6e^{-1.5}\int_0^\infty xe^{-x}\,dx+\frac{0.4\times 4^3}{5.5^3}\int_0^\infty x\frac{3\times 5.5^3}{(5.5+x)^4}\,dx \\
&= 0.6e3{-}1.5+\frac{0.4\times 4^3}{5.5^3}\times\frac{5.5}{2} \\
&= 0.5570
\end{aligned}$$

Prema tome, ukupno smanjenje za dnevne poruke je $54.99 \times 0.5570 = 30.63$ minute.

POGLAVLJE 7

1. Bonus sustav ima četiri nivoa popusta, 0%, 25%, 50% i 75%. Pravila za prelazak između nivoa su kako slijedi:

   Ako nije prijavljena šteta u jednoj godini, osiguranik prelazi u sljedeći viši nivo, ili ostaje na nivou 75%;

   Ako je prijavljena jedna šteta u godini, osiguranik prelazi jedan nivo dolje, ili ostaje na nivou 0%;

   Ako su prijavljene dvije ili više štete, osiguranik prelazi, ili ostaje na nivou od 0%.

   Ustanovljeno je da osiguranici na različitim nivoima imaju različite stope prijavljivanja šteta. Broj prijavljenih šteta u godini slijedi Poissonovu distribuciju s parametrom λ kako slijedi:

Nivo	0%	25%	50%	75%
λ	0.29	0.22	0.18	0.10

   (i) Izvedite matricu prijelaza.

   (ii) Izračunajte omjere na svakom nivou nakon što sustav dostigne ravnotežu (stacionarno stanje).

   Rješenje:

   (i)

$$
\begin{array}{llll}
\text{nivo } 0\% & \mathbb{P}(0 \text{ šteta}) & = e^{-0.29} & = 0.7483 \\
 & \mathbb{P}(\geq 1 \text{ šteta}) & = 1 - 0.7483 & = 0.2517 \\
\text{nivo } 25\% & \mathbb{P}(0 \text{ šteta}) & = e^{-0.22} & = 0.8025 \\
 & \mathbb{P}(\geq 1 \text{ šteta}) & = 1 - 0.8025 & = 0.1975 \\
\text{nivo } 50\% & \mathbb{P}(0 \text{ šteta}) & = e^{-0.18} & = 0.8353 \\
 & \mathbb{P}(1 \text{ šteta}) & = 0.18e^{-0.18} & = 0.1503 \\
 & \mathbb{P}(\geq 2 \text{ štete}) & = 1 - 0.8353 - 0.1503 & = 0.0144 \\
\text{nivo } 75\% & \mathbb{P}(0 \text{ šteta}) & = e^{-0.10} & = 0.9048 \\
 & \mathbb{P}(1 \text{ šteta}) & = 0.10e^{-0.10} & = 0.0905 \\
 & \mathbb{P}(\geq 2 \text{ štete}) & = 1 - 0.9048 - 0.0905 & = 0.0047
\end{array}
$$

Stoga je matrica prijelaza

$$\begin{bmatrix} 0.2517 & 0.7483 & 0 & 0 \\ 0.1975 & 0 & 0.8025 & 0 \\ 0.0144 & 0.1503 & 0 & 0.8353 \\ 0.0047 & 0 & 0.0905 & 0.9048 \end{bmatrix}$$

(ii) U ravnoteži

$$\pi \begin{bmatrix} 0.2517 & 0.7483 & 0 & 0 \\ 0.1975 & 0 & 0.8025 & 0 \\ 0.0144 & 0.1503 & 0 & 0.8353 \\ 0.0047 & 0 & 0.0905 & 0.9048 \end{bmatrix} = \pi$$

$$\begin{array}{lclclclcl} 0.2417\pi_0 & + & 0.1975\pi_1 & + & 0.0144\pi_2 & + & 0.0047\pi_3 & = & \pi_0 \\ 0.7483\pi_0 & + & 0.1503\pi_2 & & & & & = \pi_1 & \\ 0.8025\pi_0 & + & 0.0905\pi_1 & & & & & = \pi_2 & \\ 0.8353\pi_2 & + & 0.9048\pi_3 & & & & & = \pi_3 & \end{array}$$

i $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Slijedi

$$\begin{aligned} \pi_3 &= 8.7742\pi_2 \\ \pi_2 &= 3.8969\pi_1 \\ \pi_1 &= 1.8062\pi_0 \end{aligned}$$

$$\pi_0 + 1.8062\pi_0 + 7.0386\pi_0 + 61.7579\pi_0 = 1$$

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0.0140 \\ \pi_1 &= 0.0252 \\ \pi_2 &= 0.0983 \\ \pi_3 &= 0.8625 \end{aligned}$$

2. U sustavu bonusa za osiguranje motornih vozila postoje tri nivoa popusta, 0%, 20% i 30%. Puna godišnja premija je £190.

   Ako nije prijavljena šteta tokom godine, osiguranik se pomiče na sljedeći viši nivo, ili ostaje na 30%. Ako je prijavljena jedna ili više šteta, osiguranik se pomiče na 0% popusta, ili ostaje na 0%. Vjerojatnost da osiguranik ima nezgodu u godini je 0.1, a vjerojatnost više od jedne nezgode je zanemariva. U slučaju nezgode, prirodni logaritam štete ima $N(\mu, \sigma^2)$ distribuciju sa $\mu = 4.5$ i $\sigma^2 = 0.84$. U slučaju nezgode će osiguranik prijaviti štetu samo ako je šteta veća od ukupnih dodatnih premija koje bi se trebale platiti kroz beskonačni vremenski horizont, uz pretpostavku da neće biti daljnjih nezgoda.

(i) Odredite prijelaznu matricu Markovljevog lanca $X_1, X_2, \ldots$ gdje je X_n nivo popusta na početku godine n.

(ii) Za osiguranika koji plaća punu premiju tekuće godine, izračunajte očekivanu premiju na početku sljedeće godine.

Rješenje:

(i)

	šteta prijavljena	šteta nije prijavljena
0%	$0+190+152+133+\cdots$	$L+152+133+\cdots$
20%	$0+190+152+133+\cdots$	$L+133+133+\cdots$
30%	$0+190+152+133+\cdots$	$L+133+133+\cdots$

0% : šteta prijavljena ako	$L+152+133 > 190+152$	$L > 57$
20%, 30% : šteta prijavljena ako	$L+133+133 > 190+152$	$L > 76$

gdje je $L \sim$ log-normalna (μ, σ^2) iznos štete.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(L > 57) &= 1 - \Phi\left(\frac{\log 57 - 4.5)}{\sqrt{0.84}}\right) = 1 - \Phi(-0.499) = 0.6911 \\
\mathbb{P}(L > 76) &= 1 - \Phi\left(\frac{\log 76 - 4.5)}{\sqrt{0.84}}\right) = 1 - \Phi(-0.18) = 0.5714
\end{aligned}
$$

Zato je

$$
P = \begin{bmatrix} 0.1 \times 0.6911 & 1 - 0.1 \times 0.6911 & 0 \\ 0.1 \times 0.5714 & 0 & 1 - 0.1 \times 0.5714 \\ 0.1 \times 0.5714 & 0 & 1 - 0.1 \times 0.5714 \end{bmatrix}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\text{premija na početku sljedeće godine}) \\
= \; & 190 \times 0.1 \times 0.6911 + 152 \times (1 - 0.1 \times 0.6911) \\
= \; & 154.63
\end{aligned}
$$

3. Sustav bonusa koji upotrebljava osiguravajuće društvo za godišnje osiguranje motornih vozila ima četiri razine popusta:

   Razina 1: 0%
   Razina 2: 25%
   Razina 3: 45%
   Razina 4: 60%

   Ako osiguranik nema štete po polici u određenoj godini tada se pomiče za jednu razinu nagore (ili ostaje na razini 4), a ako je šteta načinjena ide za dvije razine nadolje (ili ostaje, ili se pomiče, na razinu 1). Puna premija koja se plaća na razini 0% popusta je 900.

   Pretpostavlja se da je vjerojatnost nesreće u godini 0.2 za sve osiguranike, a iznosi šteta slijede lognormalnu distribuciju s očekivanjem 1 188 i standardnom devijacijom 495. Međutim, osiguranici prijavljuju štetu samo ako je gubitak veći od ukupne dodatne premije koja bi trebala biti plaćena kroz tri sljedeće godine uz pretpostavku da neće biti daljnjih šteta.

   (i) Izračunajte najmanji iznos gubitka za koji će štetu prijaviti osiguranik na razini 0% popusta.

   (ii) Upotpunite prijelaznu matricu izračunavši nedostajuće vrijednosti:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0.147 & 0 & 0.853 & 0 \\ 0.120 & 0 & 0 & 0.880 \\ 0 & 0.197 & 0 & 0.803 \end{pmatrix}$$

   (iii) Izračunajte omjer osiguranika na svakoj razini popusta kada sustav dostigne stabilno stanje.

   Rješenje:

   (i)

Popust	Šteta prijavljena	Štete nije prijavljena	Razlika
0%	900, 675, 495	675, 495, 360	540

   Najmanji iznos za koji će šteta biti prijavljena na 0% popusta je 540.

(ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{prijavljena šteta}) &= \mathbb{P}(\text{prijavljena šteta} \mid \text{nezgoda}) \times \mathbb{P}(\text{nezgoda}) \\ &= \mathbb{P}(X > x) \times 0.2\end{aligned}$$

gdje je X gubitak, za koji se pretpostavlja da ima lognormalnu distribuciju, a x je najmanji gubitak za koji će biti prijavljena šteta. Znamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \exp\{\mu + \sigma^2/2\} = 1188 \\ \operatorname{Var}(X) &= \exp\{2(\mu + \sigma^2)\}(\exp\{\sigma^2\} - 1) = (495)^2\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}&(\exp\{\sigma\}^2 - 1) = (495)^2/(1188)^2 \\ &\exp(\{\sigma^2\} = 1.176 \\ &\sigma^2 = 0.16\end{aligned}$$

Dakle, $\sigma = 0.4$ i $\mu = 7$.

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \le x) = 1 - \Phi(\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(\left(\frac{\ln x - 7}{0.4}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{prijavljena šteta} \mid \text{nezgoda}) &= \mathbb{P}(X > 540) = 1 - \Phi(-1.771) = 0.9617 \\ \mathbb{P}(\text{prijavljena šteta}) &= 0.9617 \times 0.2 = 0.1923\end{aligned}$$

Stoga je prijelazna matrica

$$\begin{pmatrix} 0.192 & 0.808 & 0 & 0 \\ 0.147 & 0 & 0.853 & 0 \\ 0.120 & 0 & 0 & 0.880 \\ 0 & 0.197 & 0 & 0.803 \end{pmatrix}$$

(iii) Distribucija $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ je zato rješenje sustava

$$\begin{array}{ccccccccc} 0.192\pi_0 & + & 0.147\pi_1 & + & 0.120\pi_1 & & & = & \pi_0 \\ 0.808\pi_0 & & & & & + & 0.197\pi_3 & = & \pi_1 \\ & & 0.853\pi_1 & & & & & = & \pi_2 \\ & & & & 0.880\pi_2 & + & 0.803\pi_3 & = & \pi_3 \\ \pi_0 & + & \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & = & 1 \end{array}$$

Izrazimo π_0, π_1 i π_3 pomoću π_2:

$$\begin{aligned}
\pi_3 &= \frac{0.880}{0.197}\,\pi_2 = 4.4670\pi_2 \\
\pi_1 &= \frac{1}{0.8503}\,\pi_2 = 1.1723\pi_2 \\
\pi_3 &= \frac{\frac{0.147.}{0.853} + 0.120}{0.808}\pi_2 = 0.3618\pi_2
\end{aligned}$$

Iz $0.3618\pi_2 + 1.1723\pi_2 + \pi_2 + 4.4670\pi_2 = 1$ slijedi $\pi_2 = 0.1428$. Zato su traženi omjeri:

0% :	5.2%
25% :	16.7%
45% :	14.3%
60% :	63.8%

POGLAVLJE 8

1. Doljnji trokut pokazuje priraste šteta za portfelj polica neživotnog osiguranja. Podaci su već prilagođeni na inflaciju. Izračunajte razvojne faktore metodom ulančanih ljestvica, te implicirane bruto faktore.

2 541	1 029	217
2 824	790	
1 981		

Rješenje:

Kumulativne štete:

2 541	3 570	3 787
2 824	3 614	
1 981		

$$\lambda_3 = \frac{3\,787}{3\,570} = 1.06078$$
$$\lambda_2 = \frac{7\,184}{5\,365} = 1.33905$$

Bruto faktori:

94.27%

70.40%

2. Trokut razvoja dan dolje odnosi se na izvjestan portfelj polica osiguranja za koji se može pretpostaviti da će štete biti u potpunosti riješene do kraja razvojne godine 2.

Iznos šteta svake godine dan je u doljnjoj tablici:

	Razvojna godina		
Godina štete	0	1	2
1999	2 317	1 437	582
2000	3 287	1 792	
2001	4 816		

Kumulativni broj prijavljenih šteta prikazan je u tablici dolje:

	Razvojna godina		
Godina štete	0	1	2
1999	132	197	207
2000	183	258	
2001	261		

(i) Ako je dano da su ukupne štete plaćene do danas 10 237, izračunajte potrebnu pričuvu za ovu kohortu upotrebom metode prosječnog troška po šteti.

(ii) Navedite pretpostavke koje leže u pozadini vašeg rezultata.

Rješenje:

(i) Kumulativni iznos šteta:

	Razvojna godina		
Godina štete	0	1	2
1999	2317	3754	4336
2000	3287	5097	
2001	4816		

Projekcija broja prijavljenih šteta:

	Razvojna godina			
Godina štete	0	1	2	*krajnje*
1999	132	197	207	207
	63.77%	95.17%	**100.00%**	
2000	183	258		271
	67.50%	**95.17%**		
2001	261			398
	65.64%			

Projicirani prosječan trošak po šteti:

	Razvojna godina			
Godina štete	0	1	2	*krajnje*
1999	17.533	19.056	20.947	20.947
	83.80%	90.97%	**100.00%**	
2000	17.962	19.686		21.640
	83.01%	**90.97%**		
2001	18.452			22.123
	83.41%			

Projicirane ukupne štete:

1999: 207×20.947	=	4336
2000: 271×21.640	=	5864
2001: 398×22.123	=	8805
Ukupno:		19005
Manje plaćena šteta		-10237
Pričuva		8768

(ii) Pretpostavke su:

Za svaku godinu nastanka štete, broj prijavljenih šteta u svakoj razvojnoj godini je konstantan omjer ukupnog broja šteta koje nastaju u toj godini.

Za svaku godinu nastanka štete, prosječan iznos štete u svakoj razvojnoj godini je konstantan omjer krajnjeg prosječnog iznosa štete za tu godinu nastanka štete.

Težinska sredina prošle inflacije je prikladan procjenitelj buduće inflacije.

POGLAVLJE 9

1. Generalizirani linerani model ima nezavisne binomne odzive $Z_1, \ldots, Z_k$ sa $\mathbb{E}(Z_i) = n\mu$, $\mathrm{Var}(Z_i) = n\mu(1-\mu)$ za $0 < \mu < 1$.

   (i) Pokažite da $Y_i = Z_i/n$ pripada eksponencijalnoj familiji.

   (ii) Identificirajte prirodni parametar i kanonsku funkciju veze, te izvedite funkciju varijance.

   Rješenje:

   (i)

$$\begin{aligned} f_Y(y;\theta,\phi) &= \binom{n}{ny}\mu^{ny}(1-\mu)^{n-ny} \\ &= \exp\left\{\left[y\log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)+\log(1-\mu)\right]+\log\binom{n}{ny}\right\} \end{aligned}$$

   To je oblika $\exp\left\{\frac{y\theta-b(\theta)}{a(\phi)}+c(y,\phi)\right\}$, t.j., u obliku eksponencijalne familije.

   (ii) Prirodni parametar je

$$\theta = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) \quad \text{te zato} \quad \mu = \frac{e^\theta}{1+e^\theta}$$

$$\phi = n\,, \quad a(\phi) = \frac{1}{\phi}$$

$$b(\theta) = -\log(1-\mu) = -\log\left(\frac{1}{1+e^\theta}\right) = \log(1+e^\theta)$$

$$c(y,\phi) = \log\binom{n}{ny}$$

Kanonska veza je $g(\mu) = \theta(\mu)$ tako da je

$$\begin{aligned} g(\mu) &= \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right) \\ V(\mu) &= b''(\theta) \\ b'(\theta) &= \frac{e^\theta}{1+e^\theta} \\ b''(\theta) &= \frac{e^\theta}{(1+e^\theta)^2} = \mu(1-\mu) \end{aligned}$$

Zato je funkcija varijance $V(\mu) = \mu(1-\mu)$.

2. Opažanja $Y_1, \dots, Y_n$ su nezavisne Poissonove slučajne varijable sa $\mathbb{E}(Y_i) = \mu_i$ gdje je

$$\log \mu_i = \begin{cases} \alpha & i = 1, \dots, m \\ \alpha + \beta & i = m+1, \dots, n \end{cases} \tag{1}$$

(i) (a) Pokažite da se log-vjerodostojnost može zapisati kao

$$-me^\alpha - (n-m)e^{\alpha+\beta} + \alpha \sum_{i=1}^n y_i + \beta \sum_{i=m+1}^n - \log\left(\prod_{i=1}^n y_i!\right)$$

(b) Izvedite procjene maksimalne vjerodostojnosti za α i β.

(c) Izvedite izraz za devijaciju ovog modela.

(d) Izvedite izraz za devijaciju modela u kojem je $\beta = 0$.

(ii) Pretpostavite $n = 20$, $m = 10$ i opažanja su

$$8, 6, 4, 7, 5, 8, 2, 8, 2, 9, 10, 7, 6, 4, 5, 7, 9, 6, 8, 5\,.$$

(a) Popunite sljedeću tablicu, te izračunajte devijaciju modela u (i)(d).

y_i	frekvencija	doprinos devijacije
2	2	-9.1792
4	2	-7.2681
5	3	-6.9334
6	3	-1.7564
7	3	3.4251
8	4	15.2891
9	2	12.8403
10	?	?

(b) Ako je dano da je devijacija modela u (i)(c) jednaka 16.1499, komentirajte prilagodbu od (1) i modela sa $\beta = 0$.

Rješenje:

(i) (a)

$$f(\underline{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu_i}\mu_i^{y_i}}{y_i!}$$

Log vjerodostojnost je

$$\begin{aligned} l(\alpha,\beta) &= -\sum_1^n \mu_i + \sum_1^n y_i \log \mu_i - \log(\prod y_i!) \\ &= -me^{\alpha} - (n-m)e^{\alpha+\beta} + \alpha\left(\sum_1^m y_i\right) + (\alpha+\beta)\left(\sum_{m+1}^n y_i\right) - \log(\prod y_i!) \\ &= -me^{\alpha} - (n-m)e^{\alpha+\beta} + \alpha\left(\sum_1^n y_i\right) + \beta\left(\sum_{m+1}^n y_i\right) - \log(\prod y_i!) \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad -me^{\alpha} - (n-m)e^{\alpha+\beta} + \sum_1^n y_i = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(n-m)e^{\alpha+\beta} + \sum_{m+1}^n y_i = 0 \qquad (3)$$

Uvrstimo (3) u (2): $me^{\alpha} = \sum_1^m y_i$, te slijedi

$$\hat{\alpha} = \log\left(\frac{\sum_1^m y_i}{m}\right)$$

Uvrstimo $\hat{\alpha}$ u (3): $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \log\left(\frac{\sum_{m+1}^n y_i}{n-m}\right)$, te slijedi

$$\hat{\beta} = \log\left(\frac{\sum_{m+1}^n y_i}{n-m}\right) - \log\left(\frac{\sum_1^m y_i}{m}\right)$$

(c)

Devijacija $= 2\{$log vjerodostojnost za potpun model $- l(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\}$
U potpunom (saturiranom) modelu, prilagođene vrijednosti su $\tilde{\mu}_i = y_i$
U modelu (1) prilagođene vrijednosti su $\hat{\mu}_i = \begin{cases} t_1 & i = 1, \ldots, m \\ t_2 & i = m+1, \ldots, n \end{cases}$
gdje je $t_1 = \sum_1^m \frac{y_i}{m}$, $t_2 = \sum_{m+1}^n \frac{y_i}{n-m}$.

Stoga je

$$= \ 2\left\{-\sum_1^n y_i + \sum_1^n y_i \log y_i + \sum_1^m t_1 - \sum y_i \log t_1 + \sum_{m+1}^n t_2 - \sum_{m+1}^n y_i \log t_2\right\}$$
$$= \ \sum_1^m 2\left\{y_i \log\left(\frac{y_i}{t_1}\right) - (y_i - t_1)\right\} + \sum_{m+1}^n 2\left\{y_i \log\left(\frac{y_i}{t_2}\right) - (y_i - t_2)\right\}$$

ili ekvivalentan izraz.

(d) Kada je $\beta = 0$, $\mu_i = e^{\alpha}$ za sve i. Procjena maksimalne vjerodostojnosti od α je $\tilde{\alpha} = \log\left(\frac{\sum y_i}{n}\right)$ s prilagođenim vrijednostima $\mu_i' = \frac{\sum y_i}{n} = \bar{y}$ za sve i. Devijacija je $2\{\sum y_i \log y_i - \sum y_i \log \bar{y}\} = 2\sum y_i \log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)$.

(ii) $\bar{y} = 6.3$

y_i	frekvencija	doprinos devijacije
2	2	−9.1792
4	2	−7.2681
5	3	−6.9334
6	3	−1.7564
7	3	3.4251
8	4	15.2891
9	2	12.8403
10	1	9.2407
		16.6581

Stoga je devijacija 16.6581 na 19 stupnjava slobode.

(b) Devijacija modela (1) je 16.1499 na 18 stupnjava slobode. Oba modela su dobro prilagođena. Pad devijacije kao rezultat uključena β je 0.5083 na 1 stupanj slobode. To nije značajno kada se na to gleda kao na χ_1^2. Prema tome nema evidencije da u modelu trebamo β.

3. Osigurateljni portfelj sastoji se od m grupa pojedinaca. U i-toj grupi ima $n_i (> 1)$ pojedinaca dobi x_i. Broj šteta iz te grupe od n_i pojedinaca je binomna slučajna varijabla Y_i s parametrima n_i i θ_i, sa $0 \leq \theta_i \leq 1$ $(i = 1, \ldots, m)$. Slučajne varijable $Y_1, \ldots, Y_m$ su nezavisne.

   (i) Izvedite procjenitelje maksimalne vjerodostojnosti $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m$ od $\theta_1, \ldots, \theta_m$.

   (ii) (a) Ako je
   $$\operatorname{logit}(\theta_i) = \log\left(\frac{\theta_i}{1-\theta_i}\right) = \alpha + \beta x_i \,,$$
   pokažite da je log-vjerodostojnost jednaka
   $$\alpha \sum_{i=1}^{m} y_i + \beta \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} n_i \log(1 + \exp(\alpha + \beta x_i)) + c \,,$$
   gdje c ne ovisi o α i β.

   (b) Izvedite, ali ne pokušavajte riješiti, jednadžbe koje zadovoljavaju procjenitelji maksimalne vjerodostojnosti $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ od α i β.

   (iii) Neka je $e_i = n_i \tilde{\theta}_i$ gdje je $\tilde{\theta}_i = \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i)/(1 + \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i))$. Izvedite skaliranu devijaciju za model u (ii).

   (iv) Podaci su dostupni za šest dobi, 17, 18, 19, 20, 21 i 22.
   Dva modela su prilagođena podacima sa sljedećim rezultatima:

		skalirana devijacija	*stupnjevi slobode*
Model 1	$\operatorname{logit}(\theta_i) = \alpha$	13.33	5
Model 2	$\operatorname{logit}(\theta_i) = \alpha + \beta x_i$	1.67	*

   (a) Navedite stupnjeve slobode za Model 2.

   (b) Komentirajte prilagodbu ova dva modela.

(c) U Modelu 2, procjena za β je -0.2492, sa standardnom greškom 0.07217. Interpretirajte te rezultate i objasnite kako se omjer $\theta_{i+1}/(1-\theta_{i+1})$ odnosi prema omjeru $\theta_i/(1-\theta_i)$, kada je $x_{i+1} = x_i + 1$.

Rješenje:

(i) Označimo $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Vjerodostojnost je

$$f(y \,|\, \theta_1, \ldots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{y_i} \theta^{y_i} (1-\theta_i)^{n_i - y_i} \,.$$

Zato je log-vjerodostojnost jednaka

$$l(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \sum_{i=1}^{m} y_i \log \theta_i + \sum_{i=1}^{m} (n_i - y_i) \log(1-\theta_i) + \sum_{i=1}^{m} \log \binom{n_i}{y_i} \,.$$

Deriviramo po θ_i i izjednačimo s nulom:

$$\frac{y_i}{\theta_i} - \frac{n_i - y_i}{1-\theta_i} = 0 \,,$$

te zato

$$y_i(1-\theta_i) = (n_i - y_i)\theta_i \,,$$

što daje $\hat{\theta}_i = y_i/n_i$.

(ii) (a) Uočimo prvo da je $1-\theta_i = (1+e^{\alpha+\beta x_i})^{-1}$. Upotrebom izraza za log-vjerodostojnost izvedenog u (i), log-vjerodostojnost se može zapisati kao

$$\begin{aligned}
l &= \sum_{i=1}^{m} y_i \log \theta_i + \sum_{i=1}^{m} (n_i - y_i) \log(1-\theta_i) + c \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i \log\left(\frac{\theta_i}{1-\theta_i}\right) - \sum_{i=1}^{m} n_i \log(1+e^{\alpha+\beta x_i}) + c \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i(\alpha + \beta x_i) - \sum_{i=1}^{m} n_i \log(1+e^{\alpha+\beta x_i}) + c \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{m} y_i + \beta \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} n_i \log(1+e^{\alpha+\beta x_i}) + c
\end{aligned}$$

(b) Deriviranjem po α i β, te izjednačavanjem s nulom, daje jednažbe koje zadovoljavaju $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$. To su

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} n_i \frac{e^{\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i}}{1+e^{\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i}} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} n_i \frac{x_i e^{\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i}}{1+e^{\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i}} &= 0\end{aligned}$$

(iii) Tražena devijacija D je dvostruka razlika između maksimiziranih log-vjerodostojnosti za modele u (i) i (ii).

Uvrstimo procjenitelje maksimalne vjerodostojnosti u log-vjerodostojnost u (i), te e_i/n_i za θ_i u model u (ii), dobivamo

$$\begin{aligned} D &= 2\left(\sum_{i=1} y_i \log\frac{y_i}{n_i} + \sum_{i=1}^{m}(n_i - y_i)\log\left(1-\frac{y_i}{n_i}\right)\right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{m} y_i \log\frac{e_i}{n_i} - \sum_{i=1}^{m}(n_i - y_i)\log\left(1-\frac{e_i}{n_i}\right)\right) \\ &= 2\left(y_i \log\frac{y_i}{e_i} + \sum_{i=1}^{m}(n_i - y_i)\log\frac{n_i - y_i}{n_i - e_i}\right). \end{aligned}$$

(iv) (a) U Modelu 2 prilagođen je jedan dodatni parametar, te je broj stupnjeva slobode jednak 4.

(b) U prvom modelu prilagodba nije naročito dobra (devijacija = 13.33 uspoređena s χ^2_5 distribucijom), ali drugi model je bolji (devijacija 1.67 uspoređena s χ^2_4 distribucijom).
Pad devijacije, kao posljedica uključenja regresije na dob, je 13.33-1.67=11.66, što je značajno u usporedbi s χ^2 distribucijom s $5-4=1$ stupnjeva slobode. To implicira da se član s dobi treba uključiti u model.

(c) U Modelu 2, $\hat{\beta}$/s.g.$(\hat{\beta}) = -3.45$ je značajno, te potvrđuje da β treba biti u modelu. Procjena od β je negativna, te logit(θ_i) opada kako dob raste.

Usporedimo omjere:

$$\begin{aligned}\frac{\theta_{i+1}}{1-\theta_{i+1}} &= e^{\alpha+\beta x_{i+1}}\\ &= e^{\alpha+\beta(x_i+1)}\\ &= \frac{\theta_i}{1-\theta_i}\, e^{\beta}\,.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem procjene za β, omjer $\theta_i/(1-\theta_i)$ množi se sa $e^{\hat{\beta}} = e^{-0.2492} = 0.78$ da bi se dobio omjer za dob x_{i+1}.